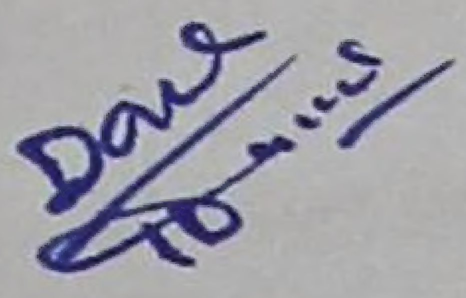


سلسلۂ نصابیاتِ علمیہ جامعۂ عثمانیہ

بی۔ اے۔ کے لئے

تحلیلی ہندسہ

(کوآرڈی نیٹ جومٹری، گریس اینڈ روزنبرگ)

مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات کلیہ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد دکن

سنہ ۱۳۴۱ھ م سنہ ۱۳۳۲ف م سنہ ۱۹۲۲ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

تحلیلی ہندسہ

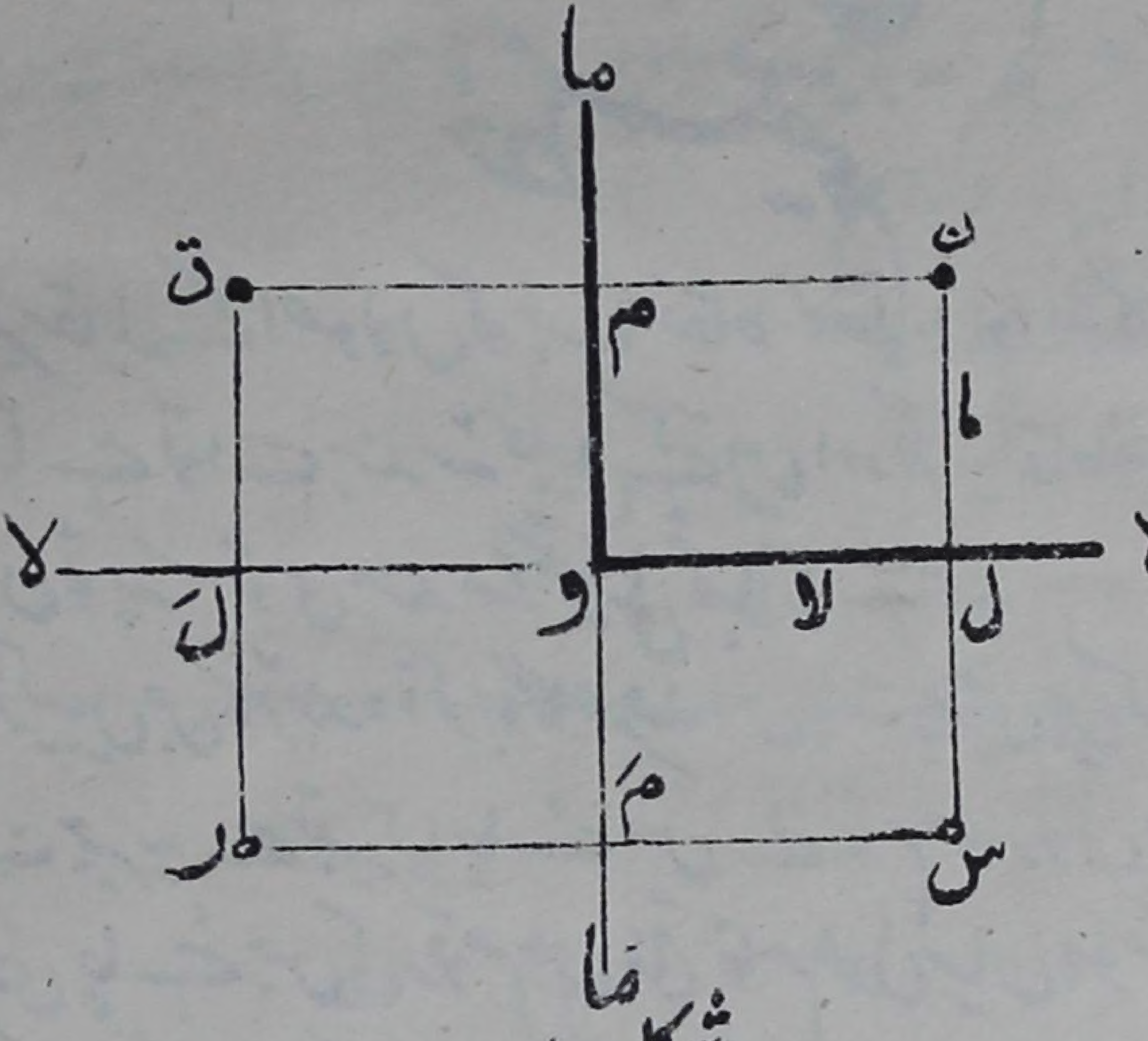
حصهٔ اول

خط مستقیم

ہم نقطہ ن کا مقام سطح مذکورہ میں ثابت کر سکتے ہیں۔

ان دو طولوں کو کارٹیزی قائم محدد یا اختصاراً نقطہ ن کے محدد کہتے ہیں، و ل نقطہ ن کا فصلہ کہلاتا ہے اور ل ن معین، نیز خطوط و لا اور و ما کو محور اور نقطہ و کو مبدأ کہتے ہیں۔

اگر و ل میں طول کی لا اکائیاں ہوں اور ل ن میں ما اکائیاں یعنی اگر نقطہ ن کا فصل لا اور معین ما ہو تو ن کو نقطہ (لا، ما) سے موسوم کرتے ہیں، و لا کو لا کا محور اور و ما کو ما کا محور کہتے ہیں۔



شکل ۱

اگر ہمیں و ل اور ل ن کے طولوں میں بالترتیب کل اکائیوں کی تعداد بھی معلوم ہو جائے تو بھی ن کا مقام پورے طور پر متعین نہیں ہو سکتا کیونکہ ہمیں یہ ضرور معلوم ہونا چاہیے کہ و ل نقطہ و سے کس طرف کھینچا گیا ہے، دائیں طرف یا بائیں طرف، نیز ل ن نقطہ ل سے اوپر کی طرف کھینچا گیا ہے یا نیچے کی طرف۔

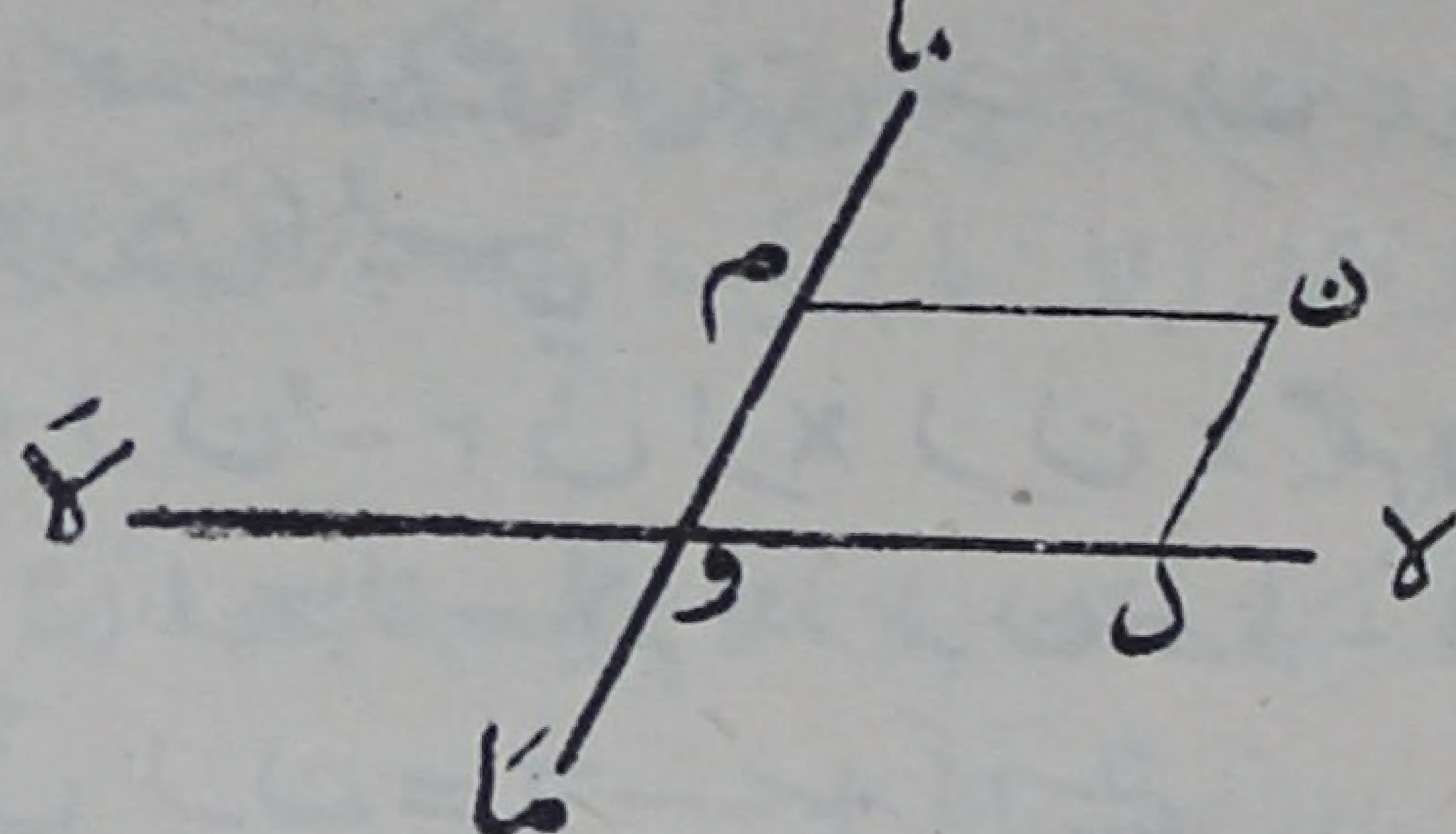
ہم ان خطوط کی سمتوں کو نقطہ ن کے محددوں کی علامات سے تعبیر کریں گے اور اس جگہ ہم اُس حسابی دستور کو اختیار کرتے ہیں جو علم مثلث میں مروج ہے۔ یعنی جب و ل نقطہ و سے دائیں طرف کو کھینچا جائے تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر یہ و سے بائیں طرف کو کھینچا جائے تو منفی خیال کرتے ہیں، نیز اگر ل ن نقطہ ل سے اوپر کی طرف کھینچا گیا ہو تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر نیچے کی طرف کھینچا گیا ہو تو

منفی۔ دوسرے الفاظ میں نقطہ و کے دائیں طرف جتنے نقاط ہوں ان کے فصلوں کو مثبت خیال کرتے ہیں اور بائیں طرف کے نقاط کے فصلوں کو منفی، نیز نقطہ و کے اوپر جتنے نقاط ہوں ان کے معینوں کو مثبت شمار کرتے ہیں اور نیچے کے نقاط کے معینوں کو منفی۔

شکل میں خطوط ولا اور و ما کے اندر جو خانہ گھرا ہوا ہے اس کو مثبت ربع کہتے ہیں کیونکہ ان تمام نقاط کے فصلے اور معین جو اس خانہ میں واقع ہیں مثبت ہیں۔

مائل محور۔ بعض اوقات یہ زیادہ سودمند ہوتا ہے کہ ایک نقطہ مفروضہ کا مقام بلحاظ "مائل محوروں" کے (جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ نہ بناتے ہوں) متعین کیا جائے۔

اگر و لا اور و ما مائل محور ہوں اور ن نقطہ مفروضہ ہو تو ن ل کو



شکل ۲

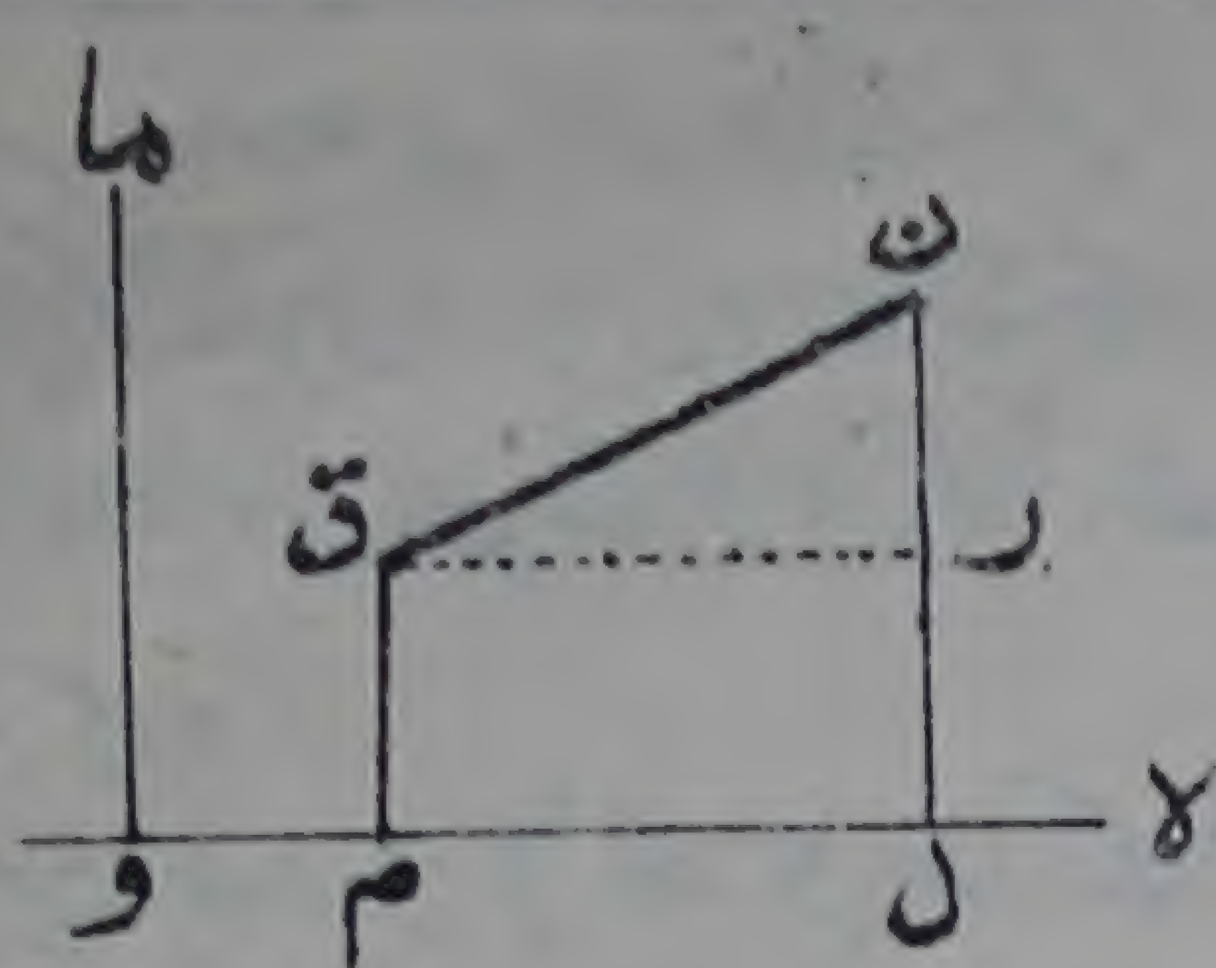
و ما کے متوازی کھینچو جو و لا سے نقطہ ل پر ملے۔ تب و ل نقطہ ن کا فصلہ ہے اور ل ن معین، یاد رہے کہ اس صورت میں بھی علامات کے متعلق ہم وہی حسابی دستور قائم رکھیں گے جو ہم نے قائم محوروں کے لئے اختیار کیا ہے

ہم زاویہ لا و ما کو جو خطوط و لا اور و ما کے اندر گھرا ہوا ہے سے سے تعبیر کریں گے اور یہ زاویہ قائمہ سے بڑا یا چھوٹا ہو سکتا ہے۔

۲۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محددوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

قائم محور

فرض کرو کہ نقاط مفروضہ ن (لا$_1$، ما$_1$) اور ق (لا$_2$، ما$_2$) ہیں، معین



بشکل ۳

ن ل اور ق م کھینچو، نقطہ ق میں سے ق ر خط و لا کے متوازی کھینچو جو ن ل یا ن ل ممدودہ سے نقطہ ر پر ملے۔

تب ن ق^2 = ق ر^2 + ر ن^2

(اقلیدس م ا ش ۴۷)

ق ر = و ل − و م = لا$_1$ − لا$_2$

ر ن = ل ن − م ق = ما$_1$ − ما$_2$

∴ ن ق^2 = (لا$_1$ − لا$_2$)^2 + (ما$_1$ − ما$_2$)^2 .... (۱)

اگر نقطہ ق مبدا ہو تو لا$_2$ = ۰، ما$_2$ = ۰ اور اس لئے و ن^2 = لا$_1^2$ + ما$_1^2$

مائل محور۔ اس صورت میں بھی عمل وہی ہے، صرف اس فرق کا خیال رکھا جائے کہ معین خط و لا پر عمود نہیں ہیں، پس

ن ق^2 = ق ر^2 + ر ن^2 − ۲ ق ر × ر ن × جم ق ر ن

بموجب سابق ق ر = لا$_1$ − لا$_2$ اور ر ن = ما$_1$ − ما$_2$

نیز زاویہ ق ر ن = π − سہ، اسلئے

ن ق^2 = (لا$_1$ − لا$_2$)^2 + (ما$_1$ − ما$_2$)^2 + ۲ (لا$_1$ − لا$_2$) (ما$_1$ − ما$_2$) جم سہ ..... (۲)

نتیجہ صریح۔ و ن^2 = لا$_1^2$ + ما$_1^2$ + ۲ لا$_1$ ما$_1$ جم سہ

نوٹ۔ اگر نقطہ ق مثبت ربع میں واقع نہ ہو تو لا$_2$ یا ما$_2$ یا یہ دونوں منفی ہوں گے، طالب علم کو شکلیں کھینچکر اس کی تصدیق کرنی چاہیے کہ ہر صورت میں ق ر = لا$_1$ − لا$_2$ اور ر ن = ما$_1$ − ما$_2$ اگر طولوں کی جبریہ علامات کا لحاظ رکھا جائے

مشقیں

ذیل کی مشقوں ۱ تا ۴ اور ۸ میں محور قائم ہیں۔

۱۔ ایک انچ کو طول کی اکائی مان کر نقاط ذیل کے مقامات کو شکل میں تعبیر کرو۔

(۱) (۰، ۰)، (۲) (۰، ۱)، (۳) (۰، −۱)، (۴) (۱، ۰)، (۵) (−۱، ۰)

(۶) (۱، ۱)، (۷) (۱، ۱/۲)، (۸) (۱، ۱)، (۹) (۱/۴، -۳/۴)،
(۱۰) (-۳/۴، -۱/۴)، (۱۱) (-۱، -۵/۴)، (۱۲) (-۱، -۱)

۲۔ نقطہ و مبدأ ہے، نقطہ ن (ا، ب) ہے، ق (-ا، -ب) اور ل (ب، ا)، ثابت کرو کہ (۱) و خط ن ق کا وسطی نقطہ ہے

(۲) و ن = و ل اور زاویہ لا و ن = زاویہ ل و ما

۳۔ ایک جہاز ایک روشنی گھر سے ۸ میل شمال اور ۶ میل مشرق کی طرف ہے، ایک اور جہاز اسی روشنی گھر سے ۳ میل شمال اور ۶ میل مغرب کی طرف ہے، ان دو جہازوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو، نیز پہلے جہاز اور روشنی گھر کے درمیان جو فاصلہ ہے اسے معلوم کرو۔

۴۔ نقطہ (۱۰، -۱۸) کے فاصلے نقاط (۳، ۶) اور (-۵، ۲) سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ آپس میں برابر ہیں۔

۵۔ نقاط (۴، ۳)، (۱، ۲) کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو (سہ = ۶۰°)

۶۔ ایسی شرط دریافت کرو کہ نقطہ (لا، ما) ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہو جس کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر ا۔

۷۔ ایسی شرط دریافت کرو کہ ایک نقطہ (لا، ما) ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہو جس کا مرکز (د، ع) ہے اور نصف قطر ا۔

۸۔ ثابت کرو کہ نقاط (۱۷، ۱۷)، (۲۷، ۹)، (۰، ۱۰)، (-۱۳، -۱)، (-۶۴، ۱۶) ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہیں جس کا مرکز (-۱۳، ۸۴) ہے اور نصف قطر ۸۵۔

۳۔ اُس نقطہ کے محدد معلوم کرو جو دو نقاط معلومہ کے ملانے والے خط کو ایک دی ہوئی نسبت سے تقسیم کرے۔

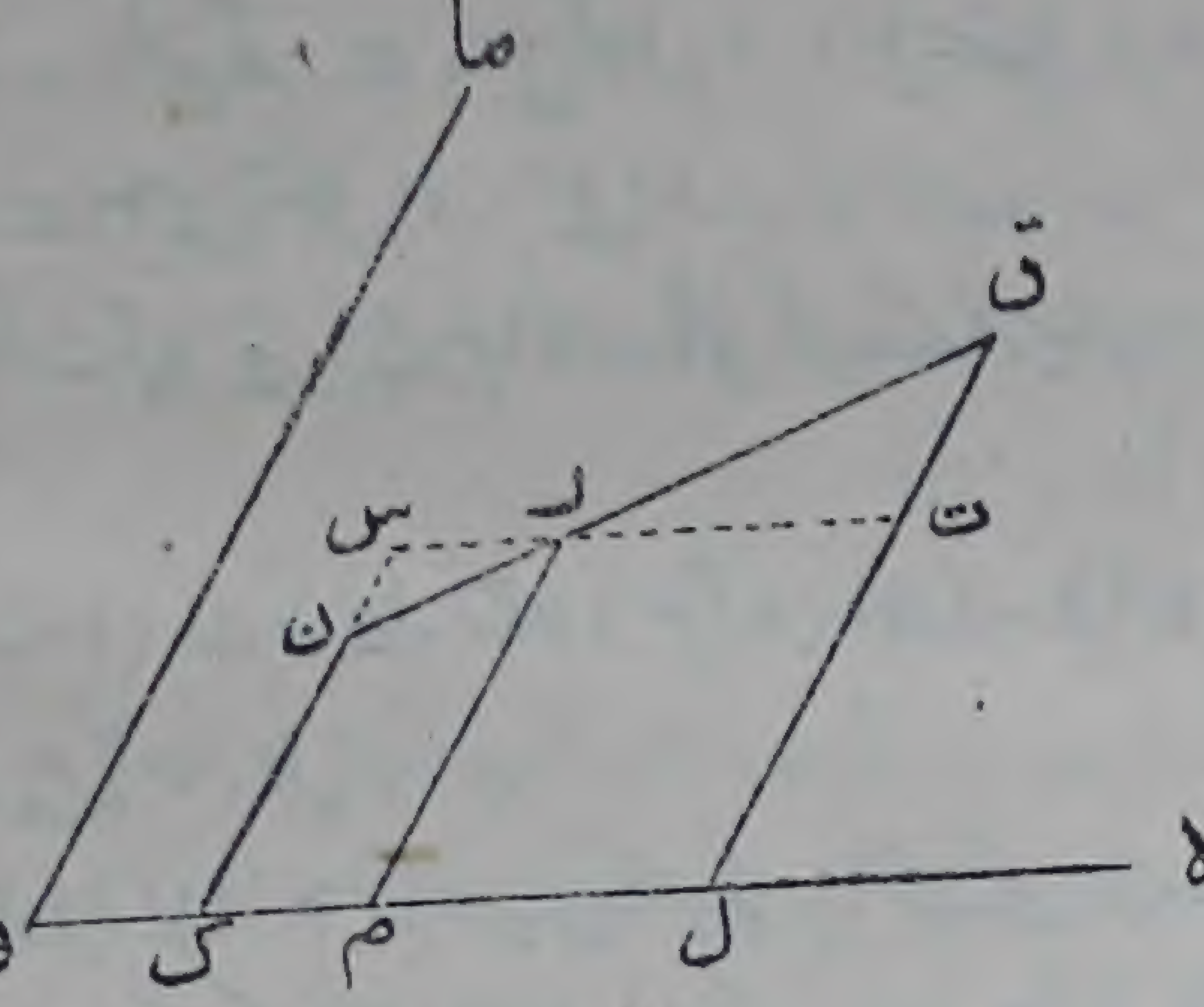
فرض کرو کہ ن (لا۱، ما۱) اور ق (لا۲، ما۲) نقاط معلومہ ہیں اور نقطہ ر خط ن ق کو نسبت م۱ : م۲ سے تقسیم کرتا ہے پس

$$\frac{\text{ن ر}}{\text{ر ق}} = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_2}$$

فرض کرو کہ ر کے محدد (لا، ما)* ہیں۔

* جب کسی نقطہ کے محدد معلوم نہ ہوں تو انہیں بالعموم محض حروف لا، ما سے تعبیر کرتے ہیں، لیکن ان کے اوپر زیریں یا انکے آخر میں ہندسے لکھے جاتے ہیں جب یہ معلوم ہوں۔

(۱) اندرونی تقسیم یعنی جب ر نقاط ن اور ق کے درمیانی خط ن ق پر واقع ہو۔
معین ن ک، ق ل، ر م کھینچو اور نقطہ ر میں سے خط س ر ت خط
و لا کے متوازی اس طرح کھینچو کہ وہ ن ک اور ق ل کو نقاط س اور ت
پر قطع کرے۔



شکل ۴

$$\text{تب و م} = \text{و ک} + \text{ک م} = \text{لا}_1 + \text{س ر} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{س ر}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{ر ت}}{\text{ر ق}} \quad (\text{متشابہ مثلثوں سے})$$

$$= \frac{\text{س ر} + \text{ر ت}}{\text{ن ر} + \text{ر ق}} = \frac{\text{س ت}}{\text{ن ق}}$$

$$\therefore \text{س ر} = \frac{\text{ن ر}}{\text{ن ق}}\,\text{س ت} = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)$$

جسے (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \frac{\text{م}_1\,\text{لا}_2 + \text{م}_2\,\text{لا}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \\ \text{اسی طرح ما} &= \frac{\text{م}_1\,\text{ما}_2 + \text{م}_2\,\text{ما}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نتیجہ صریح۔ خط ن ق کے نقطۂ تنصیف کے محدد ہیں

$$\left(\frac{\text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۲}}{۲} \;،\; \frac{\text{ما}_{۱} + \text{ما}_{۲}}{۲}\right)$$

(۲) خارجی تقسیم یعنی جب نقطہ ر خط ن ق محدودہ پر دائیں یا بائیں جانب کہیں واقع ہو۔ اگر ر خط ن ق کو خارجاً نسبت $\text{م}_{۱} : \text{م}_{۲}$ سے تقسیم کرے تو

$$\frac{\text{ن ر}}{\text{ق ر}} = \frac{\text{م}_{۱}}{\text{م}_{۲}}$$

اب ق ر = - ر ق جبریہ لحاظ سے

$$\therefore \frac{\text{ن ر}}{\text{ر ق}} = \frac{\text{م}_{۱}}{-\text{م}_{۲}}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر خارجی تقسیم کے لحاظ سے ر کے محدد مطلوب ہوں تو مندرجہ بالا اجملات میں ہمیں صرف $\text{م}_{۲}$ کی علامت بدل دینی چاہئے پس

$$\text{لا} = \frac{\text{م}_{۱}\,\text{لا}_{۲} - \text{م}_{۲}\,\text{لا}_{۱}}{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲}} \;،\; \text{ما} = \frac{\text{م}_{۱}\,\text{ما}_{۲} - \text{م}_{۲}\,\text{ما}_{۱}}{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

نئی شکل کھینچ کر طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

یاد رہے کہ مندرجہ بالا نتائج قائم اور مائل ہر دو اقسام کے محاورہ کی صورت میں درست ہیں۔

مثال ۱۔ نقاط (۱، -۴)، (-۳، ۲) کے ملانیوالے خط کو ایک نقطہ نسبت ۶ : ۵ سے خارجاً تقسیم کرتا ہے، اس کے محدد دریافت کرو۔

خارجی تقسیم کے لئے جو ضابطہ اوپر مندرج ہے اس کو استعمال کرنے سے محدد ہیں

$$\frac{۶(-۳) - ۵(۱)}{۶ - ۵} \;،\; \frac{۶(۲) - ۵(-۴)}{۶ - ۵}$$ یعنی - ۲۳ ، ۳۲

مثال ۲۔ اقلیدس ص ۶ ش ۳ کے نتیجہ کو کام میں لا کر ثابت کرو کہ ایک مثلث کے زاویوں کے داخلی منصّف ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

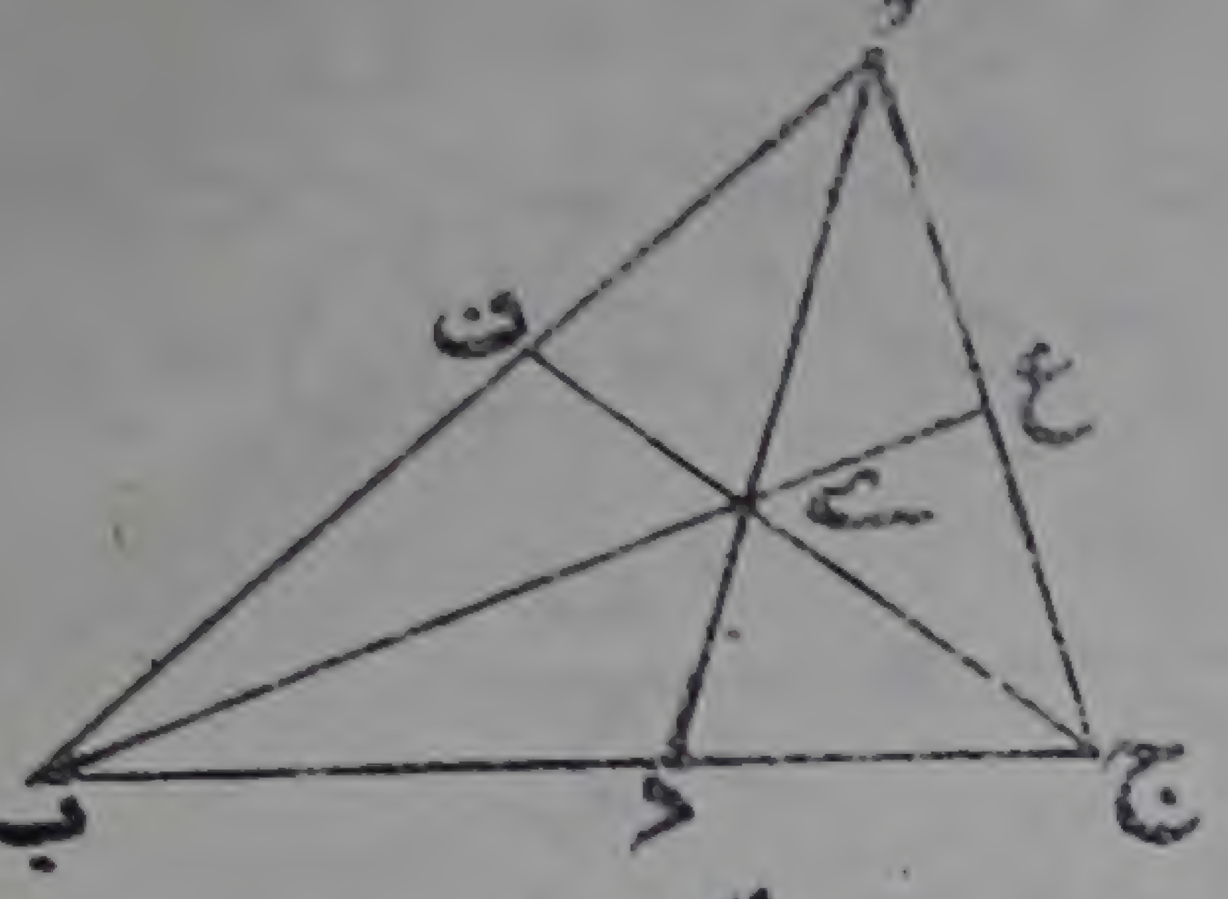
فرض کرو کہ ا ($\text{لا}_{۱}$ ، $\text{ما}_{۱}$)، ب ($\text{لا}_{۲}$ ، $\text{ما}_{۲}$)، ج ($\text{لا}_{۳}$ ، $\text{ما}_{۳}$) ایک مثلث کے راس ہیں، نیز فرض کرو کہ اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب کے طول اَ ، بَ ، جَ

ہیں اور زوایا اَ، ب، ج کے منصّف مقابل کے اضلاع کو د، ع، ف پر ملتے ہیں۔

تب ب د : د ج = ب ا : اج = جَ : بَ

اس لئے د کے محدد ہوئے

$$\frac{\text{بَ لا}_2 + \text{جَ لا}_3}{\text{بَ} + \text{جَ}} \text{ ، } \frac{\text{بَ ما}_2 + \text{جَ ما}_3}{\text{بَ} + \text{جَ}}$$



شکل ۵

نقطہ ا کے محدد لا۱، ما۱ ہیں، اس لئے نقطہ ے کے محدد جو خط کو نسبت

بَ + جَ : اَ سے تقسیم کرتا ہے

$$\frac{\text{اَ لا}_1 + \text{بَ لا}_2 + \text{جَ لا}_3}{\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ}} \text{ ، } \frac{\text{اَ ما}_1 + \text{بَ ما}_2 + \text{جَ ما}_3}{\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ}}$$ ہوں گے۔

اب نقطہ ے کے محدد ہر طرح سے متشاکل ہیں جس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم ب ع کو نسبت جَ + اَ : بَ سے تقسیم کریں یا ج ف کو نسبت اَ + بَ : جَ سے تو ہر صورت میں ہمیں وہی نقطہ ے حاصل ہوگا۔

یاد رہے کہ نقطہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے، اگر اس دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو

$$\frac{\text{اے}}{\text{ےد}} = \frac{\triangle\,\text{اےب}}{\triangle\,\text{ےدب}} = \frac{\triangle\,\text{اےج}}{\triangle\,\text{ےدج}}$$

$$= \frac{\triangle\,\text{اےب} + \triangle\,\text{اےج}}{\triangle\,\text{بےج}} = \frac{\frac{1}{2}\text{جَ ر} + \frac{1}{2}\text{بَ ر}}{\frac{1}{2}\text{اَ ر}}$$

$$= \frac{\text{بَ} + \text{جَ}}{\text{اَ}}$$

حسابی تشاکل کی یہ ایک عمدہ مثال ہے، طالب علم اسے غور سے پڑھے، اس عمل میں خط ا د پر ایک ایسا نقطہ مطلوب ہے جس کے محدد بلحاظ اَ، بَ، جَ اور بلحاظ لا۱، لا۲، لا۳ اور بلحاظ ما۱، ما۲، ما۳ متشاکل ہوں یعنی یہاں یہ مطلوب ہے کہ م۱، م۲ کی قیمتیں ہم اس طرح منتخب کریں کہ جملہ

م۱ ((بَ لا۲ + جَ لا۳) / (بَ + جَ)) + م۲ لا۱ متشاکل ہو، سب سے پہلے ہم م۱ کو بَ + جَ کے مساوی لیتے ہیں تاکہ شمار کنندہ کسور سے خالی ہو جائے، اب چونکہ شمار کنندہ میں لا۲ کا سر بَ ہے اور لا۳ کا جَ اس لئے ہمیں م۲ کو اَ کے مساوی منتخب کرنا چاہئے۔ اب شمار کنندہ متشاکل ہے اور نسب نما اَ + بَ + جَ کے مساوی ہے اسلئے یہ بھی متشاکل ہے، پس معلوم ہوا کہ نسبت بَ + جَ : اَ کا انتخاب محض اتفاقی نہیں ہے۔

مشقیں

۹۔ ایک نقطہ نقاط (-۷، ۴) اور (-۶، -۵) کے ملانے والے خط کو نسبت ۷ : ۵ سے داخلاً تقسیم کرتا ہے، اس کے محدد دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک نقطہ نقاط (۶، ۳) اور (-۷، ۲) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۱ : ۵ سے تقسیم کرتا ہے، اس کے محدد دریافت کرو۔

۱۱۔ معلوم کرو کہ محور لا نقاط (۶، ۴)، (-۱، -۷) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔ [نسبت م۱ : م۲ ایسی معلوم کرو کہ ما کی قیمت صفر ہو]

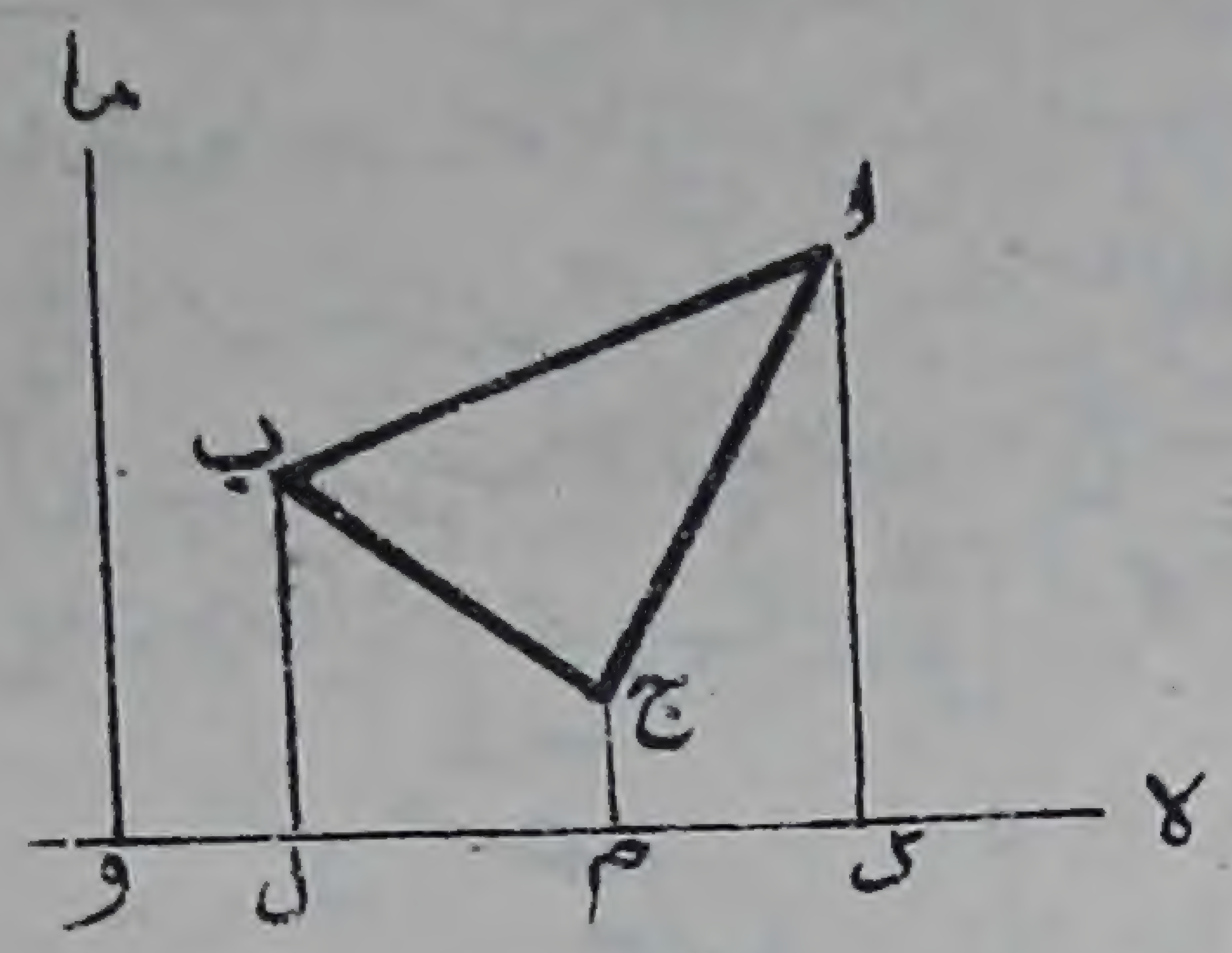
۱۲۔ نقاط (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کے ملانے والے خط کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے، نقطہ (لا۱، ما۱) سے شروع ہو کر جو ل' واں نقطۂ تقسیم ہے اس کے محدد معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے نقاط تنصیف د، ع، ف ہوں اور اگر ا، ب، ج کے محدد بالترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہوں تو ثابت کرو کہ اد، ب ع، ج ف ایک ایسے نقطہ ث پر ملتے ہیں جس کے محدد (لا۱ + لا۲ + لا۳) / ۳ ، (ما۱ + ما۲ + ما۳) / ۳ ہیں (ہم جانتے ہیں کہ نقطہ ث مثلث کا مرکز ثقل ہے)

۱۴۔ مثلث کا رقبہ اس کے رأسوں کے محددوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

قائم محور۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج کے محدد بالترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)،

(لا$_3$، ما$_3$) ہیں، معین ا ک، ب ل، ج م کھینچو، تب



شکل ۶

△ ا ب ج = منحرف ب ک - منحرف ب م - منحرف ج ک

اب منحرف ب ک = △ ب ل ک + △ ب ا ک

$= \frac{1}{2}$ ل ک (ل ب + ک ا)

$= \frac{1}{2}$ (لا$_1$ - لا$_2$) (ما$_1$ + ما$_2$)

باقی رقبوں کو اسی طرح تحویل کرنے سے

△ ا ب ج $= \frac{1}{2}$ {لا$_1$ ما$_2$ - لا$_2$ ما$_1$ + لا$_2$ ما$_3$ - لا$_3$ ما$_2$ + لا$_3$ ما$_1$ - لا$_1$ ما$_3$} (۵)

یہاں ہم نے مثلث کے راسوں کو گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں لیا ہے، اگر انہیں سوئیوں کی سمت میں لیا جائے تو مساوات (۵) سے رقبہ حاصل کرنے کیلئے اس کے بائیں رکن کی علامت تبدیل کرنی چاہیئے۔

نتیجہ صریح - مثلث ا ب و کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (لا$_1$ ما$_2$ - لا$_2$ ما$_1$)

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 \end{vmatrix}$

اس صورت میں مثلث کے راسوں ا، ب، و کو مخالف سمت ساعت لیا گیا ہے

پس مساوات (۵) کی ہندسی تعبیر یہ ہے

△ ا ب ج = △ و ا ب - △ و ج ب + △ و ج ا

مائل محور - بناوٹ اور عمل وہی ہے جو اوپر ہوا، فرق صرف یہ ہے کہ معین خط و لا پر

عمود نہیں ہیں۔

Δ ب ل ک = ½ ب ل × عمود نقطہ ک سے خط ب ل پر

= ½ ب ل × ل ک جب سہ

اور اسی طرح دوسرے رقبوں کے لئے۔ پس مائل محوروں کی صورت میں یہ فرق ہے کہ رقبہ کی تمام رقوم میں جب سہ شامل ہوتا ہے۔

Δ اب ج = ½ {لا۱ ما۲ − لا۲ ما۱ + لا۲ ما۳ − لا۳ ما۲ + لا۳ ما۱ − لا۱ ما۳} جب سہ

جہاں رأسوں کو حسب سابق مخالف سمت ساعت لیا گیا ہے۔ مساوات (۵) کو یاد رکھنا چاہئے۔

مثال ۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے رأسوں ا، ب، ج، د کے محدد مخالف سمت ساعت (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳)، (لا۴، ما۴) ہیں، ثابت کرو کہ قائم محوروں کی صورت میں اس کا رقبہ

½ {لا۱ ما۲ − لا۲ ما۱ + لا۲ ما۳ − لا۳ ما۲ + لا۳ ما۴ − لا۴ ما۳ + لا۴ ما۱ − لا۱ ما۴}

ہے لیکن اگر مائل ہوں تو اوپر کے جملہ میں ہمیں جب سہ کا بطور جزو ضربی اضافہ کر دینا چاہئے (کیونکہ ذوار بعۃ الاضلاع کا کل رقبہ مثلثات اب ج اور ب ج د کے رقبوں کے مجموعہ کے برابر ہے)

مشقیں

۱۴۔ نقاط ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(ا) (۳، ۰)، (−۲، ۱)، (−۱، −۲)

(ب) (۰، ۰)، (ا، ب)، (−ب، ا)

(ج) (ن، م)، (۰، ل)، (ن + ق، ن)

۱۵۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے رأس

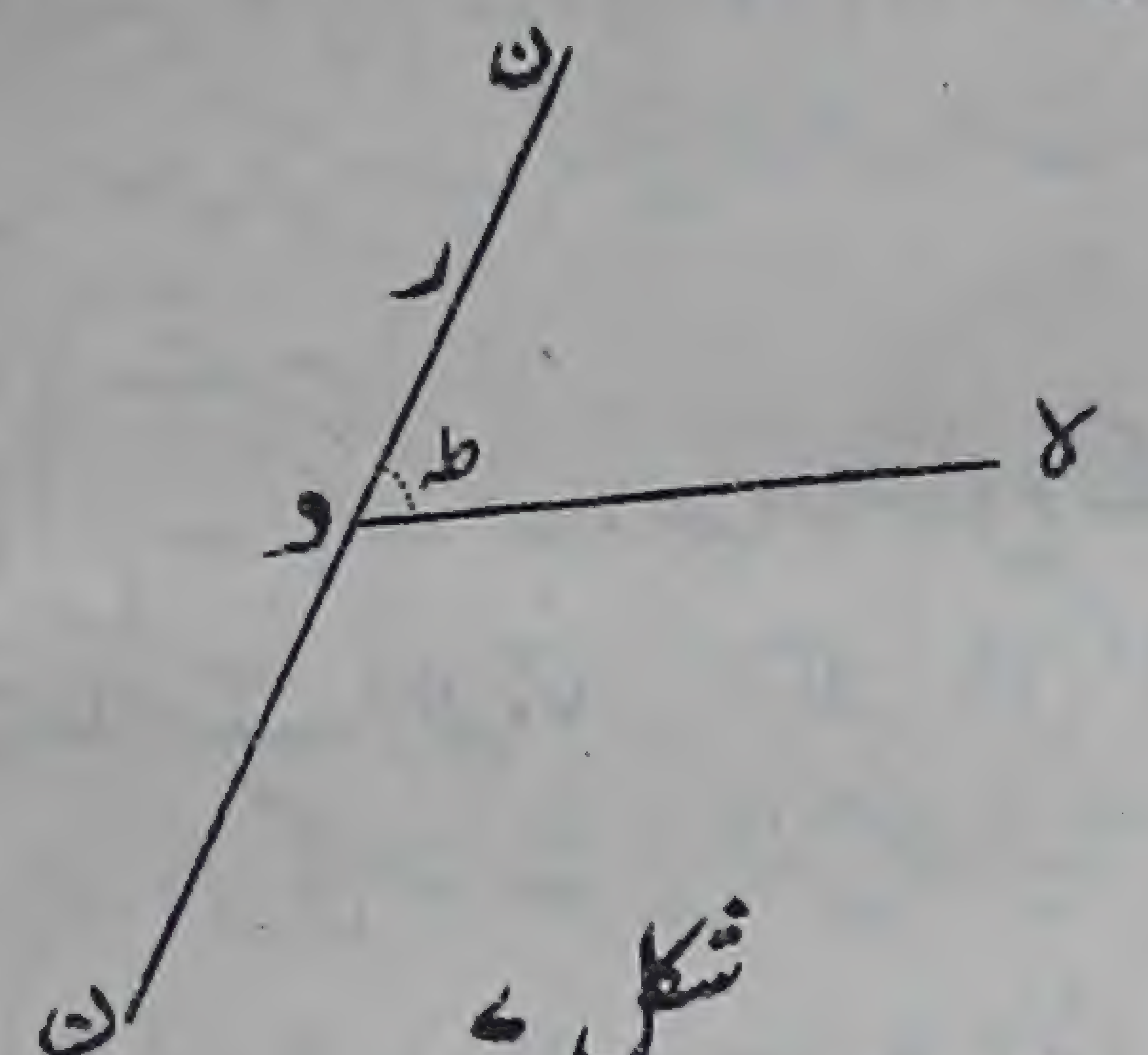
(½، ½ √۳)، (−½ √۳، ½)، (−½، −½ √۳)

(½ √۳، −½) ہیں، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۱۶- ایک ن اضلاع کی شکل کثیر الاضلاع کے راس ایک ہی رخ میں بالترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳)، ۔ ۔ ۔ (لان، مان) ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ½ (لا۱ ما۲ + لا۲ ما۳ + ۔ ۔ ۔ + لان-۱ مان + لان ما۱) − ½ (ما۱ لا۲ + ما۲ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + مان-۱ لان + مان لا۱) ہے۔

۵- قطبی محدد

محددوں کا ایک اور نظام نہایت کار آمد ہے جس سے ہم ایک نقطہ کے مقام کو ایک سطح پر متعین کر سکتے ہیں۔



شکل ۷

کوئی ثابت نقطہ و لو اور و میں سے گذرتا ہوا ایک مستقیم خط و لا کھینچو جسے ہم اپنا ثابت یا ابتدائی خط قرار دیتے ہیں۔ محددوں کے اس نظام میں نقطہ و قطب کہلاتا ہے اب کسی نقطہ ن کے مقام کی تعیین ہوسکتی ہے اگر ہمیں (۱) خط و ن کا طول معلوم ہو (اس طول کو ر سے تعبیر کرتے ہیں اور و ن کو خط دائر یا نیمقطر سمتی کہتے ہیں) اور (۲) وہ زاویہ معلوم ہو جو و ن ابتدائی خط و لا سے بناتا ہے (یہ زاویہ طہ سے تعبیر ہوتا ہے اسے سمتی زاویہ کہتے ہیں) پس و ن اور زاویہ لا و ن نقطہ ن کے قطبی محدد ہیں، ان کو اس طرح لکھتے ہیں (ر، طہ)۔ علم مثلث کے دستور کے موافق زاویہ طہ ابتدائی خط و لا سے گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت میں ناپا گیا ہے۔

اگر و ن نقطہ و کے گرد پورے چکروں کی کسی تعداد میں سے گھوم جائے تو اس سے نقطہ ن کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئے گا۔

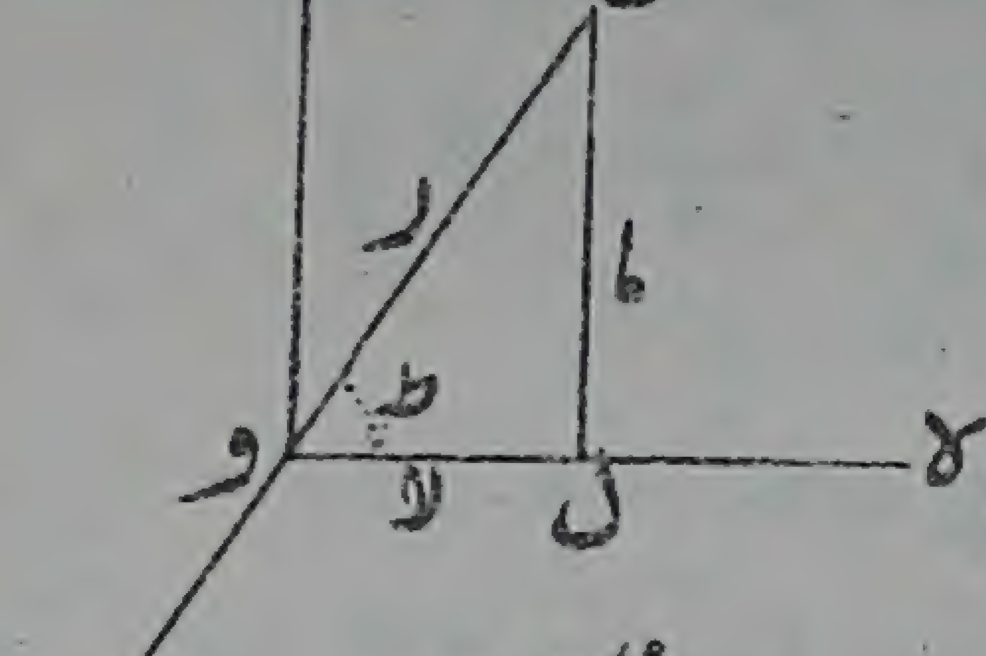
ر کی منفی علامت سے یہ مراد ہوگی کہ و ن کی مقابل سمت میں فاصلہ ر ناپا گیا ہے جہاں و ن سمتی زاویہ کا احاطہ کرنے والا خط ہے، پس اگر ہم سمتی نیمقطر کو اس طرح پھرائیں کہ وہ نیم چکروں کی کسی طاق تعداد میں سے گھوم جائے اور اگر ساتھ ہی ہم ر کی علامت بدل دیں تو ایسا کرنے سے ہم ن کے مقام کو نہیں بدلیں گے۔ اس لئے ن (ر، طہ) کے محددوں کی عام ترین صورت

(ر، طہ ± ۲ف π) یا (- ر، طہ ± (۲ف + ۱) π) ہے۔

بالعموم ر کو ہمیشہ مثبت خیال کرتے ہیں اور طہ کی قیمت ۰ اور ۲ π کے درمیان منتخب کرتے ہیں۔

۶۔ کارٹیزی محددوں کو قطبی محددوں میں تبدیل کرنا اور برعکس اس کے۔

قائم محور۔ شکل منسلکہ کو دیکھنے سے جملات مطلوبہ حاصل ہوں گے



شکل ۸

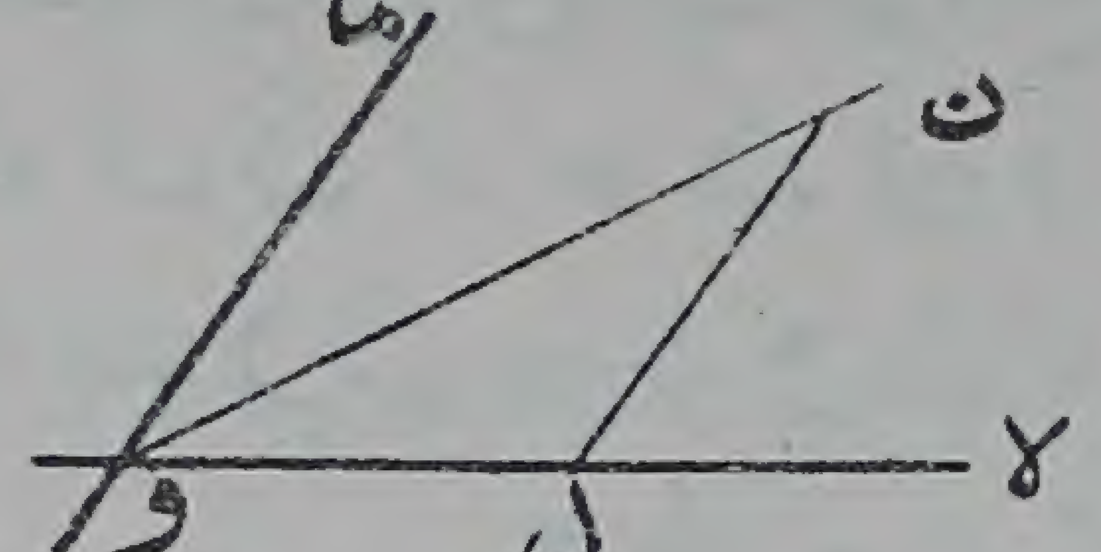
صریحاً

لا = ر جم طہ ......
ما = ر جب طہ ...... } ..... (۷)

ر = ± √(لا² + ما²)
طہ = مس⁻¹ (ما / لا) } ..... (۸)

ر کی علامت فی الحقیقت مشتبہ نہیں ہے کیونکہ طہ بشکل ن π + عہ معلوم ہے پس جب ہم طہ کی کوئی خاص قیمت منتخب کر لیتے ہیں تو ر کی علامت مساوات (۷) سے حاصل ہو جاتی ہے۔

مائل محور۔ شکل منسلکہ میں



شکل ۹

و ن = ر، ∠ لا و ن = طہ

∠ لا ل ن = سہ

∠ و ن ل = سہ - طہ

∴ لا = ر جب (سہ - طہ) / جب سہ
ما = ر جب طہ / جب سہ } ..... (۹)

ر = ± √(لا² + ما² + ۲ لا ما جم سہ)
طہ = مس⁻¹ (ما جب سہ) / (لا + ما جم سہ) } ...... (۱۰)

۷۔ دو نقاط کا درمیانی فاصلہ اُن کے قطبی محددوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

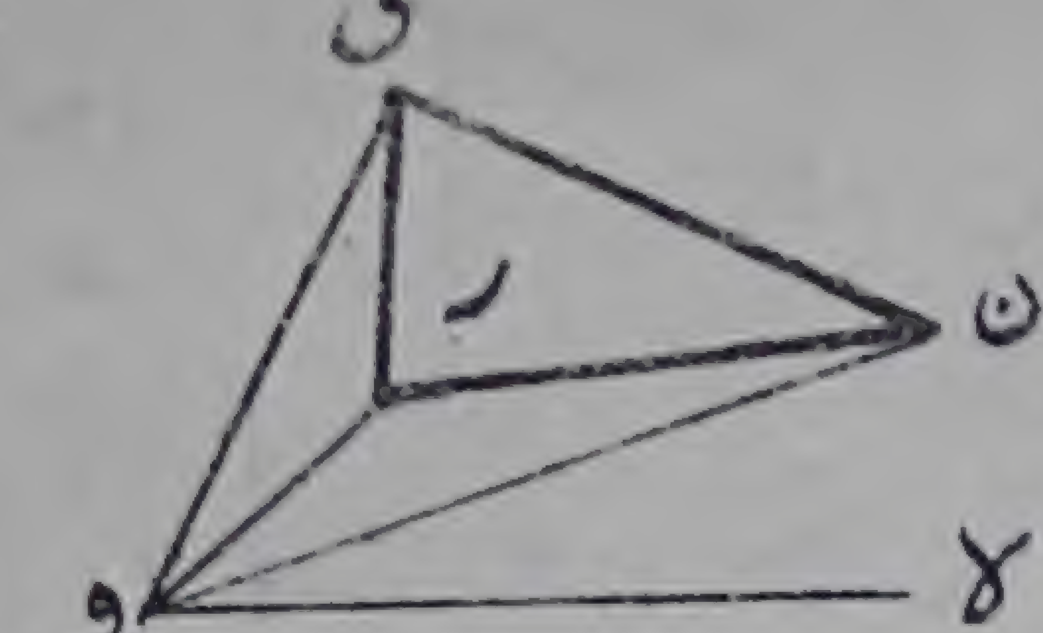
فرض کرو کہ ن (ر۱، طہ۱) اور ق (ر۲، طہ۲) دو نقاط ہیں، ن ق کو ملاؤ۔

تب ن ق^{۲} = و ن^{۲} + و ق^{۲} − ۲ و ن × و ق جم ن و ق

ث ن ق^{۲} = ر$_{۱}^{۲}$ + ر$_{۲}^{۲}$ − ۲ ر$_{۱}$ ر$_{۲}$ جم (طہ$_{۲}$ − طہ$_{۱}$) .... (۱۱)

مثال ۱۷ – اس ضابطہ کو کارٹیزی قائم ضابطہ سے حاصل کرو۔

۸ – ایک مثلث کا رقبہ اس کے رأسوں کے قطبی محددوں کی رقوم میں دریافت کرو۔



شکل ۱۰

فرض کرو کہ ن (ر$_{۱}$، طہ$_{۱}$)، ق (ر$_{۲}$، طہ$_{۲}$)، ر (ر$_{۳}$، طہ$_{۳}$) مثلث کے رأس ہیں جن کو مخالف سمت ساعت لیا گیا ہے، نیز نقطہ ر مثلث ن و ق کے اندر واقع ہوتا ہے

△ ن ق ر = △ ن و ق − △ ر و ق − △ ن و ق

△ ن و ق = $\frac{۱}{۲}$ و ن × و ق جب ن و ق

= $\frac{۱}{۲}$ ر$_{۱}$ ر$_{۲}$ جب (طہ$_{۲}$ − طہ$_{۱}$)

باقی رقبوں کو اسی طرح تحویل کرنے کے بعد

△ ن و ق = $\frac{۱}{۲}$ { ر$_{۱}$ ر$_{۲}$ جب (طہ$_{۲}$ − طہ$_{۱}$) + ر$_{۲}$ ر$_{۳}$ جب (طہ$_{۳}$ − طہ$_{۲}$)

+ ر$_{۳}$ ر$_{۱}$ جب (طہ$_{۱}$ − طہ$_{۳}$) } ..... (۱۲)

طالب علم کو رأسوں کے مختلف مقامات کے لئے شکلیں کھینچنے سے اس ضابطے کی تصدیق کرلینی چاہئے

مشقیں

۱۸ – جو نقاط ذیل کے قطبی محدد دئے ہوئے ہیں اُن کے قائم محدد معلوم کرو نیز نقطوں کو شکل میں دکھاؤ

(ا) (۸ $\sqrt{۲}$، $\frac{۵\pi}{۴}$)، (ب) (−۸ $\sqrt{۲}$، $\frac{\pi}{۴}$)، (ج) (۸ $\sqrt{۳}$، −$\frac{\pi}{۶}$)

۱۹۔ جن نقطوں کے کارٹیزی محدد حسب ذیل ہیں ان کے قطبی محدد دریافت کرو
(ا) −√۲ ، −√۲ (ب) ½√۳ ، −³⁄₂ (ج) −۵ ، ۰ ۔

۲۰۔ درمیانی فاصلہ معلوم کرو
(ا) (۱ ، ¼ π) اور (۲√۳ ، ⅓ π) کا
(ب) (۲√۲ ، ¹⁄₁₂ π) اور (۲ ، ⅓ π) کا

۲۱۔ نقاط ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں اُن کے رقبے دریافت کرو
(ا) (۱ ، ⅛ π) ، (۱ ، ⅝ π) ، (۲√۲ ، ⅜ π)
(ب) (۳ ، ⅙ π) ، (۲ ، ½ π) ، (۱ ، ⅚ π)

۲۲۔ ضابطہ (۱۲) کو قائم کارٹیزی ضابطہ سے حاصل کرو۔

۲۳۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے نقاط راس ا، ب، ج، د کے قطبی محدد مخالف سمت ساعت (ر$_۱$، طہ$_۱$)، (ر$_۲$، طہ$_۲$)، (ر$_۳$، طہ$_۳$)، (ر$_۴$، طہ$_۴$) ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا رقبہ
½ {ر$_۱$ ر$_۲$ جیب (طہ$_۲$ − طہ$_۱$) + ر$_۲$ ر$_۳$ جیب (طہ$_۳$ − طہ$_۲$) + ر$_۳$ ر$_۴$ جیب (طہ$_۴$ − طہ$_۳$)
+ ر$_۴$ ر$_۱$ جیب (طہ$_۱$ − طہ$_۴$)} ہوگا۔

۹۔ طریق اور مساواتیں

جب ایک نقطہ کسی خاص قاعدہ یا شرط کے ماتحت حرکت کرے تو اس کے راستہ کو ہم اصطلاحاً **طریق** کہینگے۔ مثلاً ہم جانتے ہیں کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ ایک ہی فاصلہ پر رہتا ہے ایک دائرہ کا محیط ہے۔ جب ایک نقطہ کسی ایک ہی مقام پر مقید نہیں ہوتا بلکہ ایک خط پر حرکت کرسکتا ہے تو اس کے محددوں کو دائر محدد کہتے ہیں۔

جب ایک نقطہ کسی خاص قاعدہ یا شرط کے تابع حرکت کرتا ہے تو اس کے محدد کسی متناظر جبریہ ربط کو پورا کرتے ہیں۔ مثلاً اگر ایک نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ اس کا فاصلہ اثنائے حرکت میں مبدأ سے ہمیشہ ا ہو تو اس کے قائم کارٹیزی محدد ہمیشہ مساوات لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ کو پورا کرینگے۔ (دفعہ ۲)

پس ہر ایک ایسے منحنی کے جواب میں جو ایک نقطہ کسی خاص قاعدہ کے تابع

حرکت کرنے سے مرتسم کرتا ہے ایک غیر متبدل جبریہ ربط ہوتا ہے جس کو منحنی کے ہر ایک نقطہ کے محدد پورا کرتے ہیں، اس جبریہ ربط کو منحنی کی **مساوات** کہتے ہیں۔ اور برعکس اس کے ہر ایک ایسی جبریہ مساوات کے جواب میں جس کے ذریعہ ایک متحرک نقطہ کے محدد باہم مربوط ہوں ایک منحنی ہوتا ہے جس پر یہ نقطہ ہمیشہ واقع ہوتا ہے جبکہ کہ اس کے محدد مساوات معلومہ کو پورا کریں۔ اس منحنی کو **مساوات کا طریق** کہتے ہیں۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ایک ایسے دائرہ کی مساوات جس کا مرکز مبدا ہو اور نصف قطر ا، $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ ہے، اور مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ا۔

ہم نے صرف سہولت کی خاطر قائم کارٹیزی محددوں کا اوپر ذکر کیا ہے لیکن ظاہر ہے کہ اسی طرح ایک منحنی کی مساواتیں مائل کارٹیزی، اور قطبی محددوں میں بھی ہو سکتی ہیں، اس تمہید کے بعد ذیل کی تعریفات سمجھ میں آئیں گی۔

کسی منحنی کی مساوات ایک جبریہ ربط ہے جس کو منحنی کے ہر ایک نقطہ کے محدد پورا کرتے ہیں۔

برعکس اس کے **مساوات کا طریق** وہ منحنی ہے جس پر کے ہر ایک نقطہ کے محدد مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ یہ منحنی ایسا ہونا چاہئے کہ وہ **تمام** نقطے جو شرط کو پورا کریں اس پر واقع ہوں اور کوئی ایسا نقطہ جو منحنی پر واقع نہ ہو شرط کو پورا نہ کرے۔

فرض کرو کہ دو منحنی خطوط کی مساواتیں معلوم ہیں، اب ظاہر ہے کہ جس نقطہ یا نقاط پر یہ منحنی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اُن کے محدد ان دونوں مساواتوں کو پورا کرینگے کیونکہ ہر ایک نقطہ تقاطع دونوں منحنی خطوط پر واقع ہے۔ اس لئے اگر نقطہ تقاطع کے محدد مطلوب ہوں تو ہمیں دونوں مساواتوں کو لا، ما یا ر، طہ کے لئے (جو محدد زیر بحث ہوں) ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

اوپر کی عبارت اور تعریفیں نہایت ضروری ہیں، طالب علم کو چاہئے کہ آگے جانے سے پیشتر ان سے بخوبی واقف ہو لے۔

مساوات کے طریق کا مفہوم شاید اسطرح زیادہ واضح ہوگا، لا کو کوئی قیمتیں بالتواتر دے جاؤ اور ان کے جواب میں ما کی قیمتیں مساوات سے معلوم کرو، اس طرح

کئی نقطے طریق پر ملیں گے جن کو شکل میں مربع دار کاغذ پر مرتسم کرنے اور ملانے سے طریق کی شکل کا کچھ پتہ چل سکتا ہے۔

مثال لا − ما = ۰ کے طریق کو مرتسم کرو۔

اوپر کے طریقہ کے موافق عمل کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقاط (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۲، ۲)، (−۱، −۱)، (−۲، −۲) مطلوبہ طریق پر واقع ہیں، یہ نقطے زاویہ لا و ما کے منصف کی نشان دہی کرتے ہیں، مگر ہمیں ابھی یہ ثابت کرنا ہے کہ اس منصف پر کے ہر ایک نقطہ کے محدد مساوات کو پورا کرتے ہیں اور یہ اقلیدس الشکل ۶ سے ظاہر ہے، پس یہ منصف طریق مطلوب ہے۔

مشقیں

۲۴ − ثابت کرو کہ محاور لا اور ما کی مساواتیں بالترتیب ما = ۰ اور لا = ۰ ہیں۔

۲۵ − ثابت کرو کہ مساوات ر = ا کا طریق ایک دائرہ کا محیط ہے اور مساوات طہ = عہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۶ − ثابت کرو کہ جن خطوط کی مساواتیں لا − ما = ۵ اور لا + ما = ۷ ہیں وہ ایک دوسرے کو نقطہ (۶، ۱) پر قطع کرتے ہیں۔

۲۷ − ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دونوں محوروں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ہے، اس کا طریق دریافت کرو۔

۲۸ − ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کے فاصلہ کا مربع نقطہ (۰، ۱) سے ایک کے برابر ہو۔

۲۹ − ایک ایسے طریق کی مساوات دریافت کرو جس کا ہر ایک معین اس کے متناظر فصلہ سے بقدر ایک معلومہ فاصلہ کے بڑا ہو۔

۳۰ − ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا طریق مرتسم کرو

(ا) ۲ لا − ما = ۰ (ب) $لا^2 + ما^2 = ۱۶$

(ج) $ما^2 = ۴ لا$ (د) $ما^2 = ۴$

(ع) $لا^2 = ما$ (ن) لا ما = ۰

(گ) ۳ لا + ۲ ما = ۶ (ھ) لا۲ = لا ما

۱۰ - خط مستقیم کی مساوات

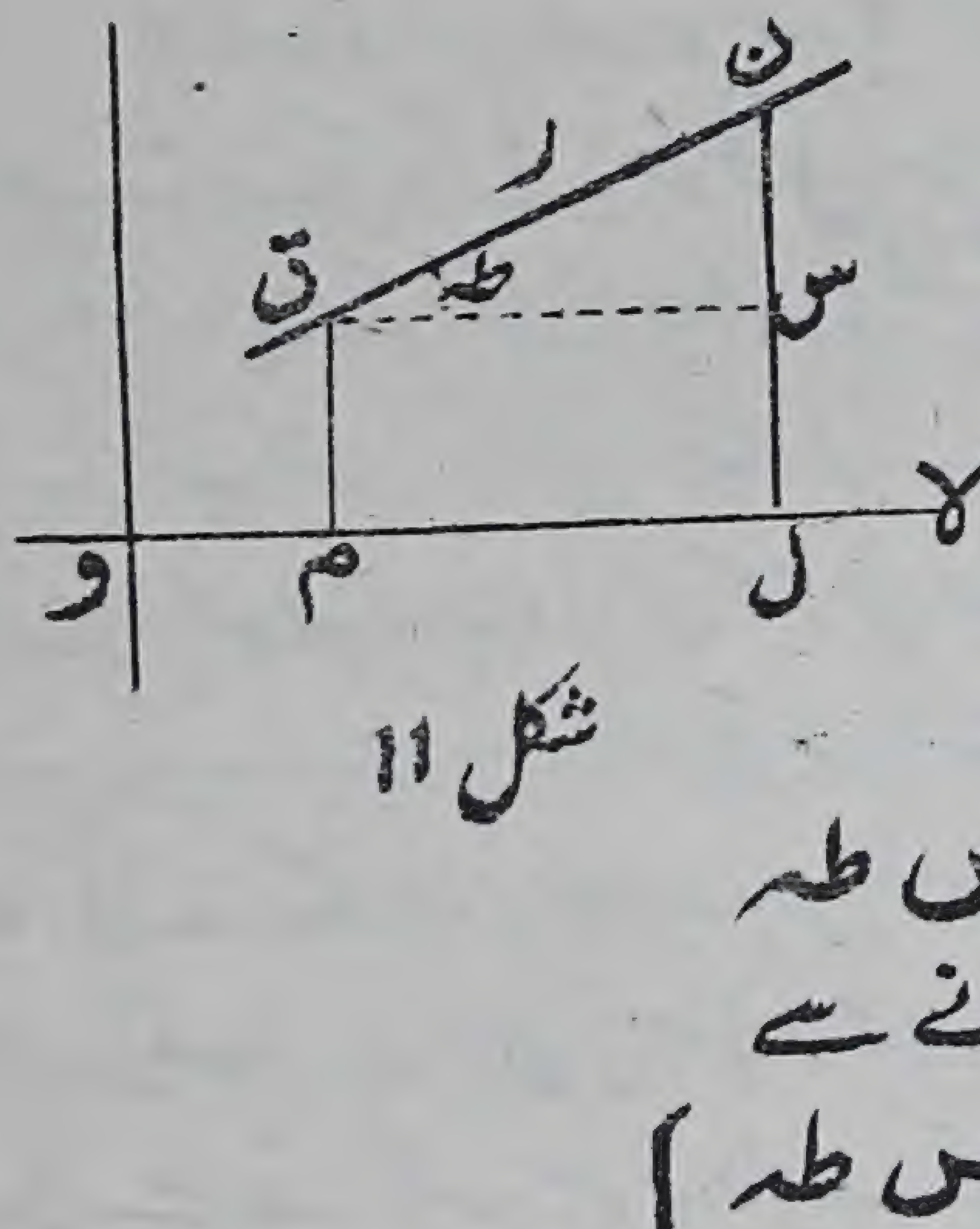
(ا) جب وہ کسی ایک محور کے متوازی ہو۔

اگر ایک خط مستقیم محور لا کے متوازی ہو تو اس کی مساوات ما = ب ہوگی جہاں ب اس خط پر کے کسی نقطہ کا معین ہے، اسی طرح سے لا = ا ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہو جہاں ا اس خط مستقیم پر کے کسی ایک نقطہ کا فصلہ ہے۔

(ب) خط مستقیم کی مساوات جب اُس کی سمت دی ہوئی ہو اور اس پر کسی ایک نقطہ کے محدد معلوم ہوں۔

قائم محور — فرض کرو کہ ق (لا۱، ما۱) نقطہ معلومہ ہے اور خط مستقیم محور لا کے ساتھ زاویہ طہ (مخالف سمت ساعت) بناتا ہے۔

فرض کرو کہ ن (لا، ما) کوئی اور نقطہ خط مستقیم پر ہے۔



شکل ۱۱

معین ق م، ن ل کھینچو اور و لا کے متوازی ق س کھینچو جو ن ل یا ن ل ممدودہ کو نقطہ س پر قطع کرے۔ نقطہ ن ذیل کی ہندسی شرط کو پورا کرتا ہے

س ن = ق س مس طہ

اسی شرط کو جبر و مقابلہ کی زبان میں بیان کرنے سے

ما − ما۱ = (لا − لا۱) مس طہ

یا (لا − لا۱) / جم طہ = (ما − ما۱) / جب طہ .... (۱۳)

اور یہ مساوات مطلوبہ ہے، اس مساوات کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں

ما − ما۱ = م (لا − لا۱) .... (۱۴)

جہاں خط کا میلان طہ، مس ا م ہے۔

اگر خط مستقیم محور ما کو مبدأ سے اوپر فاصلہ ب پر قطع کرے تو ہم ق کو نقطہ (۰، ب) مان سکتے ہیں اور اس صورت میں مساوات ہوگی

ما = م لا + ب .... (۱۵)

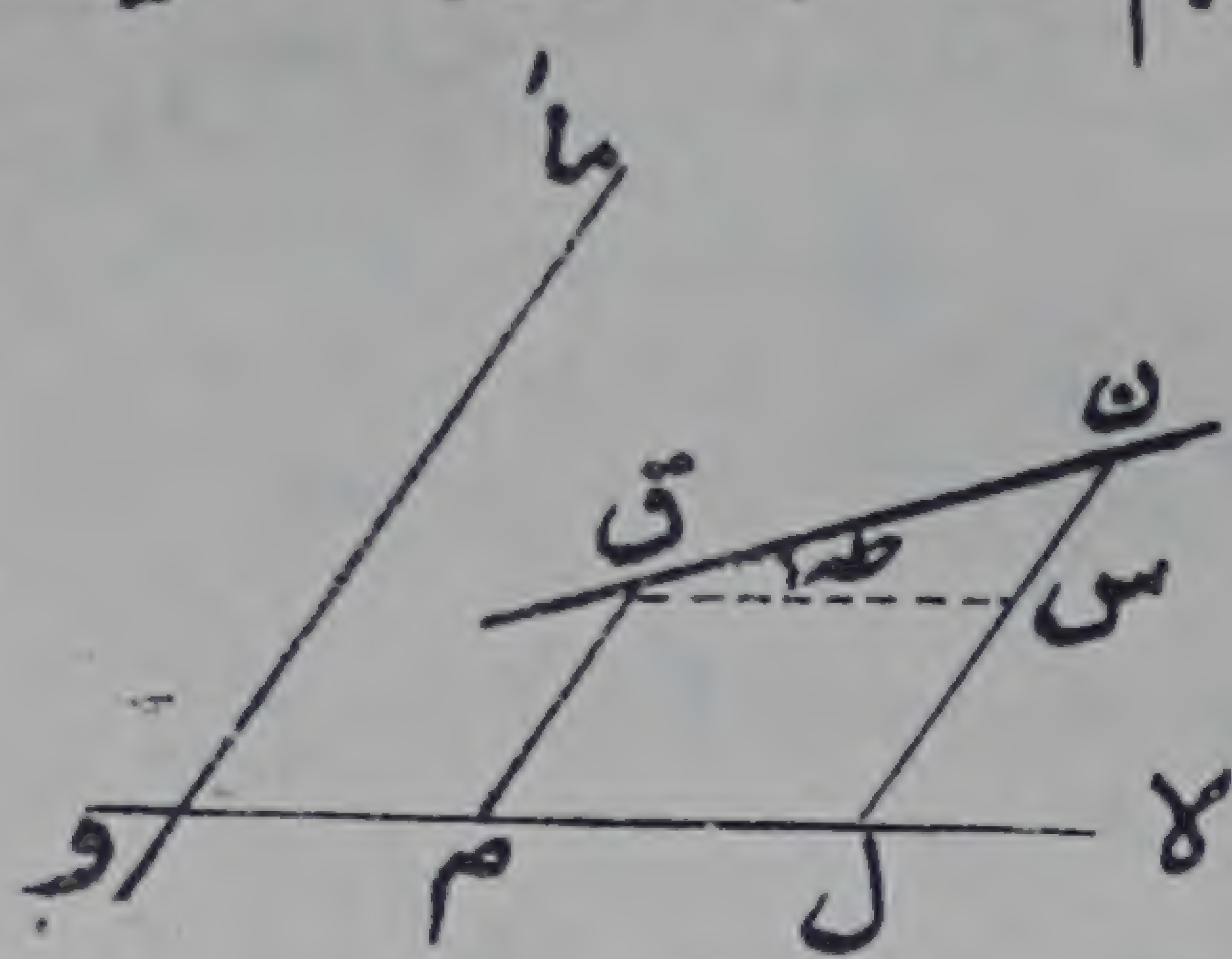
اگر خط مستقیم مبدأ میں سے گذرے تو اس کی مساوات ہوتی ہے

ما = م لا .... (۱۶)

نتیجہ صریح نقطہ ن کے محدد لا، + ر جم طہ، ما + ر جب طہ ہیں۔

مائل محور۔ شکل اور عمل حسب بالا۔

∠ ن ق س = طہ



شکل ۱۲

∠ ق ن س = ∠ ما و لا - ∠ ن ق س

= سہ - طہ

ن س / ق س = جب طہ / جب (سہ - طہ)

اس سے معلوم ہوا کہ مساواتیں (۱۳ تا ۱۶) اِس صورت میں بھی وہی رہیں گی سوائے اس کے کہ م کی جگہ جملہ جب طہ / جب (سہ - طہ) ہوگا جس سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ خط مستقیم کا میلان ہے

مس طہ = م جب سہ / (۱ + م جم سہ) .... (۱۷)

مثال۔ محوروں کا زاویۂ میلان ۴۵° ہے، جو زاویہ خط ما = ½ (√۶ + √۲) لا محور لا سے بناتا ہے اس کو دریافت کرو۔

اس جگہ سہ = ۴۵° اور م = ½ (√۶ + √۲)

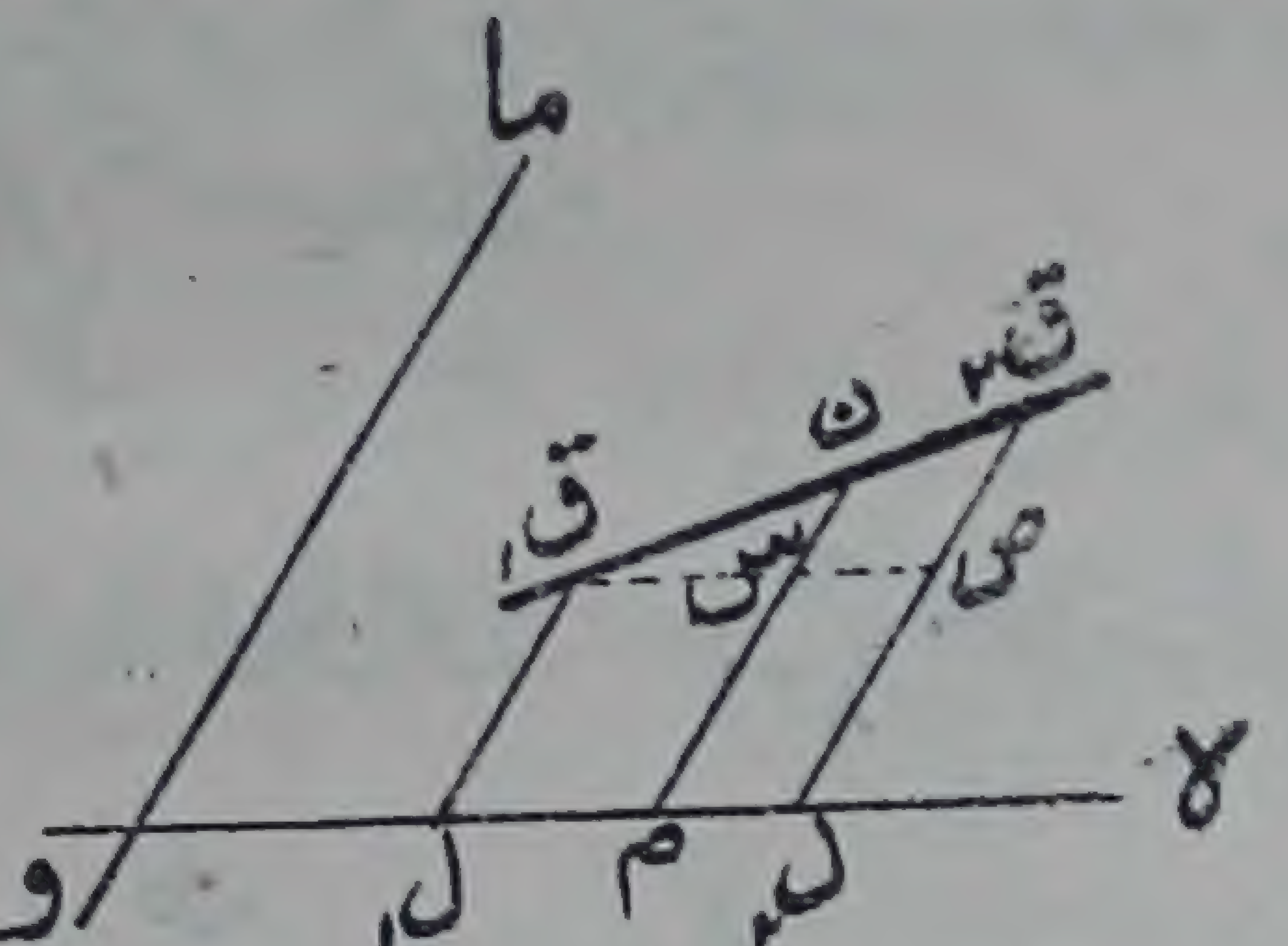
∴ مس طہ = م جب سہ / (۱ + م جم سہ) = (م · ۱/√۲) / (م/√۲ + ۱) = م / (م + √۲)

پس مس طہ = $\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

∴ طہ = ۳۰°

(ج) خط مستقیم کی مساوات جب اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدد معلوم ہوں



شکل ۱۳

فرض کرو کہ ق۱ (لا۱، ما۱) اور ق۲ (لا۲، ما۲) نقاط معلومہ ہیں اور ن (لا، ما) خط پر کوئی اور نقطہ ہے۔

معین ق۱ ل۱، ق۲ ل۲، ن م کھینچو اور ق۱ س ص کو و لا کے متوازی کھینچو کہ وہ ن م کو س پر اور ق۲ ل۲ کو ص پر قطع کرے۔

نقطہ ن اس ہندسی شرط کو پورا کرتا ہے

$$\frac{\text{ق}_1\,\text{س}}{\text{ق}_1\,\text{ص}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ص ق}_2}$$

اس ہندسی ربط کے مقابل جملہ جبریہ یہ ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

یہ مساوات مطلوبہ ہے اور یہ قائم اور مائل ہر دو محوروں کے لئے درست ہے۔

مثال۔ نقاط (-۳، ۷)، (۱، -۲$\frac{۱}{۲}$) کو ملانے والے خط کی مساوات دریافت کرو۔

مساوات مطلوبہ ہے

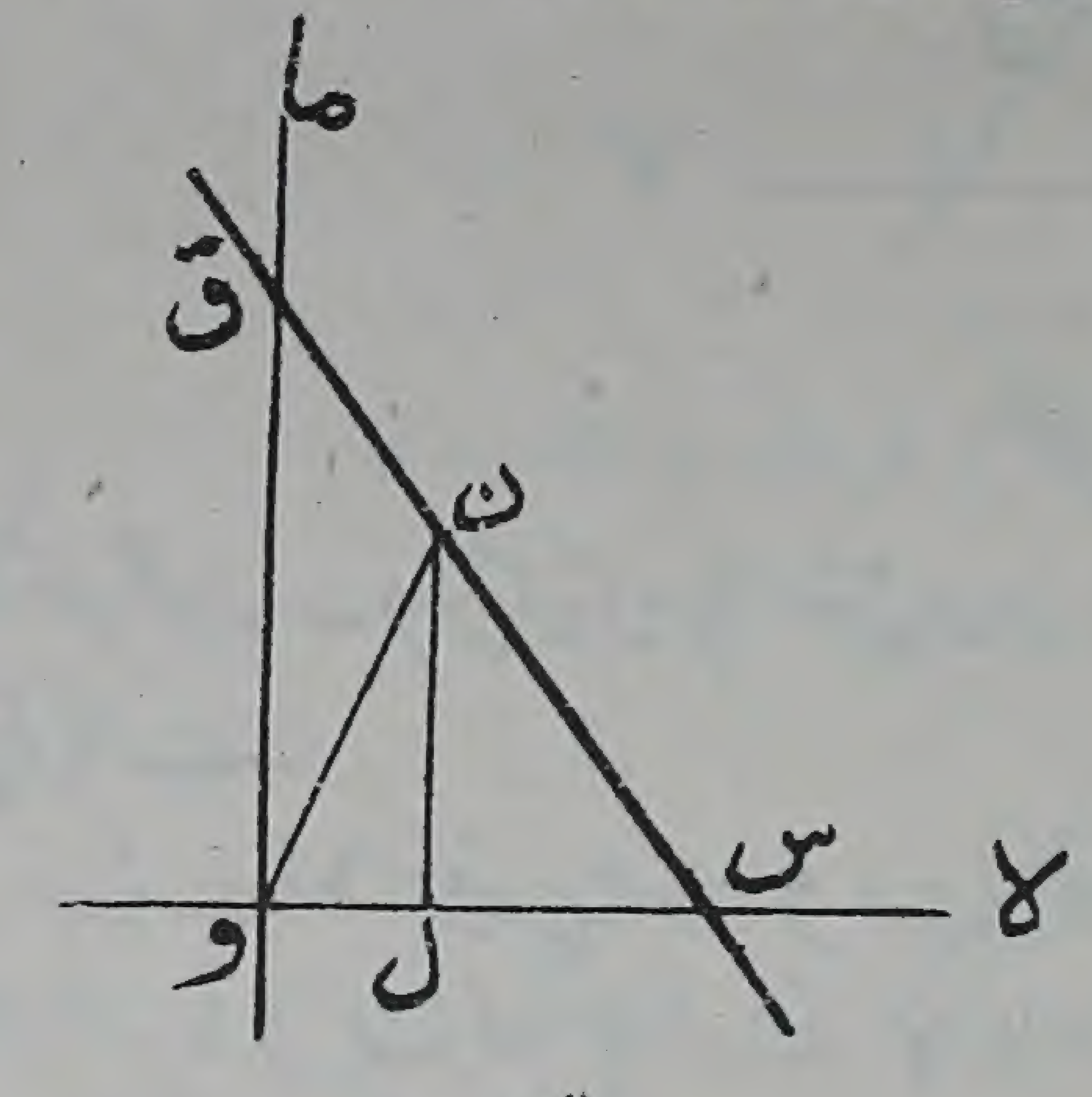
$$\frac{\text{ما} - ۷}{-۲\frac{۱}{۲} - ۷} = \frac{\text{لا} - (-۳)}{۱ - (-۳)}$$

یا

$$\frac{\text{ما} - ۷}{-\frac{۱۹}{۲}} = \frac{\text{لا} + ۳}{۴}$$

تحویل کے بعد ۱۹لا + ۸ما + ۱ = ۰

(د) خط مستقیم کی مساوات جبکہ محوروں پر اس کے مقطوعوں کے طول معلوم ہوں۔ یہ (ج) کی ایک خاص صورت ہے لیکن اس کے لئے ایک بلاواسطہ ثبوت ذیل میں مندرج ہے۔



شکل ۱۴

قائم محور۔ فرض کرو کہ محاور لا اور ما پر مقطوعات وس (= ا) اور وق (= ب) ہیں، نیز فرض کرو کہ خط پر کوئی اور نقطہ ن (لا، ما) ہے۔

نقطہ ن ذیل کی شرط ہندسی کو پورا کرتا ہے

△ وق ن + △ وس ن = △ وس ق

اس ربط کے مقابل جملہ جبریہ یہ ہے

$$\frac{۱}{۲}\,\text{ب لا} + \frac{۱}{۲}\,\text{ا ما} = \frac{۱}{۲}\,\text{ا ب}$$

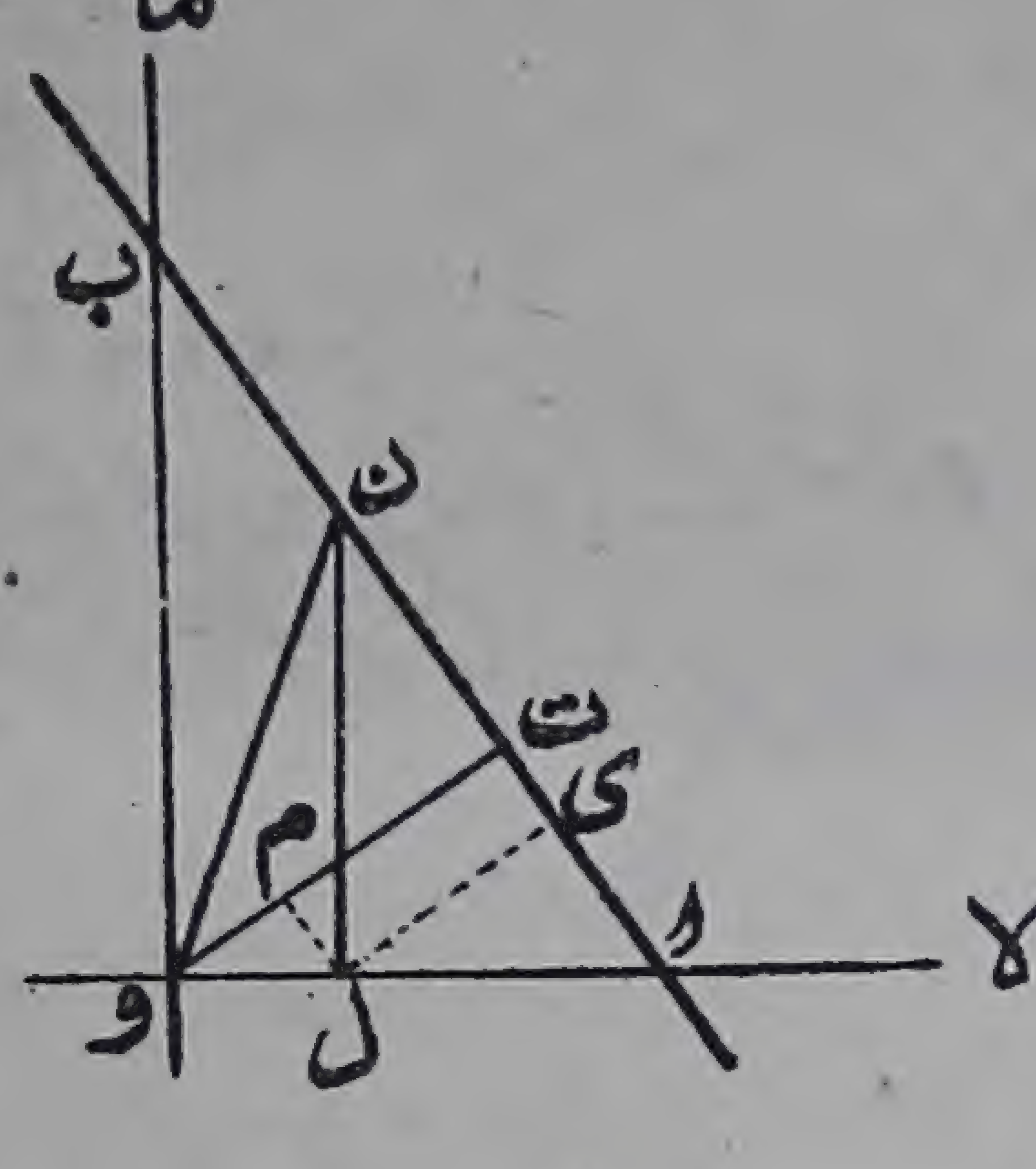
یا $$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱ \qquad (۱۹)$$

یہ مساوات مائل محوروں کے لئے بھی درست ہے، فرق صرف یہ ہے کہ جزوِ ضربی جب سہ ہر رقبہ میں شریک ہوتا ہے اور آخر میں طرفین سے خارج ہو جاتا ہے۔

(ع) **عمودی صورت**۔ مبدأ سے خط مستقیم پر عمود نکالا گیا ہے اس کا طول ع معلوم ہے نیز وہ زاویہ (عہ) معلوم ہے جو یہ عمود محور لا سے بناتا ہے۔

[عہ کو مخالف سمت ساعت ناپا گیا ہے]

جیسا اوپر قطبی محددوں میں بیان ہوا یہ یاد رہے کہ عمود ع لازماً مثبت ہے کیونکہ اگر یہ منفی ہو تو عہ سے وہ زاویہ تعبیر ہوگا جو عمود کی متقابل سمت (یعنی وہ سمت جو عمود کو مبدأ میں سے پچھلی طرف خارج کرنے سے حاصل ہوتی ہے) محور لا سے بناتی ہے۔



شکل ۱۵

قائم محور۔ فرض کرو کہ خط مستقیم محاور و لا اور و ما کو نقاط ا اور ب پر قطع کرتا ہے۔

مبدأ سے خط مستقیم پر عمود و ت نکالو۔

تب و ت = ع، ∠ لا و ت = عہ

نیز فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے۔

معین ن ل کھینچو اور و ت پر عمود ل م اور ا ب پر عمود ل ی نکالو۔

تب و ت = و م + ل ی = و ل جم ا و ت + ل ن جب ل ن ی

اب ∠ ل ن ی = ∠ و ب ت = ۹۰ − ∠ ب و ت = ∠ ا و ت

اس لئے متناظر جبریہ ربط یہ ہے

لا جم عہ + ما جب عہ = ع .... (۲۰)

مائل محور۔ اوپر کی شکل اور عمل کی رُو سے

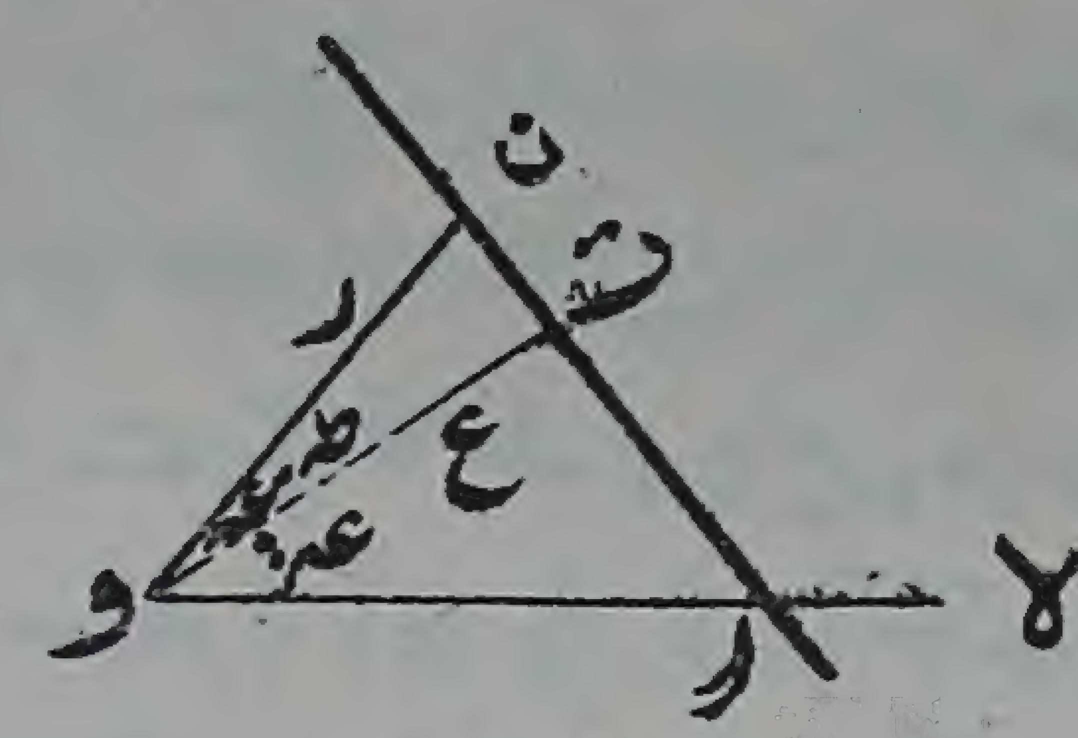
و ت = و ل جم ا و ت + ل ن جم ب و ت

اور اس مساوات کا متناظر جبریہ ربط یہ ہے

لا جم عہ + ما جم (سہ - عہ) = ع ....(۲۱)

(ف) خط مستقیم کی قطبی مساوات

(صورت عامہ)



شکل ۱۶

فرض کرو کہ قطب سے جو عمود و ت خط مستقیم پر نکالا جائے اس کا طول ع ہے اور بموجب سابق ت کے محدد (ع، عہ) ہیں۔

فرض کرو کہ خط مستقیم پر ایک اور نقطہ ن (ر، طہ) ہے۔

نقطہ ن ذیل کی ہندسی شرط پورا کرتا ہے۔

و ن جم ت و ن = و ت

اب ∠ ت و ن = ∠ ا و ن - ∠ ا و ت = طہ - عہ

اس لئے متناظر جبریہ ربط ہے ر جم (طہ - عہ) = ع ....(۲۲)

مشقیں

۳۱ - مساوات (۱۸) کو اس امر کی مدد سے ثابت کرو کہ △ ن ق، ق، کا رقبہ صفر ہوگا اگر ن خط ق، ق، پر واقع ہو۔

۳۲ - کارٹیزی صورت (۲۰) کو قطبی صورت (۲۲) سے مستنبط کرو اور برعکس اس کے۔

(گ) ایک ایسے خط کی قطبی مساوات جو دو نقاط معلومہ میں سے گذرے۔

فرض کرو کہ ا (ر، طہ) اور ب (ر، طہ) دو نقاط معلومہ ہیں اور خط ا ب پر کوئی اور نقطہ ن (ر، طہ) ہے۔

نقطہ ن اس ہندسی ربط کو پورا کرتا ہے کہ مثلث ا ب ن کا رقبہ صفر کے برابر ہے، اس لئے بموجب دفعہ ۸ خط مستقیم کی مساواتِ مطلوبہ ہے

ر، ر، جب (طہ، - طہ،) + ر، ر جب (طہ - طہ،) + ر ر، جب (طہ، - طہ) = ۰

یا $\frac{۱}{ر_۱}$ جب (ط۳ − ط۲) + $\frac{۱}{ر_۲}$ جب (ط۱ − ط۳) + $\frac{۱}{ر_۳}$ جب (ط۲ − ط۱) = ۰ ...... (۲۳)

مشقیں

۳۳ — دو خطوط نقطہ (۰، ۲) میں سے گذرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ زاویے $\frac{\pi}{۳}$ اور $\frac{۲\pi}{۳}$ بناتے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

نیز اُن خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو اوپر کے خطوط کے متوازی ہوں اور محور ما کو مبدأ سے نیچے فاصلہ ۲ پر ملیں۔ ان خطوط کے نقاط تقاطع محور لا کے ساتھ دریافت کرو۔

۳۴ — خطوط ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ۳ اور ما = $\sqrt{۳}$ لا + ۳ کے میلان محور لا سے دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ خط ما = لا + ۳ ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۳۵ — ثابت کرو کہ نقاط (−۱، ۳)، (۳، ۲)، (۱۱، ۰) ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۶ — اگر و ما کے متوازی کوئی معین کھینچا جائے جو خطوطِ مستقیم ما = م لا اور ما = م لا + ب کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ اس کا جو حصہ ان دو خطوط کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کا طول مستقل ہے۔

۳۷ — ایک دائرہ کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر $\sqrt{۲}$، اس کا ایک قطر محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور اس کے دونوں سروں پر دو مماس کھینچے گئے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

۳۸ — ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقاط (۵، ۳) اور (۴، ۴) کے ملانے والے خط کی تنصیف کرے اور محور لا سے زاویہ ۴۵° بنائے۔

۳۹ — ایک مثلث کے راس (۰، ۰)، (۲، ۴) اور (−۶، ۴) ہیں، اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

۴۰ — ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقطہ (۲، ۲) میں سے گذرے اور محاور پر اس کے مقطوعات کا مجموعہ = ۹

۴۱ — ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقطہ ق (۲، ۳) میں سے گذرے اور محور لا سے زاویہ ۴۵° بنائے، نیز جہاں یہ خط مستقیم لا + ما + ۱ = ۰ کو قطع

کرتا ہے اس نقطہ تقاطع اور نقطہ ق کے درمیانی حصہ کا طول دریافت کرو۔

۲۴ ۔ دریافت کرو کہ نقاط (۶، ۴)، (-۱، -۷) کے ملانے والے خط کو خط ما + ۴ لا = ۰ کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔

۳۴ ۔ اگر سہ = ۴۵° تو ثابت کرو کہ خط ما = لا محور و لا سے زاویہ $\frac{1}{2}$ ۲۲° بناتا ہے اور بالعموم ضابطہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ ما = لا محور و لا سے زاویہ $\frac{1}{2}$ سہ بناتا ہے۔

۴۴ ۔ اگر مس سہ = $\frac{۴}{۳}$ (جہاں سہ < $\frac{\pi}{۲}$) تو جو زاویہ خط ما = ۵ لا محور و لا سے بناتا ہے اس کو دریافت کرو۔

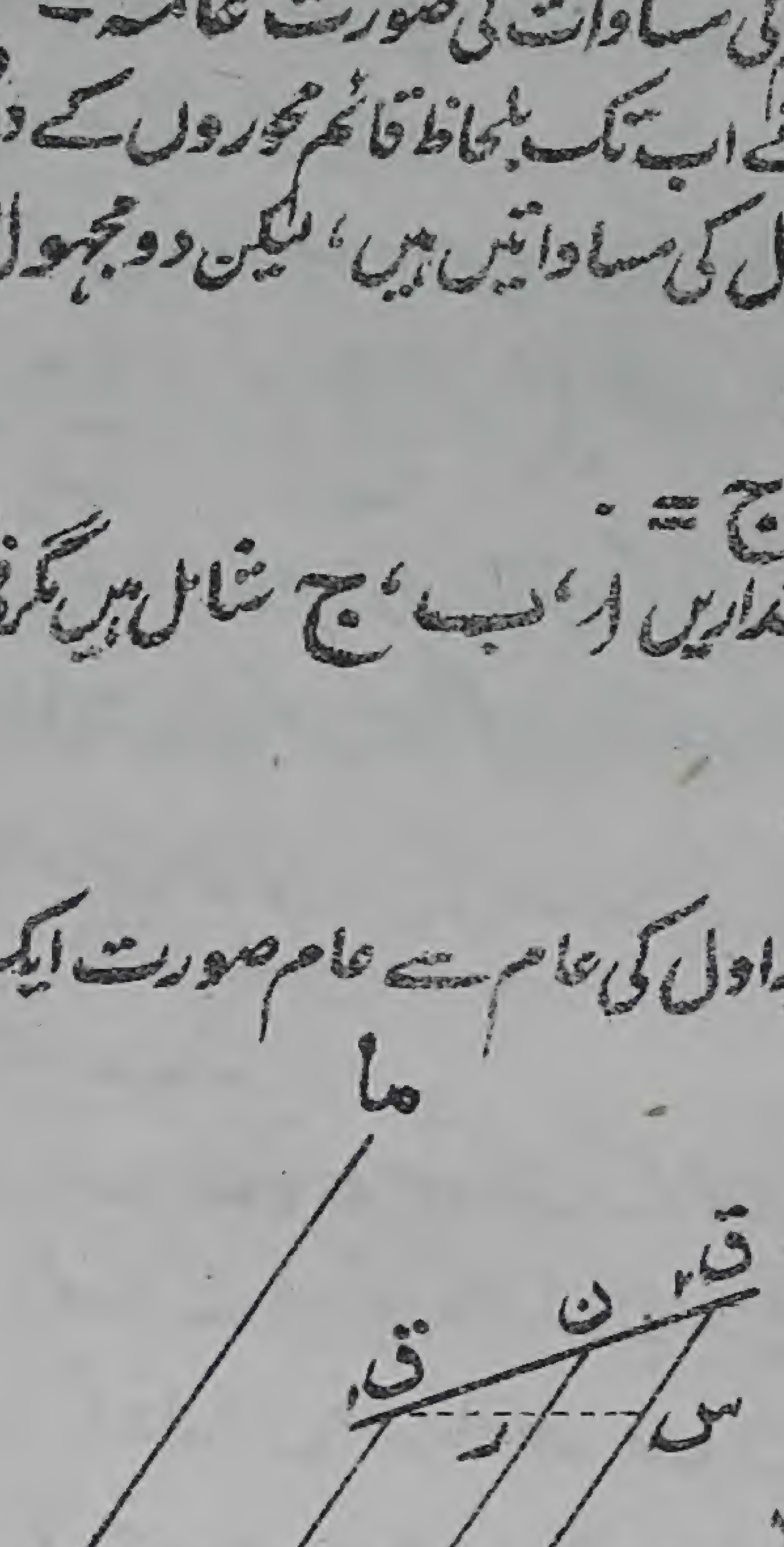
۱۱ ۔ کارٹیزی محددوں کے لحاظ سے خط مستقیم کی مساوات کی صورت عامہ۔

خط مستقیم کی مساوات کی جتنی صورتیں ہم نے اب تک بلحاظ قائم محوروں کے دریافت کی ہیں وہ سب کی سب بلحاظ لا، ما کے درجہ اول کی مساواتیں ہیں، لیکن دو مجہول مقداروں کی مساوات درجہ اول کی عام سے عام صورت

$$ا لا + ب ما + ج = ۰$$

ہے، اگرچہ بظاہر اس مساوات میں تین مستقل مقداریں ا، ب، ج شامل ہیں مگر فی الحقیقت یہ دو ہیں یعنی نسبتیں $\frac{ا}{ج}$ اور $\frac{ب}{ج}$ ۔

۱۲ ۔ ثابت کرو کہ لا، ما کی مساوات درجہ اول کی عام سے عام صورت ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔



شکل ۱۷

فرض کرو کہ کوئی دو نقاط معینہ ق۱ (لا۱، ما۱)، ق۲ (لا۲، ما۲) خط مستقیم پر ہیں اور ایک تیسرا نقطہ ن (لا، ما) بھی طریق مساوات ا لا + ب ما + ج پر واقع ہے۔

معین ق۱ ل۱، ق۲ ل۲، ن ل کھینچو اور و لا کے متوازی ق۱ ر س اس طرح کھینچو کہ وہ ن ل سے ر پر اور ق۲ ل۲ سے س پر ملے، اب چونکہ ان تینوں نقطوں سے محدد طریق کی مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس لئے

ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰ .... (۱)

ا لا۲ + ب ما۲ + ج = ۰ .... (۲)

ا لا۳ + ب ما۳ + ج = ۰ .... (۳)

مساواتوں (۱) اور (۲) سے ا (لا۲ - لا۱) + ب (ما۲ - ما۱) = ۰

" (۱) اور (۳) سے ا (لا۳ - لا۱) + ب (ما۳ - ما۱) = ۰

اس لئے (لا۳ - لا۱)/(لا۲ - لا۱) = (ما۳ - ما۱)/(ما۲ - ما۱) یعنی (ق۱ ر)/(ق۱ س) = (ر ن)/(س ق۲)

اس لئے ثابت ہوا کہ نقطہ ن خط ق۱ ق۲ پر واقع ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

متبادل ثبوت - درجہ اول کی مساوات عامہ اس طرح لکھی جا سکتی ہے

ما = - (ا لا)/ب - ج/ب جس کی شکل مساوات ما = م لا + ب کی ہے، ہم ثابت کر چکے ہیں کہ شرائط مساوات آخر الذکر ایک ایسے خط مستقیم کے ہر نقطہ کے محددوں سے پوری ہوتی ہیں جو محور ما کو مبدأ سے فاصلہ ب پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے زاویہ مس⁻¹ م (قائم محوروں کی صورت میں) اور مس⁻¹ (م جب سہ)/(۱ + م جم سہ) (مائل محوروں کی صورت میں) بناتا ہے۔

نیز اس مساوات کو کسی اور نقطہ کے محدد پورا نہیں کر سکتے، کیونکہ فرض کرو کہ ایک نقطہ ق خط مذکورہ کے باہر کچھ فاصلہ اوپر واقع ہے اور اس کے محدد (لا۱، ما۱) ہیں۔

نیز فرض کرو کہ اس خط پر نقطہ ت ایسا ہے جس کا فصلہ (لا۱) وہی ہے جو ق کا اور جس کا معین ماَ۱ ہے۔

تب ماَ۱ = م لا۱ + ب چونکہ (لا۱، ماَ۱) اس خط پر واقع ہے۔

لیکن ماَ۱ > ما۱ چونکہ ق نقطہ ن کے اوپر واقع ہے

∴ ماَ۱ > م لا۱ + ب

اسی طرح سے اگر ق خط مذکور کے نیچے واقع ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ما}_1 > \text{م لا}_1 + \text{ب}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مساوات ما = م لا + ب کو ہر ایک ایسا نقطہ جو ایک خاص خط مستقیم پر واقع ہو پورا کرتا ہے لیکن اور کوئی نقطہ پورا نہیں کرسکتا، اس لئے ما = م لا + ب ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

۱۳۔ دفعہ آخر کے استدلال سے ظاہر ہے کہ نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ ایک خط مستقیم ما = م لا + ب کے ایک جانب یا متقابل جانبوں میں واقع ہونگے اگر جملات $(\text{ما}_1 - \text{م لا}_1 - \text{ب})$ اور $(\text{ما}_2 - \text{م لا}_2 - \text{ب})$ کی علامات بالترتیب موافق یا مختلف ہوں اور چونکہ مساوات عامہ ا لا + ب ما + ج = ۰ مساوات ما = م لا + ب کو ایک مستقل مقدار میں ضرب دینے اور صورت مذکورہ میں تحویل کرنے سے حاصل ہوتی ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ خط مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰ کے ایک جانب یا متقابل جانبوں میں واقع ہوں گے اگر جملات

$$\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج} \quad \text{اور} \quad \text{ا لا}_2 + \text{ب ما}_2 + \text{ج}$$

کی علامات بالترتیب موافق یا مختلف ہوں، یاد رہے کہ جملات مندرجہ بالا خط مستقیم کی مساوات میں محدد $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ مندرج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۴۔ مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ذیل کی صورتوں میں لکھی جاسکتی ہے

$$\text{ما} = -\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\text{لا} - \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}}{-\frac{\text{ج}}{\text{ا}}} + \frac{\text{ما}}{-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}} = 1$$

جن کا مقابلہ مساوات کی حسب ذیل صورتوں

$$\text{ما} = \text{م لا} + \text{ب} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$$

سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم کی مساوات عامہ ا لا + ب ما + ج = ۰ کا میلان محور لا سے $\text{مس}^{-1}\left(-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)$ ہے اگر محور قائم ہوں اور $\text{مس}^{-1}\left(\frac{-\text{ا جیب سہ}}{\text{ب} - \text{ا جم سہ}}\right)$ ہے اگر محور مائل ہوں، نیز ظاہر ہے کہ محاور لا اور ما پر مقطوعات $-\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ اور $-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ ہیں۔

۱۵ — مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کو عمودی صورت لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں (جہاں محور قائم ہیں) تحویل کرتے وقت احتیاط سے کام لینا چاہئیے، چونکہ مساوات محولہ میں لا اور ما کے سروں کے مربعوں کا مجموعہ لازماً ایک کے برابر ہونا چاہئیے، اس لئے سب سے پہلے ہمیں مساوات کی کل ارقام کو $\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}$ پر تقسیم کرنا چاہئیے، اس تحویل کے بعد مساوات ہوگی

$$-\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا} - \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} \quad \ldots\ldots (1)$$

ہم جانتے ہیں کہ ع لازماً مثبت ہے [دفعہ ۱۰ (ع)] اس لئے معلوم ہوا کہ اگر ج مثبت ہو تو (۱) تحویل شدہ مساوات کی صحیح صورت ہے اور اگر ج منفی ہو تو مساوات (۱) جس میں جملہ ارقام کی علامات بدل دی جائیں مساوات مطلوبہ کی صحیح صورت ہوگی۔

مبدأ سے خط مستقیم پر کے عمود کا طول $\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ ہوگا اگر ج مثبت ہو اور $\frac{-\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ اگر ج منفی ہو۔

مائل محوروں کی صورت میں اگر مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کا مقابلہ لا جم عہ + ما جم (سہ − عہ) = ع سے کیا جائے تو

$$-\text{ع} \times \frac{\text{ا}}{\text{ج}} = \text{جم عہ}$$

$$-\text{ع} \times \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \text{جم}\,(\text{سہ} - \text{عہ}) = \text{جم سہ جم عہ} + \text{جب سہ جب عہ}$$

$$\therefore -\text{ع} \times \frac{\text{ب}}{\text{ج}} + \text{ع}\,\frac{\text{ا جم سہ}}{\text{ج}} = \text{جب سہ جب عہ}$$

اور $-\text{ع}\,\frac{\text{ا جب سہ}}{\text{ج}} = \text{جب سہ جم عہ}$

مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{ج}^2}\left\{(\text{ا جم سہ} - \text{ا})^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{سہ}\right\} = \text{جب}^2\,\text{سہ}$$

$$\therefore\ \text{ع} = \pm\frac{\text{ج جب سہ}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2-2\,\text{اب جم سہ}}}$$

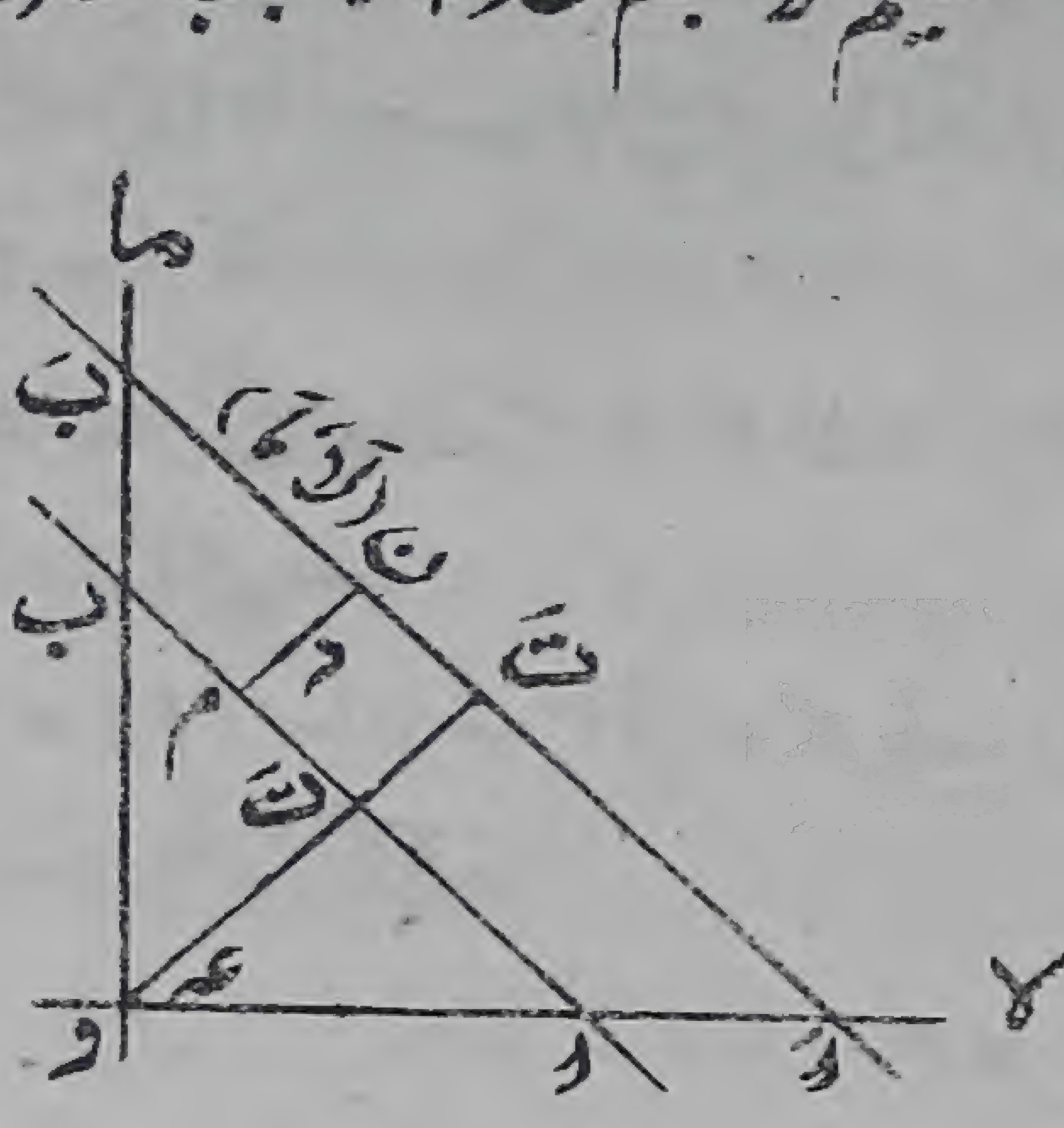
اور مساوات کی تحویل شدہ صورت اگر ج مثبت ہو

$$-\frac{\text{ب جب سہ}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2-2\,\text{اب جم سہ}}}\,\text{لا} - \frac{\text{ا جب سہ}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2-2\,\text{اب جم سہ}}}\,\text{ما}$$

$$= \frac{\text{ج جب سہ}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2-2\,\text{اب جم سہ}}} \quad \ldots\ldots\ (۲)$$

ہوگی لیکن اگر ج منفی ہو تو اس مساوات میں سب ارقام کی علامتیں بدل دینے کے بعد مساوات مطلوبہ حاصل ہوگی۔

۱۶۔ نقطہ (لاَ، ماَ) کا عمودی فاصلہ خط مستقیم لا جم عہ + ما جب عہ = ع سے دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔



شکل ۱۸

فرض کرو کہ اب خط مستقیم ہے اور ن نقطہ (لاَ، ماَ) ہے، فرض کرو کہ عمود ن م کا طول د ہے جہاں ہم نے فرض کرلیا ہے کہ نقطہ ن اور مبدأ و خط اب کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

نقطہ ن میں سے اب کے متوازی اَن بَ کھینچو اور نقطہ و سے خطوط اب اور اَبَ پر مشترک عمود وت تَ نکالو۔ وت = ع اور زاویہ لا و ت = عہ [دفعہ ۱۰ (ع)] اب چونکہ نقطہ و سے خط اَبَ پر عمود وتَ ہے اور وہ و لا سے زاویہ عہ بناتا ہے

اس لئے خط اَب کی مساوات ہے
لاَ جم عہ + ماجب عہ = وتَ = ع + د [دفعہ ۱۰ (ع)]
نیزن (لاَ، مَا) کے محدد اَب کی مساوات کو پورا کرتے ہیں
∴ لاَ جم عہ + مَاجب عہ = ع + د
∴ د = لاَ جم عہ + مَا جب عہ - ع ....(۴۴)
اس لئے معلوم ہوا کہ اگر جملہ لا جم عہ + ما جب عہ - ع میں نقطہ ن کے محدد مندرج کردئے جائیں تو ماحصل عمود کا طول مطلوب ہوگا۔
اگر اس کی تصدیق ہندسیہ منظور ہو تو ن کا معین ن ل کھینچو اور وتَ پر عمود ل ی نکالو اس سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۴۴) کو ہندسی طریق پر اس طرح بیان کر سکتے ہیں
م ن = وی + ی تَ - وتَ

مشقیں

۴۵ - دریافت کرو کہ نقاط (۱،۱) اور (۲،۲) خط لا - ۳ ما + ۵ = ۰ کے ایک ہی جانب واقع ہیں یا مقابل جانبوں میں۔
۴۶ - ثابت کرو کہ مبدأ اور نقاط (۱،۱)، (۰، $\frac{۵}{۸}$)، ($\frac{۹}{۴}$ ، -۳) ان چار مختلف خانوں میں واقع ہیں جو خطوط ۳ لا + ۲ ما = ۱ اور ۵ لا + ۳ ما = ۲ کے تقاطع سے پیدا ہوتے ہیں۔
۴۷ - (۱) مساوات ۳ لا + ۴ ما - ۱۰ = ۰ کو قائم محوروں کے لحاظ سے عمودی صورت میں تحویل کرو۔
(۲) مساوات لا + ما + ۴ = ۰ کو عمودی صورت میں تحویل کرو، محوروں کا باہمی میلان ۶۰° ہے۔
۴۸ - ثابت کرو کہ مائل محوروں کی صورت میں اگر نقطہ (لاَ، مَا) سے عمود خط لا جم عہ + ما جم (سہ - عہ) = ع پر نکالا جائے تو اس کا طول لاَ جم عہ + مَا جم (سہ - عہ) - ع ہوگا۔
۱۷ - مساوات عامہ ا لا + ب ما + ج = ۰ کو عمودی صورت میں تحویل کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر نقطہ (لاَ، مَا) سے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود نکالا جائے

تو اس کا طول (بغیر لحاظ علامت) قائم محوروں کی صورت میں

$$\frac{\text{ا لاَ + ب ماَ + ج}}{\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۵)$$

ہوگا اور مائل محوروں کی صورت میں

$$\frac{\text{ا لاَ + ب ماَ + ج}}{\sqrt{(\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} - ۲\ \text{ا ب جم سہ})}}\ \text{جب سہ} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۶)$$

ہوگا۔

۱۸۔ اب تک ہم نے عمود کے طول کے متعلق بحث کی ہے، اب ہم اس کی علامت پر غور کریں گے، ظاہر ہے کہ عمود کی علامت نقطہ مذکورہ کے محددوں (لاَ، ماَ) کو جملہ ا لا + ب ما + ج میں مندرج کرنے سے معلوم نہیں ہوسکتی کیونکہ خط کی مساوات ذیل کی کسی ایک صورت میں لکھی جاسکتی ہے ا لا + ب ما + ج = ۰ یا ۔ا لا ۔ب ما ۔ج = ۰ اب چونکہ نقطہ کے محدد مندرج کرنے سے عمود کی مطلق علامت معلوم نہیں ہوسکتی اس لئے اس کی سمت کا تعیّن یہ دیکھنے سے ہوسکتا ہے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) خط مستقیم کے کس جانب واقع ہے، پس اس غرض سے ہم یہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ نقطہ (لاَ، ماَ) خط مستقیم کے اسی جانب واقع ہے جس جانب کہ مبدأ یا اس کی متقابل جانب میں اور یہ بآسانی معلوم ہوسکتا ہے کیونکہ نقطہ (لاَ، ماَ) اور مبدأ کے محددوں کو جملہ ا لا + ب ما + ج میں بالترتیب مندرج کرنے سے اگر ہم دیکھیں کہ ماحصل کی علامت ہر صورت میں ایک ہی ہے تو ظاہر ہے کہ دونوں نقطے (لاَ، ماَ) اور مبدأ خط مستقیم کے ایک ہی جانب واقع ہیں اور اگر یہ علامتیں مختلف ہوں تو یہ نقطے متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

مثال۔ نقطہ (ا، ب) کا عمودی فاصلہ خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ سے دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

$$\text{مطلوبہ فاصلہ} = \text{د} = \frac{\frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} - ۱}{\sqrt{\frac{۱}{\text{ا}^{2}} + \frac{۱}{\text{ب}^{2}}}} = \frac{۲ - ۱}{\sqrt{\frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}}}} = \frac{\text{ا ب}}{\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}}$$

۱۹ — دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم ہیں، ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

قائم محور — فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں $\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1$ اور $\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2$ ہیں اور محور لا کے ساتھ ان کے میلان بالترتیب طہ_1، طہ_2 ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ فہ ہے۔

تب $\text{فہ} = \text{طہ}_1 - \text{طہ}_2$، $\text{مس}\,\text{طہ}_1 = \text{م}_1$، $\text{مس}\,\text{طہ}_2 = \text{م}_2$

$$\therefore \text{مس}\,\text{فہ} = \frac{\text{مس}\,\text{طہ}_1 - \text{مس}\,\text{طہ}_2}{1 + \text{مس}\,\text{طہ}_1\,\text{مس}\,\text{طہ}_2}$$

$$\therefore \text{مس}\,\text{فہ} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\text{م}_2} \quad \ldots\ldots (27)$$

[ملاحظہ ہو کہ اوپر کے عمل میں اگر ہم خطوط کی ترتیب الٹ دیں تو مس فہ کی قیمت تو وہی ہوگی مگر اس کی علامت بدل جائے گی یعنی اس صورت میں ہمیں فہ کے تکملہ کا مماس حاصل ہوگا]

مائل محور — اس صورت میں

$$\text{مس}\,\text{طہ}_1 = \frac{\text{م}_1\,\text{جب}\,\text{سہ}}{1 + \text{م}_1\,\text{جم}\,\text{سہ}}،\quad \text{مس}\,\text{طہ}_2 = \frac{\text{م}_2\,\text{جب}\,\text{سہ}}{1 + \text{م}_2\,\text{جم}\,\text{سہ}}$$

جس سے

$$\text{مس}\,\text{فہ} = \frac{(\text{م}_1 - \text{م}_2)\,\text{جب}\,\text{سہ}}{1 + (\text{م}_1 + \text{م}_2)\,\text{جم}\,\text{سہ} + \text{م}_1\text{م}_2} \quad \ldots\ldots (28)$$

مشق ۹ — خط مستقیم کی مساوات عامہ کو "مماسی" صورت $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ب}$ میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ خطوط مستقیم

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$$

کا درمیانی زاویہ قائم محوروں کی صورت میں $\text{مس}^{-1}\dfrac{\text{ا}_2\text{ب}_1 - \text{ا}_1\text{ب}_2}{\text{ا}_1\text{ا}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2}$ ہے اور

مائل محوروں کی صورت میں $\text{مس}^{-1}\dfrac{(\text{ا}_2\text{ب}_1 - \text{ا}_1\text{ب}_2)\,\text{جب}\,\text{سہ}}{\text{ا}_1\text{ا}_2 - (\text{ا}_1\text{ب}_2 + \text{ا}_2\text{ب}_1)\,\text{جم}\,\text{سہ} + \text{ب}_1\text{ب}_2}$ ہے

اس مثال کے آخری دو نتائج کو یاد رکھنا ضروری نہیں، مثالیں حل کرنے میں سب سے اول مساوات معلومہ کو مماسی صورت میں لے آنا چاہئیے۔ اس کے بعد حسب ضرورت ضوابط (۲۷) اور (۲۸) کی مدد سے حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے

لیکن ان دو نتائج کو یاد رکھنا ضروری ہے۔

(ا) خطوط کے باہم متوازی ہونے کی شرط ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں (مس فہ = ۰)

$$\text{م}_1 = \text{م}_2 \ \text{یا} \ \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۹)$$

(ب) ایک دوسرے پر عمود ہونے کی شرط (مس فہ = ∞) قائم محوروں کی صورت میں

$$\text{م}_1\,\text{م}_2 = -1 \ \text{یا} \ \text{ا}_1\,\text{ا}_2 = -\,\text{ب}_1\,\text{ب}_2 \quad \ldots\ldots\ldots (۳۰)$$

پس معلوم ہوا کہ ایسے خط مستقیم کی مساوات جو خط ا لا + ب ما + ج = ۰ کے متوازی ہو صرف مستقل رقم کے مناسب تغیر سے حاصل ہو سکتی ہے (کیونکہ حسب بالا متوازی خطوط کے لئے نسبت ا : ب وہی رہتی ہے) اس سلسلہ کے کسی خاص خط کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے کہ متوازی ہونے کی شرط کے علاوہ ایک اور شرط دی گئی ہو جس کو استعمال کرنے سے ہم مساوات کی رقم مستقل معلوم کر سکیں۔

نیز اگر قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا مقصود ہو جو ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ہو تو ہمیں لا، ما کے سروں کو آپس میں بدلکر ان میں سے ایک کی علامت تبدیل کر دینی چاہئیے، رقم مستقل کسی دوسری شرط کی مدد سے حسب سابق معلوم ہو سکتی ہے۔

مشقیں

[۵۰ سے ۶۰ تک قائم محوروں کے لئے ہیں]

۵۰۔ نقطہ (ب، ا) کا عمودی فاصلہ خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 2$ سے دریافت کرو۔

۵۱ - ثابت کرو کہ مبدأ کے عمودی فاصلے تین خطوطِ مستقیم
۴ لا + ۳ ما + ۱۰ = ۰، ۵ لا − ۱۲ ما + ۲۶ = ۰، ۷ لا + ۲۴ ما = ۵۰
سے مساوی ہیں -

۵۲ - ایک مثلث کے اضلاع ۳ لا + ما = ۷، ۳ ما − لا = ۱، اور ۷ ما + لا + ۱۱ = ۰
ہیں، اس کے راسوں کے محدد دریافت کرو، نیز ان راسوں سے مقابل کے اضلاع
پر جو عمود نکالے جا سکتے ہیں اُن کے طول دریافت کرو -

۵۳ - خطوطِ مستقیم ما − √۳ لا − ۵ = ۰ اور √۳ ما − لا + ۶ = ۰
کا درمیانی زاویہ دریافت کرو -

۵۴ - خطوطِ مستقیم ۲ لا − ما + ۱ = ۰ اور ۱۱ لا + (۸ + ۵√۳) ما + ۵√۳ = ۰
کا درمیانی زاویہ دریافت کرو -

۵۵ - خطوطِ مستقیم ما = م لا + ب اور (م − ۱) لا − (م + ۱) ما = (م² − ۱) ب
کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اُسے دریافت کرو -

۵۶ - اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں دریافت کرو جو نقطہ (−۱، −۳) میں سے
گذریں اور خط لا + ۷ ما = ۲ کے بالترتیب متوازی اور عمود ہوں -

۵۷ - ایک ایسے خطِ مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو مبدأ میں سے گذرے
اور نقاط (۳، −۶) اور (۴، ۵) کے ملانے والے خط پر عمود ہو -

۵۸ - جو خطوط مبدأ میں سے گذرتے ہیں اور خط لا + ما √۳ + ۲√۳ = ۰
سے ۶۰° کے زاویے بناتے ہیں اُن کی مساواتیں معلوم کرو -
نیز ان نقاط کے محدد دریافت کرو جہاں یہ خط مذکور سے ملتے ہیں

۵۹ - محور لا پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو جس کا عمودی فاصلہ خط ۳ لا + ۴ ما = ۱۲
سے ۴ ہو اور جو خط مذکور کے اُس طرف واقع ہو جس طرف کہ مبدأ واقع نہیں ہوتا -

۶۰ - نقطہ (ھ، ک) سے خط ما = م لا + ب پر عمود نکالا گیا ہے، اس کے
پائیں کے محدد دریافت کرو -

۶۱ - ایسی شرط معلوم کرو کہ خطوط ۲ لا + ۳ ما = ۴، ۳ لا − ک ما = ۲ باہم
متوازی ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ ۳۰° ہو -

۶۲- اگر ۳ لا + ۴ ما = ۵ اور ۴ لا + ک ما = ۳ ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ک کی قیمت دریافت کرو، محوروں کا درمیانی زاویہ سن$^{-۱}$ $\frac{۵}{۱۲}$ ہے۔

۶۳- خطوط ما = لا $\sqrt{۳}$ + ۵ اور ما = $\frac{۱}{۳}$ لا $\sqrt{۳}$ + ۲ کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

۶۴- خطوط مستقیم ۲ لا - ما + ۷ = ۰ اور ۳ لا + ۶ ما - ۸ = ۰ کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم ہیں۔

۲۰- دو خطوط مستقیم کے نقطۂ تقاطع کے محدد۔

ہم جانتے ہیں (دفعہ ۹) کہ خطوط مستقیم $ا_۱$ لا + $ب_۱$ ما + $ج_۱$ = ۰ اور $ا_۲$ لا + $ب_۲$ ما + $ج_۲$ = ۰ کے نقطۂ تقاطع کے محدد ان دونوں مساواتوں کو ایک ساتھ حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، پس مذکورہ محدد ہیں

$$\frac{ب_۱ ج_۲ - ب_۲ ج_۱}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱} ، \frac{ج_۱ ا_۲ - ج_۲ ا_۱}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱}$$

۲۱- تین خطوط مستقیم کے ایک ہی نقطہ میں سے گذرنے کی شرط۔

فرض کرو کہ تین خطوط مستقیم حسب ذیل ہیں

$ا_۱$ لا + $ب_۱$ ما + $ج_۱$ = ۰ ...... (۱)

$ا_۲$ لا + $ب_۲$ ما + $ج_۲$ = ۰ ...... (۲)

$ا_۳$ لا + $ب_۳$ ما + $ج_۳$ = ۰ ...... (۳)

ان کے متراکز یا ایک ہی نقطہ میں سے گذرنے کی شرط یہ ہے کہ (۱) اور (۲) کے نقطۂ تقاطع کے محدد مساوات (۳) کو پورا کریں یعنی

$ا_۳$($ب_۱ ج_۲ - ب_۲ ج_۱$) + $ب_۳$($ج_۱ ا_۲ - ج_۲ ا_۱$) + $ج_۳$($ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱$) = ۰ .... (۱)

طالب علم دفعہ ہذا اور گذشتہ کے نتائج کو حفظ یاد رکھنے کی کوشش نہ کرے، صرف ان کے اصول کا سمجھنا اور یاد رکھنا کافی ہے۔

جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے اُسے مساوات (۱) کا بغور ملاحظہ کرنا چاہیے۔ خطوط کے متراکز ہونے کی یہ شرط ہے کہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کا مجہول مقادیر لا، ما میں ایک مشترک حل ہو، لا اور ما کو ساقط کرنے سے

یہ شرط حاصل ہوگی

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = ۰$$

مساوات مندرجہ بالا (۱) صرف اس شرط کی تفصیلی صورت ہے۔

مشق

۶۵- خطوط ۴ لا + ۳ ما = ۱۰ اور ۳ لا + ۵ ما = ۱۳ کے نقطۂ تقاطع کے محدد دریافت کرو۔

۶۶- ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات جو دو مفروضہ خطوط مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرے۔

مساوات ذیل پر غور کرو۔

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 + ک (ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2) = ۰ \quad ......(۳۱)$$

یہ مساوات ک کی تمام قیمتوں کے لئے ایک ایسے خط کو تعبیر کرتی ہے جو $ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 = ۰$ اور $ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 = ۰$ کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے، کیونکہ (۳۱) بلحاظ لا، ما کے مساوات درجہ اول ہے، اس لئے ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، نیز چونکہ $ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 = ۰$ اور $ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 = ۰$ کے نقطۂ تقاطع کے محدد ہر دو خطوط کی مساواتوں کو پورا کرتے ہیں اس لئے وہ (۳۱) کو بھی پورا کریں گے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ مساوات مذکورہ ایک ایسے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ان خطوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

اگر ک کی قیمت کا مناسب انتخاب کیا جائے تو جو خط مستقیم مساوات (۳۱) سے تعبیر ہوتا ہے وہ ایک اور شرط معینہ کو بھی پورا کرسکتا ہے۔

مثال۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو محور ما کے متوازی ہو اور خطوط لا - ۷ ما + ۵ = ۰ اور ۳ لا + ما - ۷ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں

سے گذرے۔
ان خطوط کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات ہوگی

لا − ۷ ما + ۵ + ک (۳ لا + ما − ۷) = ۰

یا (۱ + ۳ ک) لا + (ک − ۷) ما + ۵ − ۷ ک = ۰

اگر یہ خط محور ما کے متوازی ہو تو ما کا سر صفر ہونا چاہیئے، پس ک = ۷

اور مساوات مطلوبہ ہے لا − ۲ = ۰

مشقیں

۱۔ ایک ایسے خط کی مساوات دریافت کرو جو خطوط
لا − ۷ ما + ۵ = ۰ اور ۳ لا + ما − ۷ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے
اور محور لا کے متوازی ہو۔

۲۔ خطوط لا − ۷ ما + ۵ = ۰ اور ۳ لا + ما − ۷ = ۰ کے نقطہ تقاطع کے
محدد دریافت کرنے سے اوپر کے دو سوالات کے نتائج کی تصدیق کرو۔

۲۳۔ دفعہ ماقبل کے استدلال کی بناء پر ہم تین خطوط کے متراکز ہونے کی
شرط کو ایسی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں جو بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔ اگر ہم
تین ایسے مستقلات ل، م، ن معلوم کر سکیں کہ جملہ

ل (ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱) + م (ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) + ن (ا۳ لا + ب۳ ما + ج۳) = ۰ .... (۳۲)

مطابقاً صفر ہو [یعنی لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہو جس کے لئے ضروری
ہے کہ لا کا سر، ما کا سر اور جملہ (۳) میں مقدار مستقل تینوں میں سے ہر ایک الگ
الگ صفر ہو جب ل، م، ن کو مناسب قیمتیں دی جائیں] تو یہ تینوں خط
متراکز ہوں گے۔

کیونکہ فرض کرو کہ پہلے دو خط نقطہ (لاَ، ماَ) پر قطع کرتے ہیں

تب ا۱ لاَ + ب۱ ماَ + ج۱ = ۰

اور ا۲ لاَ + ب۲ ماَ + ج۲ = ۰

لیکن ل (ا۱ لاَ + ب۱ ماَ + ج۱) + م (ا۲ لاَ + ب۲ ماَ + ج۲)

+ ن (ا۳ لاَ + ب۳ ماَ + ج۳) = ۰

کیونکہ جملہ (۳۲) متغیرات لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہے۔
اس لئے ا۳ لاَ + ب۳ ماَ + ج۳ = ۰
پس نقطہ (لاَ، ماَ) تیسرے خط پر بھی واقع ہے، یعنی ثابت ہوا کہ تینوں خطوط ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

اس ترکیب میں خاص سہولت یہ ہے کہ بعض مرتبہ فقط دیکھنے سے ہی ہم ل، م، ن کی قیمتیں متعین کر سکتے ہیں، اس کی سبب سے سہل صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے جب کہ تین خطوط کی مساواتیں ایسی صورت میں دی گئی ہوں کہ ل، م، ن میں سے ہر ایک کو ایک کے مساوی منتخب کرنے سے جملہ (۳۲) لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہو۔

[جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ پہچان لیگا کہ اس ترکیب سے بھی ہم اُسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں جو پہلے دریافت ہوا کیونکہ اگر جملہ (۳۲) ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہو تو

ل ا۱ + م ا۲ + ن ا۳ = ۰، ل ب۱ + م ب۲ + ن ب۳ = ۰،

ل ج۱ + م ج۲ + ن ج۳ = ۰ اور ان مساواتوں سے اگر ل، م، ن کو ساقط کر دیا جائے تو وہی مساوات حاصل ہوتی ہے جو دفعہ ۲۱ میں حاصل ہوئی]

مثال۔ ثابت کرو کہ جو خطوط مثلث کے تین اضلاع کی عمودی تنصیف کرتے ہیں وہ تینوں ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

فرض کرو کہ محور قائم ہیں اور نقاط راس ا، ب، ج کے محدد بالترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہیں۔
ب ج کی مساوات ہے [حسب دفعہ ۱۰ (ج)]

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_2}{\text{لا}_2 - \text{لا}_3} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{ما}_2 - \text{ما}_3}$$

یعنی (لا − لا۲) (ما۲ − ما۳) − (ما − ما۲) (لا۲ − لا۳) = ۰ .... (۱)

اگر د ضلع ب ج کا نقطہ تنصیف ہو تو اس کے محدد $\frac{\text{لا}_2 + \text{لا}_3}{2}$ ، $\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_3}{2}$ ہوں گے اور د میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات یہ ہوگی

$$\text{ما} - \frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_3}{2} = \text{م}\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}_2 + \text{لا}_3}{2}\right) \quad \ldots\ldots (\text{ب})$$

اب چونکہ نقطہ د میں سے گذرنے والا خط ب ج پر عمود ہے اس لئے مساوات (ل) میں جو لا اور ما کے سر ہیں ان کا تبادلہ کر کے ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل دینی چاہیے، اس لئے ایک ایسے خط کی مساوات جو د میں سے گذرے اور ب ج پر عمود ہو حسب ذیل ہوگی

$$(\text{لا}_2 - \text{لا}_3)\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}_2 + \text{لا}_3}{2}\right) + (\text{ما}_2 - \text{ما}_3)\left(\text{ما} - \frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_3}{2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (\text{ج})$$

ازروئے تشاکل ان خطوط کی مساواتیں جو بالترتیب ج ا اور ا ب کی تنصیف کریں اور ان پر عمود ہوں یہ ہونگی

$$(\text{لا}_3 - \text{لا}_1)\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}_3 + \text{لا}_1}{2}\right) + (\text{ما}_3 - \text{ما}_1)\left(\text{ما} - \frac{\text{ما}_3 + \text{ما}_1}{2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (\text{د})$$

اور

$$(\text{لا}_1 - \text{لا}_2)\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}_1 + \text{لا}_2}{2}\right) + (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\left(\text{ما} - \frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}{2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (\text{ع})$$

اب اگر مساواتوں (ج)، (د)، (ع) کو اکٹھا جمع کیا جائے تو ان کا مجموعہ متطابقاً صفر کے مساوی ہوتا ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ جو خطوط ان مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

۴ — ایسی شرط دریافت کرو کہ تین نقطے ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوں۔

فرض کرو کہ نقاط کے محدد $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2 ، \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3 ، \text{ما}_3)$ ہیں اور جس خط پر یہ تینوں واقع ہوتے ہیں اس کی مساوات $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ ہے۔
چونکہ ہر ایک نقطہ کے محدد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لئے

ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰ .... (ا)

ا لا۲ + ب ما۲ + ج = ۰ .... (ب)

ا لا۳ + ب ما۳ + ج = ۰ .... (ج)

(ا) اور (ب) سے

ا ÷ (ما۱ − ما۲) = ب ÷ (لا۲ − لا۱) = ج ÷ (لا۱ ما۲ − لا۲ ما۱)

ا، ب، ج کی قیمتوں کو (۳) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

لا۱ ما۲ − لا۲ ما۱ + لا۲ ما۳ − لا۳ ما۲ + لا۳ ما۱ − لا۱ ما۳ = ۰ ...... (د)

اور تین نقطوں کے ہم خط ہونیکی یہی شرط ہے۔

اوپر کے عمل کے بغیر بھی ہم مساوات (د) کو معلوم کر سکتے تھے کیونکہ یہ صرف اس امر کو تعبیر کرتی ہے کہ اُس مثلث کا رقبہ جس کے راس تین نقاط مفروضہ ہیں صفر کے مساوی ہے۔

جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لیگا کہ مساوات (د) مساوات

لا۱	ما۱	۱	
لا۲	ما۲	۱	= ۰
لا۳	ما۳	۱	

کی محض تفصیل ہے جو مساواتوں (ا)، (ب)، (ج) میں سے حروف ا، ب، ج کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ ا ب ج ایک مثلث ہے، زوایا ا اور ب کے داخلی منصف اضلاع ب ج اور ج ا کو نقاط د اور ع پر قطع کرتے ہیں اور زاویہ ج کا بیرونی منصف ا ب سے ف پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ د، ع، ف ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج کے محدد بالترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہیں اور اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے طول بالترتیب اَ، بَ، جَ ہیں، تب اقلیدس م ۶ ش ۳ اور (ا) کو استعمال کرتے سے نقاط

د، ع، ف کے محدد بالترتیب معلوم ہوں گے (دفعہ ۳)

$$\left(\frac{\text{بَ لا}_2 + \text{جَ لا}_3}{\text{بَ} + \text{جَ}} ،\ \frac{\text{بَ ما}_2 + \text{جَ ما}_3}{\text{بَ} + \text{جَ}}\right) ،\ \left(\frac{\text{جَ لا}_3 + \text{اَ لا}_1}{\text{جَ} + \text{اَ}} ،\ \frac{\text{جَ ما}_3 + \text{اَ ما}_1}{\text{جَ} + \text{اَ}}\right)$$

$$\left(\frac{\text{اَ لا}_1 - \text{بَ لا}_2}{\text{اَ} - \text{بَ}} ،\ \frac{\text{اَ ما}_1 - \text{بَ ما}_2}{\text{اَ} - \text{بَ}}\right)$$

ان محددوں کو مساوات (د) میں مندرج کرنے سے نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوگا لیکن ہوشیار طالب علم محددوں کو دیکھنے سے فوراً سمجھ جائے گا کہ فَ خط د ع کو خارجاً نسبت جَ + اَ : بَ + جَ سے تقسیم کرتا ہے (دفعہ ۳)

مثال ۲- زیادہ عام صورت میں اگر ایک مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب یا ان اضلاع ممدودہ پر ایسے نقاط ا_1، ب_1، ج_1 لیے جائیں کہ

$$\frac{\text{ب ا}_1}{\text{ا}_1\text{ ج}} \times \frac{\text{ج ب}_1}{\text{ب}_1\text{ ا}} \times \frac{\text{ا ج}_1}{\text{ج}_1\text{ ب}} = -1$$

تو نقاط ا_1، ب_1، ج_1 ایک ہی خط پر واقع ہوں گے۔

فرض کرو کہ ا_1 ضلع ب ج کو نسبت م : ن سے تقسیم کرتا ہے اور ب_1 ضلع ج ا کو نسبت ن : ل سے تقسیم کرتا ہے۔

تب بموجب شرائط سوال ج_1 ضلع ا ب کو لازماً نسبت ل : -م سے تقسیم کرے گا۔ مثال سابق کا ثبوت اس صورت پر عین صادق آتا ہے، فرق صرف اسقدر ہے کہ اَ، بَ، جَ کی بجائے ل، م، ن رکھدینے چاہئیں۔

مشقیں

۶۸- ایک خط مستقیم خطوط ۳ لا + ۲ ما - ۵ = ۰ اور ۴ لا + ۳ ما + ۷ = ۰ کے نقطۂ تقاطع کو نقطہ (۱، ۳) سے ملاتا ہے، اس کی مساوات دریافت کرو۔

۶۹- ایک مثلث کے اضلاع ۳ لا + ما = ۲، لا + ۲ ما = ۵ اور ۲ لا - ۳ ما + ۷ = ۰ ہیں، مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں۔ انکی مساواتیں دریافت کرو نیز ان عمودوں کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو۔

۷۰ - اوپر کی مثال کے مثلث میں ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو مثلث کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی کھینچے جائیں -

۷۱ - ایسے خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو ۳ لا + ۴ ما - ۱۱ = ۰ اور ۷ ما - لا - ۱۳ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گذریں اور انہی خطوط پر بالترتیب عمود ہوں -

۷۲ - ثابت کرو کہ ذیل کے مستقیم خط ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں

(ب + ج) لا + ا ما = د

(ج + ا) لا + ب ما = د

(ا + ب) لا + ج ما = د

۷۳ - اگر مثلث کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں ملتے ہیں -

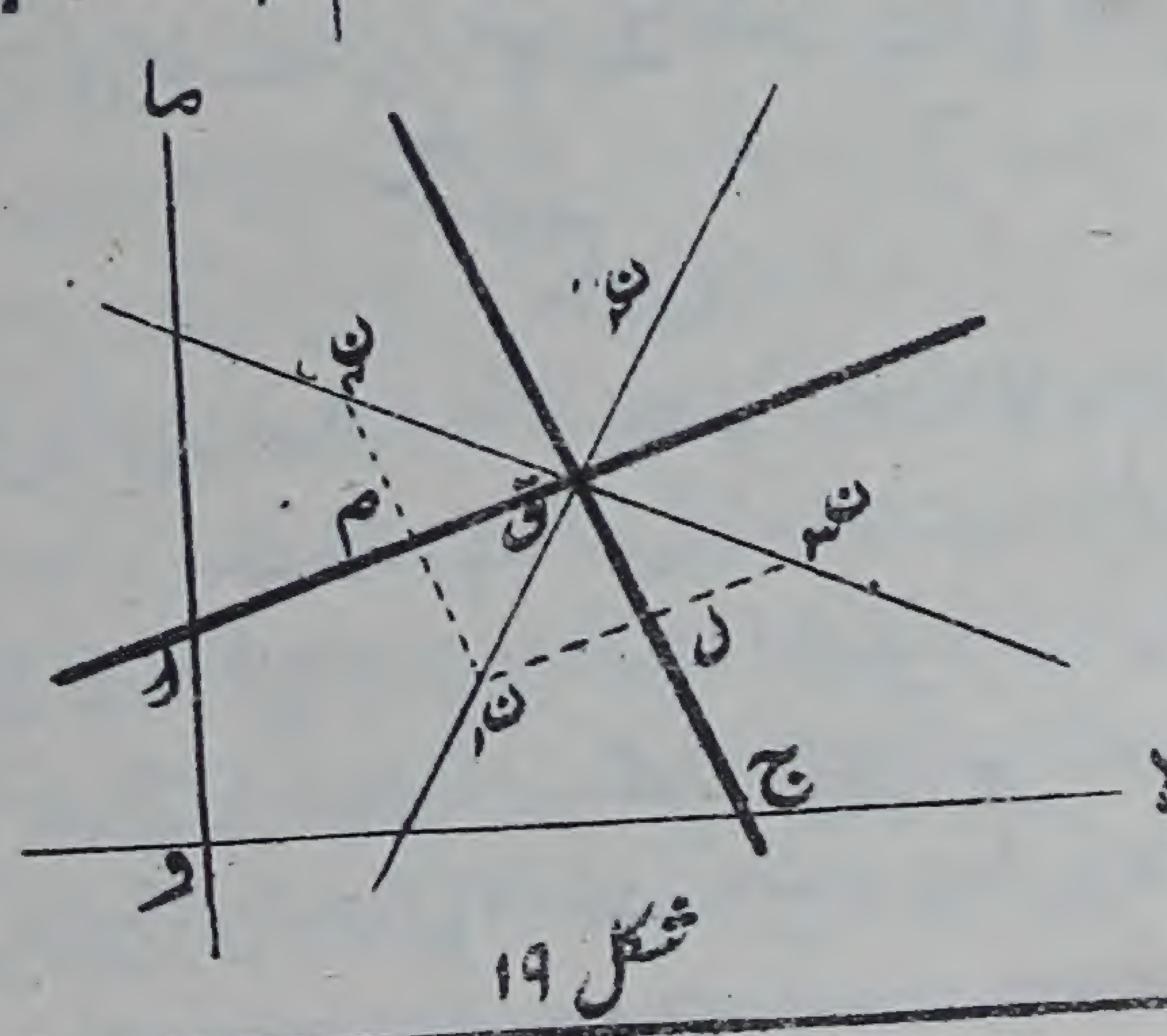
۲۵ - دو خطوط کی مساواتیں بلحاظ قائم محوروں کے

لا جم عہ۱ + ما جب عہ۱ - ع۱ = ۰ اور لا جم عہ۲ + ما جب عہ۲ - ع۲ = ۰

ہیں، ان کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

اگر نقطہ (لاَ، ماَ) کسی ایک منصف پر ہو تو جو عمود نقطہ (لاَ، ماَ) سے ان خطوط پر کھینچے جائیں گے وہ برابر ہونگے، اس لئے (بموجب دفعہ ۱۶)

لاَ جم عہ۱ + ماَ جب عہ۱ - ع۱ = ± (لاَ جم عہ۲ + ماَ جب عہ۲ - ع۲)



شکل ۱۹

پس کسی ایک منصّف پر کا ہر ایک نقطہ ذیل کی ایک نہ ایک مساوات کو پورا کرتا ہے۔

لا جم ع۱ + ما جب ع۱ - ع۱ = ± (لا جم ع۲ + ما جب ع۲ - ع۲) ۔۔۔ (۳۴)

پس یہ مساواتیں خطوط کے دو منصّفوں کی ہیں، ایک منصّف مثبت علامت لینے سے اور دوسرا منفی علامت لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم اس دوہری یا مشتبہ علامت کے متعلق تحقیق کرتے ہیں۔

اگر اب اور ج د مفروضہ خطوط ہوں اور ن۱ ن۱ اور ن۲ ن۲ ان کے منصّف ہوں تو ایک منصّف (ن۱ ن۱ دیکھو شکل) ایسے خانہ اق ج میں سے گذریگا جس میں مبدأ واقع ہے، اس منصّف کے حصہ ق ن۱ پر کا ہر ایک نقطہ خطوط مفروضہ سے اسی طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدأ ہے۔

اگر مبدأ سے ان خطوں پر عمود نکالے جائیں تو ہم جانتے ہیں کہ ان کے طول ع۱ اور ع۲ ہیں اور یہ طول مبدأ کے محددوں کو ذیل کے جملوں میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں

- (لا جم ع۱ + ما جب ع۱ - ع۱)

اور - (لا جم ع۲ + ما جب ع۲ - ع۲)

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ق ن۱ پر کے کسی نقطہ (لا'، ما') سے ان خطوں پر عمود نکالے جائیں تو ان کے طول بھی اوپر کے جملات میں لا، ما کی جگہ لا'، ما' مندرج کرنے سے حاصل ہونگے

اس لئے ق ن۱ کی مساوات یہ ہوئی

- (لا جم ع۱ + ما جب ع۱ - ع۱) = - (لا جم ع۲ + ما جب ع۲ - ع۲)

یا لا جم ع۱ + ما جب ع۱ - ع۱ = لا جم ع۲ + ما جب ع۲ - ع۲

پس اگر مساوات (۳۴) میں بائیں طرف کے رکن کے ماقبل مثبت علامت لی جائے تو یہ مساوات منصّف ن۱ ق ن۱ کو تعبیر کرے گی جو اس خانہ میں سے گذرتا ہے جس میں مبدأ واقع ہے اور اسی طرح کے استدلال سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ منفی علامت لینے سے ہم کو جو مساوات حاصل ہوگی وہ منصّف ن۲ ق ن۲ کو تعبیر کرے گی (دیکھو شکل)۔

مائل محور۔ اسی طرح سے خطوط مستقیم

لا جم $عہ_1$ + ما جم (سہ − $عہ_1$) − $ع_1$ = ۰

اور لا جم $عہ_2$ + ما جم (سہ − $عہ_2$) − $ع_2$ = ۰

کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں

لا جم $عہ_1$ + ما جم (سہ − $عہ_1$) − $ع_1$ = ± {لا جم $عہ_2$ + ما جم (سہ − $عہ_2$) − $ع_2$} ..... (۳۵)

ہیں اور اس میں متبادل علامات کے وہی معنی ہیں جو قائم محوروں کی صورت میں بیان ہوئے۔

۲۶- خطوط $ا_1$ لا + $ب_1$ ما + $ج_1$ = ۰ اور $ا_2$ لا + $ب_2$ ما + $ج_2$ = ۰
کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۱۵ کی مدد سے ان مساواتوں کو عمودی صورت میں تحویل کرو اور دفعہ سابق کے استدلال سے کام لو' اس طرح سے منصّفوں کی مساواتیں قائم محوروں کی صورت میں یہ ہونگی

$$\frac{\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} = \pm \frac{\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}} \quad \text{.... (۳۶)}$$

اور مائل محوروں کی صورت میں یہ ہونگی

$$\frac{\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2 - 2\,\text{ا}_1\text{ب}_1\,\text{جم سہ}}} = \pm \frac{\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2 - 2\,\text{ا}_2\text{ب}_2\,\text{جم سہ}}} \quad \text{.... (۳۷)}$$

ہر ایک صورت میں جس علامت کو لینے سے دونوں طرف کی مستقل رقمیں متفق العلامت ہو جائیں (یعنی دونوں کی علامت ایک ہی ہو جائے) اُس علامت سے وہ منصّف حاصل ہوگا جو مبدأ والے خانہ میں سے گذرتا ہے۔

طالب علم غور سے دیکھے کہ دفعہ ۱۵ کے جملوں سے مساوات (۳۷) کو تحویل کرتے وقت دونوں طرف سے جزوِ ضربی جب سہ خارج ہوگیا ہے۔

مثال (۱) قائم محوروں کی صورت میں خطوط ۳ لا + ۴ ما = ۷ اور ۸ لا + ۶ ما = ۱۳
کے درمیانی زاویوں کے منصّف دریافت کرو۔

دونوں منصفوں کی مساواتیں ذیل کے ضابطہ میں شامل ہیں .

(۳لا + ۴ما − ۷) / √(۳² + ۴²) = ± (۸لا + ۶ما − ۱۳) / √(۸² + ۶²)

یعنی ۲ (۳لا + ۴ما − ۷) = ± (۸لا + ۶ما − ۱۳)

اس لئے مطلوبہ مساواتیں یہ ہیں

۲لا − ۲ما + ۱ = ۰ اور ۱۴لا + ۱۴ما − ۲۷ = ۰

مثال (۲) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے زاویوں کے داخلی منصف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں ۔

محددوں کا مبدأ مثلث کے اندر مقرر کرو اور فرض کرو کہ ب ج، ج ا، ا ب کی مساواتیں بلحاظ قائم محوروں کے یہ ہیں

لا جم عہ۱ + ما جب عہ۱ − ع۱ = ۰ ....(۱)

لا جم عہ۲ + ما جب عہ۲ − ع۲ = ۰ ....(۲)

لا جم عہ۳ + ما جب عہ۳ − ع۳ = ۰ ....(۳)

زاویہ ا کا داخلی منصف اُس خانہ میں سے گذرتا ہے جس میں مبدأ واقع ہے، اسلئے اسکی مساوات یہ ہے

(لا جم عہ۲ + ما جب عہ۲ − ع۲) − (لا جم عہ۳ + ما جب عہ۳ − ع۳) = ۰ .....(۴)

ازروئے تشاکل زوایا ب اور ج کے داخلی منصفوں کی مساواتیں یہ ہونگی

(لا جم عہ۳ + ما جب عہ۳ − ع۳) − (لا جم عہ۱ + ما جب عہ۱ − ع۱) = ۰ .....(۵)

اور (لا جم عہ۱ + ما جب عہ۱ − ع۱) − (لا جم عہ۲ + ما جب عہ۲ − ع۲) = ۰ .....(۶)

اب چونکہ مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کے بائیں طرف کے رکنوں کا مجموعہ متطابقاً صفر ہے اس لئے جو خط ان مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک ہی نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (دفعہ ۲۲)

[مشاہدہ ہو کہ یہ ثبوت اور اقلیدس ص ۴ ش ۴ کا ثبوت اصول میں متطابق ہیں]

۲۷ - مختصر طریق کتابت محددوں کے ہندسہ میں اکثر اوقات اعمال جبریہ

مختصر طریق کتابت کی مدد سے سادہ صورت میں پیش کئے جا سکتے ہیں، مثلاً اگر اوپر کی مثال میں رموز عہ، بہ، جہ بالترتیب جملات لاجم عہ۱ + ماجب عہ۱ ـ ع۱، لاجم عہ۲ + ماجب عہ۲ ـ ع۲ اور لاجم عہ۳ + ماجب عہ۳ ـ ع۳ کو تعبیر کریں تو اس طریق کتابت کے موافق مثلث کے اضلاع کی مساواتیں عہ = ۰، بہ = ۰، جہ = ۰ ہونگی اور زوایا ا، ب، ج کے داخلی منصّفوں کی مساواتیں بہ ـ جہ = ۰، جہ ـ عہ = ۰، عہ ـ بہ = ۰ ہونگی، ظاہر ہے کہ آخری تین مساواتوں کے دائیں طرف کے رکنوں کا مجموعہ متطابقاً صفر ہے پس معلوم ہوا کہ طریق کتابت کا استعمال ثبوت کی نوعیت کو نہیں بدلتا صرف یہ جبریہ عمل کو مختصر کر دیتا ہے۔

طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ منصّفوں کی مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کو مختصر صورت میں صرف اُس وقت لکھا جا سکتا ہے جبکہ اضلاع کی مساواتیں عمودی صورت میں بیان کی گئی ہوں، مختصر طریق کتابت استعمال کرتے وقت اُسکو اس حسابی دستور کی پوری پیروی کرنی چاہئے کہ عہ، بہ، جہ اختصاراً خط مستقیم کی مساوات کی عمودی صورت کے دائیں رکن کے لئے استعمال کئے جائیں یعنی ان رموز کو صرف لاجم عہ + ماجب عہ ـ ع جیسے جملات کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیا جائے۔ اگر خط مستقیم کی مساوات کو عام صورت میں لکھا جائے تو ان کے دائیں طرف کے رکنوں کو، یعنی ا لا + ب ما + ج جیسے جملوں کو حروف ی، و، ے سے تعبیر کیا جائے۔

مشقیں

۷۴ ـ خطوط مستقیم ۳ لا ـ ۴ ما + ۷ = ۰ اور ۱۲ لا + ۵ ما ـ ۹ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۷۵ ـ خطوط مستقیم کے دو زوج ذیل میں دئے گئے ہیں، ہر ایک زوج کے درمیانی زاویوں کے منصف معلوم کرو اور اُن خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو ان کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملاتے ہیں۔

(۱) ما = ۲ لا ـ ۴ اور ما = ۳ لا ـ ۶

(۲) لا + ما ـ ۳ = ۰ اور ۷ لا ـ ما + ۵ = ۰

۷۶ - ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب یہ ہیں

۴ لا + ۳ ما + ۷ = ۰، ۵ لا + ۱۲ ما + ۲۰ = ۰ اور ۳ لا + ۴ ما + ۸ = ۰

اس کے داخلی منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۷۷ - ایک نقطہ ن سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان کے طول ع، ص، د ہیں اگر یہ عمود ایک تعلق ا ع + ب ص + ج د = ۰ کے ذریعہ مربوط ہوں جہاں ا، ب، ج مستقل مقداریں ہیں تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

[طریق مطلوب کی مساوات مندرجہ بالا طریق کتابت کے موافق

ا عہ + ب بہ + ج جہ = ۰ ہے اور یہ مساوات درجہ اول ہے]

۷۸ - ثابت کرو کہ ایک مثلث کے دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی منصف تینوں ایک ہی نقطہ پہ ملتے ہیں۔

[مثلث کے اندر کسی نقطہ کو مبدأ قرار دو اور فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع کی مختصر مساواتیں عمودی صورت میں عہ = ۰، بہ = ۰، جہ = ۰ ہیں، زوایا ا اور ب کے خارجی منصفوں کی مساواتیں بہ + جہ = ۰، جہ + عہ = ۰ ہونگی اور ج کے داخلی منصف کی مساوات عہ - بہ ہوگی۔ دفعہ ۳۱ کی مدد سے مسئلہ ثابت ہوگا اگر مستقل مقادیر ا، ب، ج بالترتیب ا، -ا، ا کے برابر لیجائیں]

۷۸ - لا، ما کی متجانس مساوات درجہ دوم دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ میں سے گذرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات معلومہ

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ .... (۱)

ہے اگر اس کو ما کی رقوم میں مساوات درجہ دوم خیال کر کے حل کیا جائے تو

ما = (- ھ + √(ھ^۲ - ا ب)) / ب لا اور ما = (- ھ - √(ھ^۲ - ا ب)) / ب لا

جو ایسے خطوط مستقیم کی مساواتیں ہیں جو مبدأ میں سے گذرتے ہیں، پس مساوات (۱) کا طریق یہ دو مستقیم خط ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ لیا جائے تو

اس کے محدد (ا، ب) کو پورا کرینگے ۔

یہ خط حقیقی ہوں گے اگر $\text{ھ}^{۲} > \text{ا ب}$، ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اگر $\text{ھ}^{۲} = \text{ا ب}$، خیالی ہوں گے اگر $\text{ھ}^{۲} < \text{ا ب}$

یہ نتائج ہر صورت میں درست ہیں خواہ محور قائم ہوں یا مائل۔

یاد رہے کہ ھ رقم لا ما کا سر نہیں ہے بلکہ ۲ لا ما کا سر ہے ۔

۲۹ — جن دو خطوط مستقیم کو مساوات $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} = ۰$ تعبیر کرتی ہے اُن کا درمیانی زاویہ معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ مفروضہ خطوط مستقیم کی مساواتیں $\text{ما} - \text{م}_{۱}\,\text{لا} = ۰$ اور $\text{ما} - \text{م}_{۲}\,\text{لا} = ۰$ ہیں ۔ اب اگر جملہ $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲}$ کو ب پر اس غرض سے تقسیم کر دیا جائے کہ $\text{ما}^{۲}$ کا سر ایک ہو جائے تو جملہ $\text{ما}^{۲} + ۲\frac{\text{ھ}}{\text{ب}}\,\text{لا ما} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{لا}^{۲}$ حاصل ہوگا اور یہ لا ز ما اجزاء ضربی $\text{ما} - \text{م}_{۱}\,\text{لا}$ اور $\text{ما} - \text{م}_{۲}\,\text{لا}$ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا ۔

$$\therefore\ \text{م}_{۱} + \text{م}_{۲} = -\frac{۲\,\text{ھ}}{\text{ب}}\ ,\quad \text{م}_{۱}\,\text{م}_{۲} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

قائم محور ۔ اگر خطوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲}}{۱ + \text{م}_{۱}\,\text{م}_{۲}} \qquad \text{(دفعہ ۱۹)}$$

$$\text{اب}\ (\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲})^{۲} = (\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲})^{۲} - ۴\,\text{م}_{۱}\,\text{م}_{۲} = \frac{۴(\text{ھ}^{۲} - \text{ا ب})}{\text{ب}^{۲}}$$

$$\therefore\ \text{مس فہ} = \pm\,\frac{۲\sqrt{\text{ھ}^{۲} - \text{ا ب}}}{\text{ا} + \text{ب}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۳۸)$$

مشتبہ یا دوہری علامت اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ خطوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو سکتا ہے یا فہ کا تکملہ ۔

ان خطوں کے ایکدوسرے پر منطبق ہونے کی یہ شرط ہے کہ

$$\text{ھ}^{۲} = \text{ا ب} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۳۹)$$

یعنی جملہ $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲}$ مربع کامل ہو ۔

اور ایکدوسرے پر عمود ہونے کی شرط یہ ہے کہ

$$\text{ا} + \text{ب} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots (۴۰)$$

مائل محور - اس صورت میں

$$\text{مس فہ} = \frac{(\text{م}_1 - \text{م}_2)\ \text{جب سہ}}{۱ + (\text{م}_1 + \text{م}_2)\ \text{جم سہ} + \text{م}_1\ \text{م}_2}$$

جس سے
$$\text{مس فہ} = \pm \frac{۲\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}\ \text{جب سہ}}{\text{ا} + \text{ب} - ۲\,\text{ھ}\ \text{جم سہ}} \qquad \ldots\ldots\ldots (۴۱)$$

ایک دوسرے پر منطبق ہونے کی شرط پہلے کی طرح $\text{ھ}^2 - \text{اب} = ۰$ ہے

عمودیت کی شرط ہے $\text{ا} + \text{ب} - ۲\,\text{ھ}\ \text{جم سہ} = ۰$ .... (۴۲)

انطباق اور عمودیت کی یہ شرطیں یاد رکھنی چاہیئیں۔

۳۰۔ خطوط مستقیم $\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 = ۰$ کے درمیان جو زاوئے بنتے ہیں انکے منصفوں کی مساواتیں معلوم کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

فرض کرو کہ خطوط $\text{ما} - \text{م}_1\,\text{لا} = ۰$ اور $\text{ما} - \text{م}_2\,\text{لا} = ۰$ ہیں۔

اگر ایک منصف کے کسی نقطہ سے ان خطوط پر عمود نکالے جائیں تو وہ مساوی ہونگے اس لئے

$$\frac{\text{ما} - \text{م}_1\,\text{لا}}{\sqrt{۱ + \text{م}_1^2}} = \pm \frac{\text{ما} - \text{م}_2\,\text{لا}}{\sqrt{۱ + \text{م}_2^2}}$$

جہاں اوپر کی علامت ایک منصف سے متعلق ہے اور نچلی دوسرے سے۔

پس مساوات
$$\frac{(\text{ما} - \text{م}_1\,\text{لا})^2}{۱ + \text{م}_1^2} = \frac{(\text{ما} - \text{م}_2\,\text{لا})^2}{۱ + \text{م}_2^2}$$

میں دونوں منصف شامل ہیں - یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(۱ + \text{م}_2^2)(\text{ما} - \text{م}_1\,\text{لا})^2 - (۱ + \text{م}_1^2)(\text{ما} - \text{م}_2\,\text{لا})^2 = ۰$$

یا لا^۲ {م۱^۲ (۱ + م۲^۲) - م۲^۲ (۱ + م۱^۲)}

- ۲ لاما {م۱ (۱ + م۲^۲) - م۲ (۱ + م۱^۲)} + ما^۲ (۱ + م۲^۲ - ۱ - م۱^۲) = ۰

یا لا^۲ (م۱^۲ - م۲^۲) - ۲ لاما {(م۱ - م۲)(۱ - م۱ م۲)} + ما^۲ (م۲^۲ - م۱^۲) = ۰

∴ (لا^۲ - ما^۲)(م۱ + م۲) = ۲ لاما (۱ - م۱ م۲) چونکہ م۱ - م۲ صفر کے مساوی نہیں ہے۔

لیکن م۱ - م۲ = - ۲ھ/ب ، م۱ م۲ = ا/ب

اس لئے مساوات ہو جاتی ہے

(لا^۲ - ما^۲) (- ۲ھ/ب) = ۲ لاما (۱ - ا/ب)

یا (لا^۲ - ما^۲) ھ = لاما (- ا - ب)

یعنی (لا^۲ - ما^۲)/(ا - ب) = لاما/ھ .... (۴۳)

یہ مساوات نہایت ضروری ہے اور اس شکل میں یہ آسانی سے یاد رہ سکتی ہے

مثال۔ خطوں کے زوج ۳ لا^۲ + لاما - ۲ ما^۲ = ۰ کے درمیان جو زاویے بنتے ہیں ان کے منصفوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

ضابطہ (لا^۲ - ما^۲)/(ا - ب) = لاما/ھ استعمال کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

(لا^۲ - ما^۲)/(۳ - (-۲)) = لاما/(۱/۲)

یا لا^۲ - ۱۰ لاما - ما^۲ = ۰

مشقیں

۹۷ — جن خطوط مستقیم کی مشترک مساوات لا^۲ - ۵ لاما + ۶ ما^۲ = ۰ ہے ان کی مساواتیں الگ الگ دریافت کرو۔

۸۰ ــ بتاؤ کہ ذیل کی مساواتوں سے کیا طریق ہیں۔

(ا) لا ما = ۰ (ب) ما^{۲} = ۰ (ج) لا^{۲} + ما^{۲} = ۰

(د) لا ما + ما^{۲} = ۰ (ع) لا^{۲} - ۲ لا ما + ما^{۲} = ۰ (ف) ما^{۲} + ۱ = ۰

(گ) (لا - ہ)^{۲} + (ما - ب)^{۲} = ۰ (س) لا ما - ۳ لا - ۲ ما + ۶ = ۰

۸۱ ــ جن خطوں کی مشترک مساوات ۲ لا^{۲} - ۳ لا ما + ما^{۲} = ۰ ہے اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں ــ

۸۲ ــ جن خطوط مستقیم کی مساوات ما^{۲} - لا ما - ۶ لا^{۲} = ۰ ہے اُنہیں معلوم کرو اور اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۸۳ ــ جن خطوط کی مساوات ۳۹ لا^{۲} - ۹۶ لا ما + ۱۱ ما^{۲} = ۰ ہے اُنکا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۸۴ ــ ثابت کرو کہ خطوں کا جو زوج مساوات لا^{۲} + ۲ لا ما قطعہ + ما^{۲} = ۰ سے تعبیر ہوتا ہے وہ ہمیشہ حقیقی ہے اور زوج کا درمیانی زاویہ عہ ہے۔

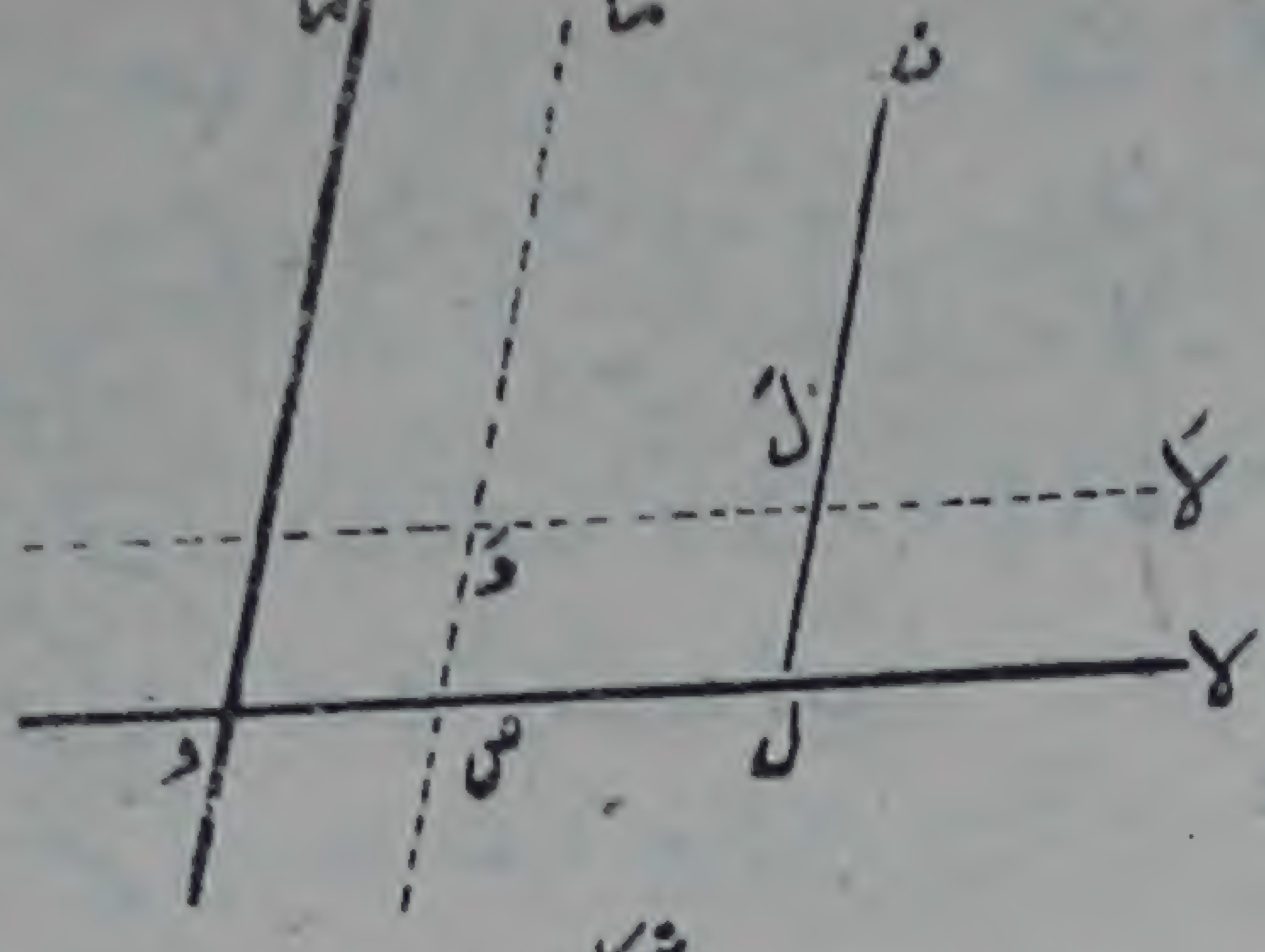
۸۵ ــ خطوط ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۰ کے درمیانی زاویوں کے جو منصف ہیں اُن کی مساوات سے ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

۸۶ ــ اگر ا = ب تو ثابت کرو کہ خطوط ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصف وہی ہیں جو محاور لا، ما کے درمیانی زاویوں کے ہیں اور بنا بریں ایک منصف و لا سے وہی زاویہ بناتا ہے جو دوسرا و ما سے۔

۳۱ ــ **محوروں کا بدلنا** ۔ محوروں کی سمتوں کے بدلنے کے بغیر محدد ول کے مبدأ کے مقام کا بدلنا۔

فرض کرو کہ و لا، و ما پرانے محور ہیں اور وَ لَا ، وَ مَا نئے محور ہیں جو و لا، و ما کے بالترتیب متوازی ہیں۔ نئے مبدأ وَ کا فصلہ اور معین و ص، ص وَ بلحاظ پرانے محوروں کے کھینچو اور فرض کرو کہ وَ کے محدد ان محوروں کے لحاظ سے (س، ک) ہیں یعنی و ص = س، ص وَ = ک

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے، بلحاظ پرانے محوروں کے اس کا فصلہ و ل ہے اور معین ل ن



شکل ۲۰

نیز بلحاظ نئے محوروں کے اس کا فصلہ دَ لَ ہے اور معین لَ ن۔
فرض کرو اس نقطہ ن کے محدد بلحاظ پرانے اور نئے محوروں کے بالترتیب (لا، ما) اور (لَا، مَا) ہیں۔
ہم (لا، ما) کی ایک مساوات کو (لَا، مَا) کی مساوات متناظرہ میں تحویل کرنا چاہتے ہیں اس لئے ہمیں پرانے محددوں لا، ما کو نئے محددوں لَا، مَا کی رقوم میں بیان کرنا چاہیئے تاکہ محض قیمتیں مندرج کرنے سے ایک مساوات دوسری سے حاصل ہوسکے۔
صریحاً دل = س + دَلَ، ل ن = ک + لَ ن
یا لا = لَا + س ، ما = مَا + ک .... (۴۴)
اس لئے ہمیں صرف لا کی بجائے لَا + س اور ما کی بجائے مَا + ک اس مساوات میں لکھنا ہے جسے ہم بدلنا چاہتے ہیں، اس طرح ہمیں لَا، مَا میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اب چونکہ (لَا، مَا) نئے دائر محدد ہیں اس لئے اس مساوات میں لَا، مَا کی زیروں کو حذف کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے
پس جس مساوات کو ہم بدلنا چاہتے ہیں اس کی تحویل صرف لا کی بجائے (لَا + س) اور ما کی بجائے (مَا + ک) لکھنے سے فوراً ہوسکتی ہے۔
ثبوت بالا ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں درست ہے۔

۳۲ — ایسی شرط معلوم کرو کہ درجہ دوم کی عام سے عام مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ہے

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ .... (۴۵)

طالب علم اس مساوات پر غور کرے، دراصل یہ مساوات متشاکل ہے کیونکہ اس کا دایاں رکن جملہ متشاکلہ ا لا^۲ + ب ما^۲ + ج ی^۲ + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما کی ایک صورت ہے جبکہ ی کو ایک کے مساوی فرض کرلیا جائے۔ اس بنا پر ف متغیر ما کے ساتھ لکھا گیا ہے اور گ، لا کے اور ھ، لا ما کے۔ یہ بھی یاد رہے کہ گ، لا کا سر نہیں ہے بلکہ ۲ لا کا سر ہے، اسی طرح ف اور ھ بھی بالترتیب ۲ ما اور ۲ لا ما کے سر ہیں۔

اگر مساوات (۴۵) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو فرض کرو کہ یہ خط نقطہ (لا١، ما١) پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

اس مساوات کو اُن محوروں کے لحاظ سے جو لا١، ما١ میں سے گزرتے ہیں اور پرانے محوروں کے متوازی ہیں بدل دو۔ اس کی صورت دفعہ ۳۱ کی رو سے یہ ہو جائے گی

ا (لا + لا١)^۲ - ۲ ھ (لا + لا١) (ما + ما١) + ب (ما + ما١)^۲ + ۲ ف (لا + لا١)
+ ۲ ف (ما + ما١) + ج = ۰ .... (ا)

بلحاظ نئے محوروں کے مساوات (ا) دو ایسے خطوط مستقیم کی مساوات ہے جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں، اس لئے (ا) کا دایاں رکن لا، ما کا متجانس جملہ درجہ دوم ہونا چاہیئے۔ اس لئے مساوات (ا) میں لا کا سر، ما کا سر اور مستقل رقم لازماً معدوم ہونے چاہئیں

اس لئے ا لا١ + ھ ما١ + گ = ۰ .... (ب)

ھ لا١ + ب ما١ + ف = ۰ .... (ج)

ا لا١^۲ + ۲ ھ لا١ ما١ + ب ما١^۲ + ۲ گ لا١ + ۲ ف ما١ + ج = ۰ ...... (د)

مساوات (د) اس طرح لکھی جا سکتی ہے

لا١ (ا لا١ + ب ما١ + گ) + ما١ (ھ لا١ + ب ما١ + ف) + گ لا١ + ف ما١ + ج = ۰

∴ گ لا١ + ف ما١ + ج = ۰ .... (ع)

لا١، ما١ کو مساواتوں (ب)، (ج)، (ع) سے ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{۲} - ب گ^{۲} - ج ھ^{۲} = ۰ .... (۴۶)

جو شرط مطلوبہ ہے۔

چونکہ مساوات (۴۶) ، لا$_{۱}$، ما$_{۱}$ کو ان مساواتوں

ا لا$_{۱}$ + ھ ما$_{۱}$ + گ = ۰ ، ھ لا$_{۱}$ + ب ما$_{۱}$ + ف = ۰ ، گ لا$_{۱}$ + ف ما$_{۱}$ + ج = ۰

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اسلئے یہ مساوات

$$\begin{vmatrix} ا & ھ & گ \\ ھ & ب & ف \\ گ & ف & ج \end{vmatrix} = ۰$$

کی تفصیل ہے۔

بلحاظ نئے محوروں کے ان دو خطوط مستقیم کی مساوات ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۰ ہے، پس یہ دو خط ان خطوں کے متوازی ہیں جن کی مساواتیں پرانے محوروں کے لحاظ سے ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۰ ہیں، نیز ان خطوط کے باہم عمود اور متوازی ہونے کی شرائط دفعہ ۲۹ میں حاصل کی گئی ہیں اور یہ شرائط صرف دوسرے درجہ کی ارقام پر منحصر ہیں۔

اس دفعہ کے نتیجہ کی تصدیق اس طرح بھی ہو سکتی ہے۔

اگر مساوات (۴۵) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہو تو اس کا دایاں رکن لازماً لا، ما کے دو خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہونا چاہیئے، اس لئے اگر اس مساوات سے ما کی قیمتیں لا کی رقوم میں معلوم کی جائیں تو ان میں سے ہر ایک لا کا ایک منطق جملہ ہو گی۔ اب مساوات کو ما کی نزولی قوتوں میں ترتیب دینے سے

ب ما^{۲} + ۲ (ھ لا + ف) ما + ا لا^{۲} + ۲ گ لا + ج = ۰

اس لئے ما = $\dfrac{-(ھ لا + ف) \pm \sqrt{(ھ لا + ف)^{۲} - ب (ا لا^{۲} + ۲ گ لا + ج)}}{ب}$

اب ضروری ہے کہ علامت جذر کے اندر جو جملہ ہے وہ مربع کامل ہو

یعنی (ھ^{۲} - ا ب) لا^{۲} + ۲ (ھ ف - ب گ) لا + (ف^{۲} - ب ج) مربع کامل ہو۔

اس لئے (ھ^{۲} - ا ب)(ف^{۲} - ب ج) = (ھ ف - ب گ)^{۲}

جس سے تحویل کے بعد

اب ج + ۲ ف گ ھ - اف² - ب گ² - ج ھ² = ۰

مشقیں

۸۷ - بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی اگر مبدأ کو نقطہ (۱، ۱) پر منتقل کر دیا جائے

(ا) لا² + لا ما - ۳ لا - ما + ۲ = ۰ (ب) لا ما - ما² - لا + ما = ۰

(ج) لا ما - لا - ما + ۱ = ۰، (د) لا² - ما² - ۲ لا + ۲ ما = ۰

۸۸ - نقطہ (ا، ۰) میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} - 1 = 0$$ کو تبدیل کرو۔

۸۹ - نقطہ (ع جم عہ، ع جب عہ) میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع کو تبدیل کرو۔

۹۰ - مساوات لا² + ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو نقطہ (-گ، -ف) میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرو۔

۹۱ - اگر مساوات ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع

$$\left(\frac{\text{ھ ف - ب گ}}{\text{اب - ھ}^2} ، \frac{\text{ھ گ - اف}}{\text{اب - ھ}^2} \right)$$ ہے۔

[مساواتوں (ب) اور (ج) کو لا، ما کے لئے حل کرو]

۹۲ - اگر اوپر کی مساوات خطوط مستقیم کے جوڑے کو تعبیر نہ کرے تو بھی حسب دفعہ ۳۲ اسے تبدیل کرو۔

[یہاں بھی اگر نئے مبدأ کے محدد ایسے منتخب کئے جائیں کہ وہ مساواتوں (ب) اور (ج) کو پورا کریں تو بھی تبدیل شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہونگے لیکن مستقل رقم معدوم ہونے کی بجائے گ لا' + ف ما' + ج ہوگی جہاں

$$\text{لا}' = \frac{\text{ھ ف - ب گ}}{\text{اب - ھ}^2}$$ اور $$\text{ما}' = \frac{\text{ھ گ - اف}}{\text{اب - ھ}^2}$$

اور تبدیل شدہ مساوات ہوگی

$$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + \frac{ا ب ج + ۲ ف گ - ا ف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2}{ا ب - ھ^2} = ۰$$

اس نتیجہ کو آیندہ باب ششم کی تمہید کے طور پر خیال کرو۔ جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ پہچان لیگا کہ مثال ۹۲ میں نئے مبدأ کے محدد $\frac{گ}{ج}$ ، $\frac{ف}{ج}$ ہیں

اور تبدیل شدہ مساوات $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + \frac{\Delta}{ج} = ۰$ ہے

جہاں $\Delta = \begin{vmatrix} ا & ھ & گ \\ ھ & ب & ف \\ گ & ف & ج \end{vmatrix}$ اور بڑے حروف چھوٹے متناظر حروف کے صغائر کو تعبیر کرتے ہیں۔

۹۳ — ثابت کرو کہ مساوات $لا^2 - ما^2 - لا + ۳ ما - ۲ = ۰$ خطوط مستقیم کے ایک ایسے جوڑے کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔ انہیں معلوم کرو۔

۹۴ — مساوات $(لا + ما - ۱)^2 - ۴ لا^2 = ۰$ کا طریق کھینچو اور جن خطوط مستقیم کو یہ مساوات تعبیر کرتی ہے ان کا نقطہ تقاطع دریافت کرو۔

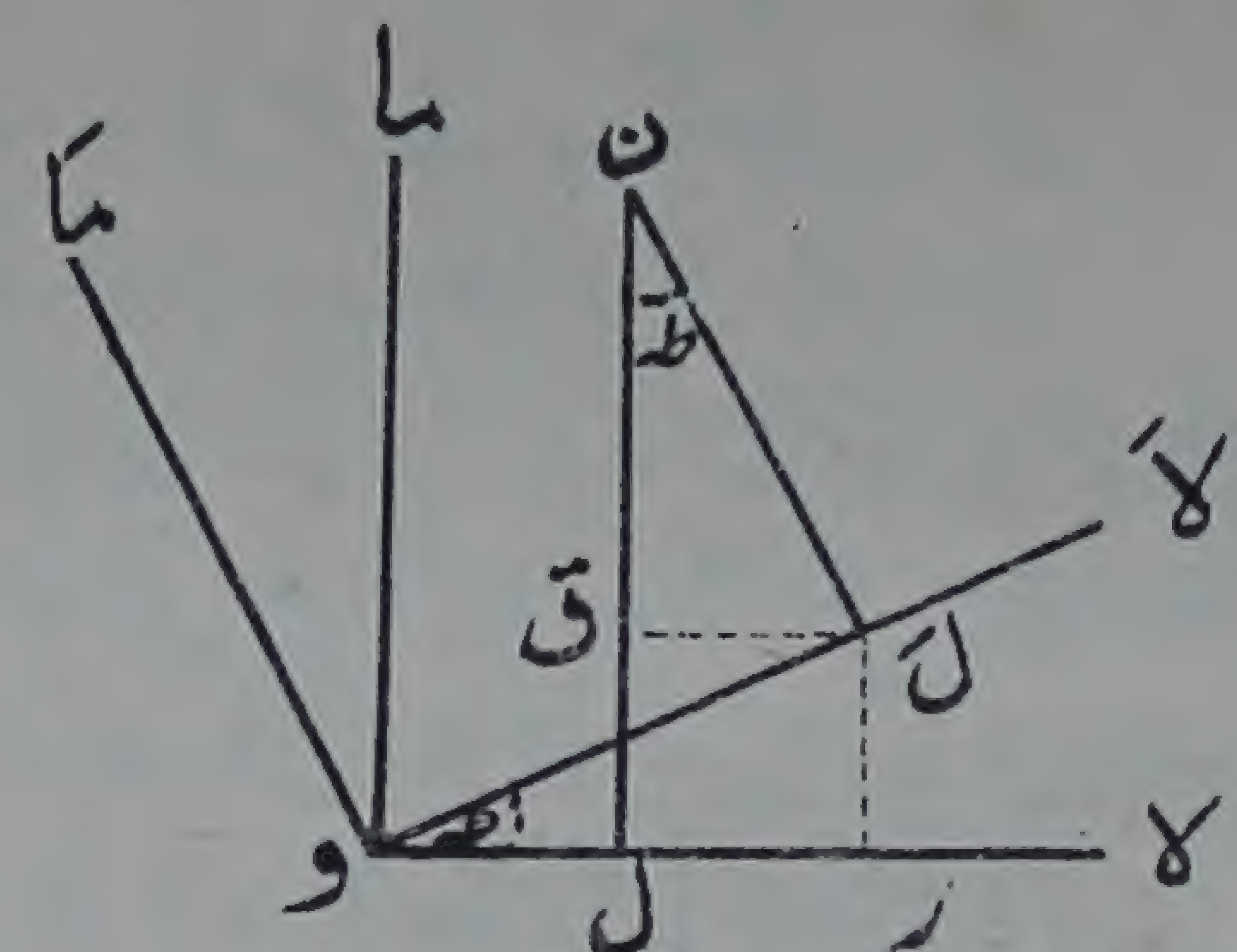
۹۵ — ثابت کرو کہ مساوات $لا^2 - ۵ لا ما + ۴ ما^2 + لا + ۲ ما - ۲ = ۰$ خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے، انکا نقطۂ تقاطع اور خطوط کی مساواتیں معلوم کرو۔

۹۶ — مبدأ کو نقطہ (-۱، ۲) پر لیجانے سے ثابت کرو کہ مساوات $لا^2 + لا ما - ما^2 + ۵ ما - ۵ = ۰$ خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے، پھر مبدأ کو اسکے ابتدائی مقام پر منتقل کرنے سے ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساوات $لا^2 - ۴ لا ما - ما^2 + ۱۰ لا + ۵ = ۰$ ہے

۹۷ — بتاؤ کہ مبدأ کو کس نقطہ پر منتقل کرنے سے مساوات

لا² + لا ما + ۲ ما² - ۷ لا - ۵ ما + ۱۲ = ۰ کی تبدیل شدہ صورت میں درجہ اول کی رقمیں خارج کردی جاسکتی ہیں اور اس صورت میں تبدیل شدہ مساوات کیا ہوگی۔

۳۲ ۔ مبدأ کو بدلنے کے بغیر قائم محوروں کے ایک نظام سے دوسرے میں بدلنا۔



شکل ۲۱

فرض کرو کہ نئے محاور و لاَ ، و ماَ پرانے محاور و لا ، و ما کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ن کے محدد پرانے محوروں کے لحاظ سے (لا ، ما) ہیں اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لاَ ، ماَ)، جیسا دفعہ ۳۱ میں بتایا جاچکا ہے ہم یہاں صرف لا ، ما کو لاَ ، ماَ کی رقوم میں بیان کردینا چاہتے ہیں۔

نقطہ ن سے و لا اور و لاَ پر عمود ن ل اور ن لَ نکالو اور و لا پر عمود لَ ر اور ن ل پر عمود لَ ق کھینچو۔

تب و ل = و ر - ق لَ

ن ل = ر لَ + ق ن

∴ لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ
ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ ...... (۴۷)

پس زبروں کو حذف کرنے سے تبدیل شدہ مساوات اصلی مساوات میں لا کی بجائے (لا جم طہ - ما جب طہ) اور ما کی بجائے (لا جب طہ + ما جم طہ) لکھنے سے حاصل ہوگی۔

مثال ۱ - اگر نیا مبدا (ھ، ک) ہو اور نئے قائم محور پرانے قائم محوروں کے ساتھ زاویہ طہ بنائیں تو ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے پرانے محدد (لا، ما) اسی نقطہ کے نئے محددوں (لاَ، ماَ) کے ساتھ ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہوں گے۔

لا = ھ + لاَ جم طہ - ماَ جب طہ

ما = ک + لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

[پہلے (ھ، ک) میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے بدلو، پھر محوروں کو زاویہ طہ میں پھراؤ، یا سیدھا شکل سے حاصل کرو]

مثال ۲ - اگر پرانے محوروں کو جو قائم ہیں زاویہ ۴۵° میں سے پھرا دیا جائے تو بتاؤ کہ مساوات لا^۲ + ۴ لا ما + ما^۲ = ۰ کیا ہو جائے گی۔

یہاں عہ = ۴۵°

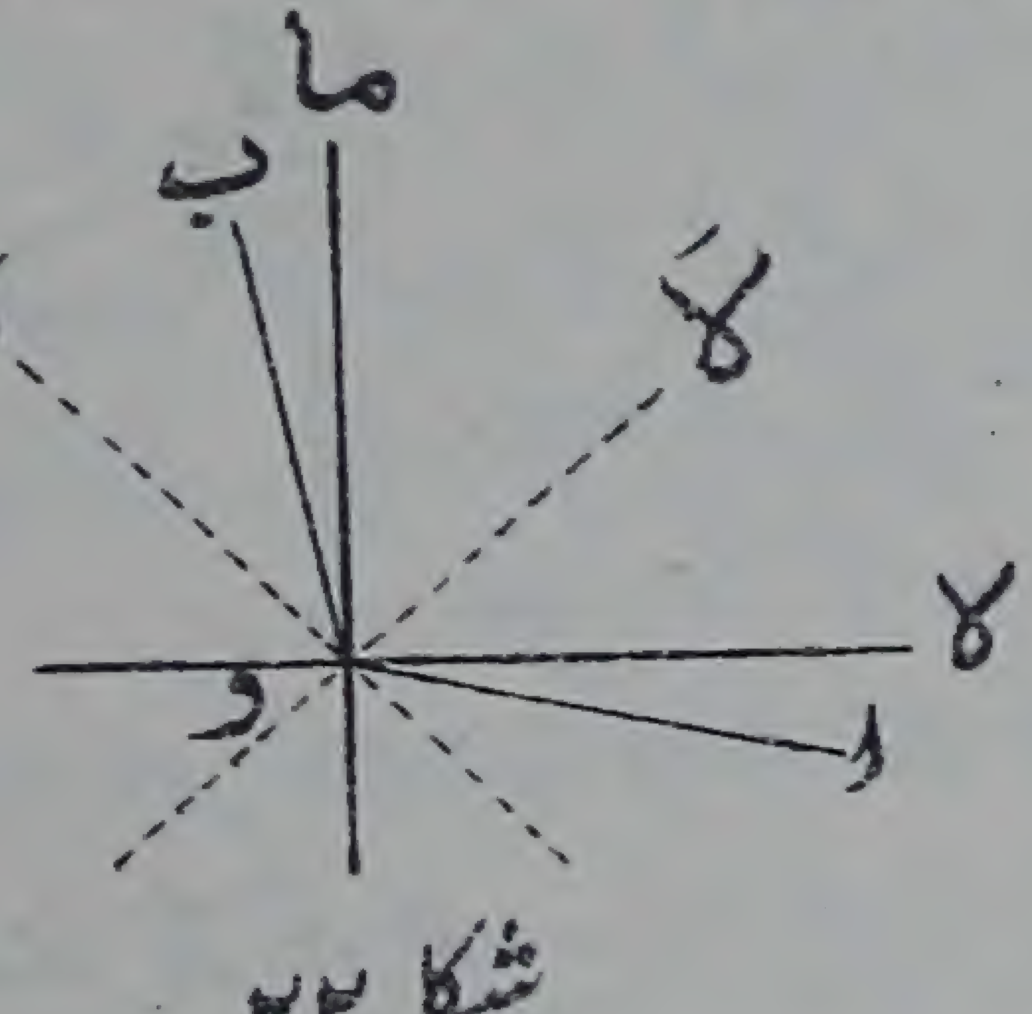
∴ لا = (لاَ - ماَ)/√۲ ، ما = (لاَ + ماَ)/√۲

اس لئے (لاَ - ماَ)^۲/۲ + ۴(لاَ - ماَ)(لاَ + ماَ)/۲ + (لاَ + ماَ)^۲/۲ = ۰

یا (لاَ - ماَ)^۲ + ۴ (لاَ^۲ - ماَ^۲) + (لاَ + ماَ)^۲ = ۰

یعنی ۶ لاَ^۲ - ۲ ماَ^۲ = ۰ یا ماَ = ± لاَ √۳

ظاہر ہے کہ جن دو خطوط کو یہ مساواتیں تعبیر کرتی ہیں وہ و لاَ کے ساتھ اسکے دونو جانب ۶۰° کے زاوئے بناتے ہیں۔ پس اگر و ا، و ب یہ خط ہوں تو



شکل ۲۲

ا و لاَ = ب و لاَ = ۶۰°

ا و لا = ۱۵°، ب و ما = ۱۵°

جس سے خطوط کے مقام پرانے محوروں کے لحاظ سے معلوم ہوتے ہیں۔

طالب علم ما کو لا کی رقوم میں معلوم کرنے سے اس کی تصدیق کرے کہ مساوات لا^2 + ۴ لا ما + ما^2 = ۰ دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک و لا کے ساتھ ۱۵° کا زاویہ بناتا ہے اور دوسرا و ما کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے ۔

مشقیں

۹۸۔ اگر نیا مبدأ نقطہ (-۱، ۱) پر لیا جائے تو بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جائینگی

(۱) لا = ۰ (۲) ما = ۰ (۳) ل لا + م ما + ۱ = ۰

(۴) لا^2 - ما^2 = ۰ (۵) ۳ لا^2 - ۴ لا ما + ما^2 = ۰

(۶) ۲ لا^2 + ۳ لا ما + ۴ ما^2 - لا + ما + ۱ = ۰

۹۹۔ اگر محوروں کو بالترتیب زوایا (۱) ۳۰° (۲) ۲۲۵° میں پھرا دیا جائے تو مساواتوں کی تحویل کے لئے متناظر ضابطے کیا ہوں گے ۔

۱۰۰۔ اگر محوروں کو زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ میں پھرا دیا جائے تو پرانے محددوں کو نئے محددوں کی رقوم میں اور نئے محددوں کو پرانے محددوں کی رقوم میں بیان کرو۔

۱۰۱۔ اگر محوروں کو زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ میں پھرا دیا جائے تو بتاؤ کہ مساوات ۱۱ لا^2 + ۱۶ لا ما - ما^2 = ۰ کیا ہو جائے گی۔

۱۰۲۔ محوروں کو زاویہ قائمہ میں پھرانے کے لئے تحویلی ضابطے کیا ہوں گے، ابتدائی اصولوں سے انکی تصدیق کرو۔

۴۳۔ ہم نے دیکھا ہے کہ محور بدلتے وقت جو تحویلیں عمل میں آتی ہیں ان کے لئے ہم بالعموم پرانے محددوں (لا، ما) کو نئے محددوں (لاَ، ماَ) کی رقوم میں بیان کرتے ہیں اور اسی میں سہولت ہے، لیکن ایک صورت ایسی ہے جس میں (لاَ، ماَ) کو فقط دیکھنے سے ہی (لا، ما) کی رقوم میں بیان کرنا زیادہ مناسب ہے۔ فرض کرو کہ ہمیں ایک مساوات قائم محوروں کے لحاظ سے صورت ذیل میں دیگئی ہے

اَ^{2} (لا جم عہ$_1$ + ما جب عہ$_1$ - ع$_1$)^2 + بَ^{2} (لا جم عہ$_2$ + ما جب عہ$_2$ - ع$_2$)^2 = اَ^{2} بَ^{2}

جہاں عہ$_2$ - عہ$_1$ = $\frac{\pi}{2}$ اور ہم خطوط مستقیم

لا جم عہ + ما جب عہ - ع۱ = ۰ ۔ اور لا جم عہ۲ + ما جب عہ۲ - ع۲ = ۰ ۔
کو بالترتیب نئے محور لاَ اور ماَ مانکر اوپر کی مساوات کو ان کے لحاظ سے تحویل کرنا چاہتے ہیں (یاد رہے کہ یہ نئے محور قائم نہیں ہوں گے جبتک کہ عہ۲ - عہ۱، $\frac{\pi}{2}$ کے مساوی نہ ہو)

پس لاَ = نقطہ (لا، ما) سے نئے محور ماَ پر عمود
= ± (لا جم عہ۲ + ما جب عہ۲ - ع۲)
اسیطرح سے ماَ = ± (لا جم عہ۱ + ما جب عہ۱ - ع۱)
اس لئے اب مساوات ہو جائے گی

اَ۲ ماَ۲ + ب۲ لاَ۲ = اَ۲ ب۲

یا زبریں حذف کرنے سے

$$\frac{لاَ^{۲}}{اَ^{۲}} + \frac{ماَ^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$$

اوپر کی مشتبہ علامت سے یہ مراد ہے کہ ہم اپنے نئے محوروں کی کسی سمت کو مثبت سمت قرار دے سکتے ہیں لیکن ہم دیکھینگے کہ اکثر اوقات تحویل شدہ مساوات میں لا، ما کی صرف جفت قوتیں واقع ہوں گی یعنی منحنی ہر دو نئے محوروں کے لحاظ سے متشاکل ہوگا، ایسی صورت میں مشتبہ علامت کا سوال پیدا ہی نہیں ہوگا ایسی تحویل عمل میں لاتے وقت طالب علم کو یاد رکھنا چاہئیے کہ مجوزہ نئے محور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کی مساواتیں عمودی صورت میں لائی گئی ہیں۔

مثال ۔ مساوات (۳ لا - ۴ ما - ۱۰)۲ + ۴ (۴ لا + ۳ ما + ۱۵)۲ = ۲۵ ..... (ا)
کو اسی طرح سے تحویل کرو (محور قائم ہیں)

خطوط مستقیم ۳ لا - ۴ ما - ۱۰ = ۰، ۴ لا + ۳ ما + ۱۵ = ۰
صریحاً ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں کیونکہ ایک خط کی مساوات دوسرے سے لا، ما کے سروں کا تبادلہ کرنے اور ان میں سے ایک کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتی ہے، پہلے خط کو نیا محور لا اور دوسرے کو نیا محور ما مقرر کرو، ان مساواتوں کو عمودی صورت میں لانے کے لئے ہمیں ہر خطوط وحدانی کے اندر کی

رقوم کو $\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}$ یا ۵ پر تقسیم کرنا چاہیئے، اسطرح مساوات (ا) ہوجائے گی

$$\left(\frac{۳}{۵}\text{لا}-\frac{۴}{۵}\text{ما}-۲\right)^{۲}+\left(\frac{۴}{۵}\text{لا}+\frac{۳}{۵}\text{ما}+۳\right)^{۲}=۱$$

نئے محوروں کے لحاظ سے اس کی تحویل کرنے سے یہ ہوجاتی ہے

$\bar{\text{ما}}^{۲}+۴\,\bar{\text{لا}}^{۲}=۱$ اسلیئے نئی مساوات ہے $۴\,\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}=۱$

مشق

۱۰۳ - خطوط $۵\,\text{لا}+۱۲\,\text{ما}-۳۹=۰$ اور $۱۲\,\text{لا}-۵\,\text{ما}+۵۲=۰$ کو بالترتیب نئے محاور لا اور ما مان کر (قائم محورون کے لحاظ سے) مساوات $(۵\,\text{لا}+۱۲\,\text{ما}-۳۹)^{۲}=۵۲\,(۱۲\,\text{لا}-۵\,\text{ما}+۵۲)$ کو بدلو اور نئے محور ما کی اس جانب کو جس میں پرانا مبدأ واقع ہے اپنی مثبت جانب قرار دو۔

۳۵ - محورونکی عام سے عام تبدیلی میں ہم پرانے محددوں کی بجائے نئے محددونکے خطی تفاعل مندرج کرتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ پرانے محور قائم ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے، پرانے محور و لا، و ما ہیں اور نئے محور و $\bar{\text{لا}}$، و $\bar{\text{ما}}$ ہیں۔

فرض کرو کہ نئے محوروں کی مساواتیں بلحاظ پرانے محوروں کے

$$\text{ل}_{۱}\,\text{لا}+\text{م}_{۱}\,\text{ما}+\text{ن}_{۱}=۰\text{، }\ \text{ل}_{۲}\,\text{لا}+\text{م}_{۲}\,\text{ما}+\text{ن}_{۲}=۰$$

ہیں اور نئے محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔

تب $\bar{\text{ما}}$ جب سہ = ن سے و $\bar{\text{لا}}$ پر عمود

$$=\pm\frac{\text{ل}_{۱}\,\text{لا}+\text{م}_{۱}\,\text{ما}+\text{ن}_{۱}}{\sqrt{\text{ل}_{۱}^{۲}+\text{م}_{۱}^{۲}}}$$

اسیطرح سے $\bar{\text{لا}}$ جب سہ $=\pm\frac{\text{ل}_{۲}\,\text{لا}+\text{م}_{۲}\,\text{ما}+\text{ن}_{۲}}{\sqrt{\text{ل}_{۲}^{۲}+\text{م}_{۲}^{۲}}}$ [اس سے قبل ہم مشتبہ علامت کے معنی بیان کر چکے ہیں]

اس لئے لاَ، ماَ محددوں لا، ما کے خطی تفاعل ہیں یعنی
لاَ = ف لا + ق ما + ر، ماَ = فَ لا + قَ ما + رَ پس لا، ما کے لئے حل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا، ما نئے محددوں لاَ، ماَ کے خطی تفاعل ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ پرانے محور مائل ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ صہ بناتے ہیں ثبوت مندرجہ بالا میں صرف اتنے تغیر کی ضرورت ہے کہ ماَ جب سہ اور لاَ جب سہ کے لئے جو جملے اوپر معلوم کئے گئے ہیں ان کے نسب نماؤں میں علامت جذر کے اندر ل$_{1}^{2}$ + م$_{1}^{2}$ اور ل$_{2}^{2}$ + م$_{2}^{2}$ کی بجائے بالترتیب ل$_{1}^{2}$ + م$_{1}^{2}$ − ۲ ل$_{1}$ م$_{1}$ جم صہ اور ل$_{2}^{2}$ + م$_{2}^{2}$ + ۲ ل$_{2}$ م$_{2}$ جم صہ ہونا چاہیئے۔

۳۶ — محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدل سکتا۔

(۱) درجہ بڑھ نہیں سکتا، فرض کرو کہ بڑے سے بڑے درجہ کی رقم ا لا^{ل} ما^{م} ہے اس کی بجائے ہمیں اس شکل کا جملہ
ا (ف$_{1}$ لاَ + ق$_{1}$ ماَ + ر$_{1}$)^{ل} × (ف$_{2}$ لاَ + ق$_{2}$ ماَ + ر$_{2}$)^{م} رکھنا ہوگا اور ہم دیکھتے ہیں کہ اس جملہ میں بھی لاَ، ماَ میں جو بڑے سے بڑے درجہ کی رقم ہے اس کا درجہ ل + م ہے جیسا کہ رقم ا لا^{ل} ما^{م} میں۔

(۲) درجہ کم نہیں ہو سکتا، کیونکہ اگر تحویل کے بعد پھر ہم اصلی محوروں پر واپس آنا چاہیں تو ہمیں لازماً اصلی مساوات حاصل ہونی چاہیئے لیکن اس طرح کی تحویل سے درجہ بڑھ جائے گا اور چونکہ لاَ، ماَ محددوں لا، ما کے خطی تفاعل ہیں اس لئے (۱) کی رو سے یہ ناممکن ہے۔

۳۷ — اگر محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے جبکہ مبداء کو نہ بدلا جائے جملہ
ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2}، اَ لاَ^{2} + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ^{2} ہو جائے تو

$$\frac{\text{ا + ب − ۲ ھ جم سہ}}{\text{جب}^{2}\text{ سہ}} = \frac{\text{اَ + بَ − ۲ ھَ جم سہَ}}{\text{جب}^{2}\text{ سہَ}}$$

اور

$$\frac{\text{ا ب − ھ}^{2}}{\text{جب}^{2}\text{ سہ}} = \frac{\text{اَ بَ − ھَ}^{2}}{\text{جب}^{2}\text{ سہَ}}.$$

جہاں سہ اور سَہ دونوں صورتوں میں محوروں کے درمیانی زاویے ہیں۔

جملہ لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ مبدأ سے نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کے مربع کو تعبیر کرتا ہے، اور یہ فاصلہ نہیں بدلتا کیونکہ مبدأ دونوں صورتوں میں وہی رہتا ہے اس لئے جملہ لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ کی تبدیل شدہ صورت

لاَ^{2} + ماَ^{2} + ۲ لاَ ماَ جم سَہ ہوگی

اس لئے مفروضات کی رو سے

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + لہ (لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ) .... (ا)

تحویل کے بعد

(اَ لاَ^{2} + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ^{2}) + لہ (لاَ^{2} + ماَ^{2} + ۲ لاَ ماَ جم سَہ) .... (ب)

ہو جائے گا۔

اب اگر (ا) مربع کامل ہو یعنی (ف لا + ق ما)^2 کی شکل کا ہو تو جملہ (ب) بھی لازماً مربع کامل ہوگا کیونکہ مساوات کو تحویل کرنے میں ہم (ف لا + ق ما) کی بجائے لا، ما کا ایک جملہ درجہ اول مندرج کرتے ہیں (دفعہ ۳۵)،

پس (ا) اور (ب) کے الگ الگ مربع کامل ہونے کی شرائط

(ا + لہ) (ب + لہ) − (ھ + لہ جم سہ)^2 = ۰

(اَ + لہ) (بَ + لہ) − (ھَ + لہ جم سَہ)^2 = ۰

سے حل کرنے پر لہ کی وہی قیمت حاصل ہونی چاہیئے۔

اس لئے لہ^2، لہ کے سروں اور مستقل ارقام کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{\text{جب}^2\ \text{سہ}}{\text{جب}^2\ \text{سَہ}} = \frac{\text{ا} + \text{ب} - ۲\ \text{ھ جم سہ}}{\text{اَ} + \text{بَ} - ۲\ \text{ھَ جم سَہ}} = \frac{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}{\text{اَ بَ} - \text{ھَ}^2}$$

یعنی

$$\frac{\text{ا} + \text{ب} - ۲\ \text{ھ جم سہ}}{\text{جب}^2\ \text{سہ}} = \frac{\text{اَ} + \text{بَ} - ۲\ \text{ھَ جم سَہ}}{\text{جب}^2\ \text{سَہ}}$$

اور

$$\frac{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}{\text{جب}^2\ \text{سہ}} = \frac{\text{اَ بَ} - \text{ھَ}^2}{\text{جب}^2\ \text{سَہ}} \qquad \text{....(۴۷)}$$

نتیجہ صریح اگر محوروں کے دونوں نظم علی القوائم ہوں تو

ا + ب = اَ + بَ اور اب - ھ^2 = اَبَ - ھَ^{2} .....(۴۸)

غیر متغیرات ۔ مسئلہ بالا کو ایک مختلف طرح سے ہم بیان کر سکتے ہیں، اور یہ کے نتائج سے یہ مراد ہے کہ

جملات $\dfrac{\text{ا + ب - ۲ ھ جم سہ}}{\text{جب}^2\text{ سہ}}$ اور $\dfrac{\text{اب - ھ}^2}{\text{جب}^2\text{ سہ}}$

محوروں کو بدلنے کے بعد اپنے متناظر جملات کے مساوی رہتے ہیں یعنی انکی قیمتیں محوروں کے بدلنے سے نہیں بدلتیں، اس لئے ان کو **غیر متغیرات** کہتے ہیں ۔

۳۸ ۔ اگر اُن نقاط کو جہاں خط مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ منحنی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ سے ملتا ہے مبدأ کے ساتھ خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو ان خطوط کی مساوات معلوم کرو ۔

قاعدہ ۔ دوسری مساوات کو پہلی مساوات کی مدد سے جس کو اس شکل $-\dfrac{\text{ل لا + م ما}}{\text{ن}}$ = ۱ میں لکھا جا سکتا ہے بلحاظ لا، ما کے متجانس بناؤ۔

اس طرح مساوات ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 - ۲ (گ لا + ف ما) $\left(\dfrac{\text{ل لا + م ما}}{\text{ن}}\right)$

+ ج $\left(\dfrac{\text{ل لا + م ما}}{\text{ن}}\right)^2$ = ۰ ....(ا)

حاصل ہوگی اور یہ مطلوبہ مساوات ہے کیونکہ یہ (لا، ما) میں درجہ دوم کی ایک متجانس مساوات ہونے کی وجہ سے مبدأ میں سے گذرنے والے دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔ نیز جہاں خط مستقیم منحنی کو قطع کرتا ہے ان نقطوں کے محدد بھی اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیئے (ا) مطلوبہ مساوات ہے

مثال ۔ اگر اُن نقاط کو جہاں خط مستقیم لا + ما + ۲ = ۰ منحنی لا^2 + لا ما + ما^2 + لا + ۳ ما + ۱ = ۰ سے ملتا ہے مبدأ کے ساتھ خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو ان خطوط کی مساوات معلوم کرو ۔

یہاں ۔ $\frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲} = ۱$

اور اس لئے متجانس مساوات ہے

$$\text{لا}^۲ + \text{لا ما} + \text{ما}^۲ + (\text{لا} + ۳\,\text{ما})\left(-\frac{\text{لا}+\text{ما}}{۲}\right) + \left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{۲}\right)^۲ = ۰$$

یا $۴(\text{لا}^۲ + \text{لا ما} + \text{ما}^۲) - ۲(\text{لا} + ۳\,\text{ما})(\text{لا}+\text{ما}) + (\text{لا} + \text{ما})^۲ = ۰$

یعنی $۳\,\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا ما} - \text{ما}^۲ = ۰$ یا $(\text{لا} - \text{ما})(۳\,\text{لا} + \text{ما}) = ۰$

یعنی خطوط مستقیم ہیں $\text{لا} - \text{ما} = ۰$، $۳\,\text{لا} + \text{ما} = ۰$

مشقیں

۱۰۴۔ جن نقاط پر خط مستقیم $\text{لا} + ۲\,\text{ما} = ۲$ منحنی $\text{لا}^۲ - \text{لا ما} + ۲\,\text{ما}^۲ = ۳$ سے ملتا ہے ان کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۵۔ جن نقاط پر خط مستقیم $۶\,\text{لا} + ۸\,\text{ما} - ۷۵ = ۰$ دائرہ $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + ۶\,\text{لا} + ۸\,\text{ما} = ۱۵۰$ سے ملتا ہے اُن کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۶۔ $\text{ما} = ۳$ اور منحنی $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ - ۴\,\text{لا} - ۵ = ۰$ کے نقاط تقاطع اور مبدأ کو ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔ اپنے نتیجہ کی تشریح کرو۔

توضیحی مثالیں

(۱) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے ہر مقام کے لئے $\text{ن ا}^۲ + \text{ن ب}^۲$ ایک مستقل مقدار ہے، اس کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\text{ن ا}^۲ + \text{ن ب}^۲ = \text{ج}^۲$، ا ب کو محور لا فرض کرو اور تشاکل کے لحاظ سے اس کے نقطہ تنصیف و کو مبدأ قرار دو، نیز فرض کرو کہ محور قائم ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب کا طول ۲ ا ہے، تب ا کے محدد (− ا، ۰) اور ب کے (ا، ۰) ہوں گے، فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں

تب $ن اَ^2 = (لا + ا_1)^2 + ما^2$ ، $ن بَ^2 = (لا - ا_1)^2 + ما^2$

$\therefore\ ن اَ^2 + ن بَ^2 = 2\,(لا^2 + ما^2 + ا_1^2)$

$\therefore\ لا^2 + ما^2 = \frac{1}{2}ج^2 - ا_1^2$

یعنی $و ن^2 = \frac{1}{2} ج^2 - ا_1^2$ یعنی ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز اب کا نقطہ وسطی ہے۔

(۲) مبدأ میں سے گذرنے والے دو ایسے خطوط کی مساوات معلوم کرو جو بالترتیب خطوط $ا_1 لا^2 + 2\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 = 0$ پر عمود ہوں۔ (محور قائم ہیں)

فرض کرو کہ معلومہ خطوط مستقیم $ما - م_1 لا = 0$ ، $ما - م_2 لا = 0$ ہیں

یعنی $م_1 + م_2 = -\frac{2ھ}{ب}$ ، $م_1 م_2 = \frac{ا_1}{ب}$

ایسے خطوط جو ان پر بالترتیب عمود ہوں انکی مساواتیں

$م_1 ما + لا = 0$ اور $م_2 ما + لا = 0$ ہونگی [مسئلہ ۱۹]

جن سے مساوات $(م_1 ما + لا)(م_2 ما + لا) = 0$

یعنی $م_1 م_2 ما^2 + (م_1 + م_2) لا\,ما + لا^2 = 0$

حاصل ہوتی ہے۔

اب $م_1 + م_2$ اور $م_1 م_2$ کی قیمتیں مندرج کرنے سے مطلوبہ مساوات $ب\,لا^2 - 2\,ھ\,لا\,ما + ا_1 ما^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

(۳) ا اَ ، ب بَ دو معلومہ محدود خطوط مستقیم ہیں۔ ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ رقبوں ا ن اَ ، ب ن بَ کا مجموعہ مستقل رہتا ہے، ن کا طریق دریافت کرو۔

فرض کرو کہ یہ مجموعہ Δ ہے، نیز فرض کرو کہ ا اَ ، ب بَ نقطہ و پر قطع کرتے ہیں۔ و ا اَ ، و ب بَ کو بالترتیب محور لا اور ما قرار دو، بالعموم یہ محور مائل ہوں گے، فرض کرو کہ ان کا زاویہ میلان سمہ ہے۔ فرض کرو کہ $و ا = ا_1$ ، $و اَ = اَ_1$ ، $و ب = ب_1$ ، $و بَ = بَ_1$ ، نیز فرض کرو کہ $اَ_1$ بڑا ہے $ا_1$ سے اور $بَ_1$ بڑا ہے $ب_1$ سے۔ فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما)

ہیں جبکہ یہ مثبت ربع میں ہو، اوپر کے مفروضات کی بناء پر مثلث ن ا$_1$ اَ$_1$ کے راسوں ن، ا$_1$، اَ$_1$ کے محدد جو گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت میں واقع ہوں گے (لا، ما) (ا$_1$، ۰)، (اَ$_1$، ۰) ہوں گے۔

$$\text{اس لئے رقبہ ن ا}_1\text{اَ}_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{ما}\,(\text{اَ}_1 - \text{ا}_1)\ \text{جب سہ} \qquad (\text{دفعہ ۴})$$

$$\text{اسی طرح سے رقبہ ن بَ}_1\text{ب}_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{لا}\,(\text{بَ}_1 - \text{ب}_1)\ \text{جب سہ}$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}\,\text{ما}\,(\text{اَ}_1 - \text{ا}_1)\ \text{جب سہ} + \tfrac{1}{2}\,\text{لا}\,(\text{بَ}_1 - \text{ب}_1)\ \text{جب سہ} = \triangle$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{لا}}{\text{اَ}_1 - \text{ا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{بَ}_1 - \text{ب}_1} = \frac{2\triangle}{(\text{اَ}_1 - \text{ا}_1)(\text{بَ}_1 - \text{ب}_1)\ \text{جب سہ}} \quad \cdots (1)$$

جو ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو

$$\frac{\text{لا}}{\text{اَ}_1 - \text{ا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{بَ}_1 - \text{ب}_1} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

کے متوازی ہے۔

نوٹ جب ن، ا$_1$ اَ$_1$ کو عبور کرتا ہے تو ما منفی ہو جاتا ہے اور تحلیلی عمل میں رقبہ ن ا$_1$ اَ$_1$ منفی ہو جاتا ہے اور راس ن، ا$_1$، اَ$_1$ اب سمت ساعت میں واقع ہوتے ہیں، پس طریق کے اس حصہ کی ہندسی تشریح کے لئے ہمیں سوال مذکور کو اس طرح بیان کرنا ہوگا۔

رقبوں ن ا$_1$ اَ$_1$ اور ن ب$_1$ بَ$_1$ کا فرق جبکہ صرف مقدار کو ملحوظ رکھا جائے اور علامت سے قطع نظر کی جائے △ کے مساوی ہے۔

(۴) ایک جھنڈا ھ ک ایک عمودی ٹیلہ و ھ پر قائم ہے اور اس کے محاذی دو نقاط ا اور ب پر وہی زاویہ عہ بنتا ہے جہاں ا اور ب دونوں ٹیلہ کے پائیں و میں سے گذرنے والے افقی خط مستقیم پر واقع ہیں اور ان کے فاصلے و سے بالترتیب ا، ب ہیں، ثابت کرو کہ جھنڈے کی بلندی (ا$_1$ + ب$_1$) مس عہ ہے۔

و ا ب کو محور لا اور و ھ ک کو محور ما قرار دو، یہ محور قائم الزاویہ ہونگے تب و ا = ا، و ب = ب، فرض کرو کہ و ھ = ج$_1$، ھ ک = ف$_1$ پس ھ اور ک کے محدد (۰، ج$_1$) اور (۰، ج$_1$ + ب$_1$) ہوں گے۔

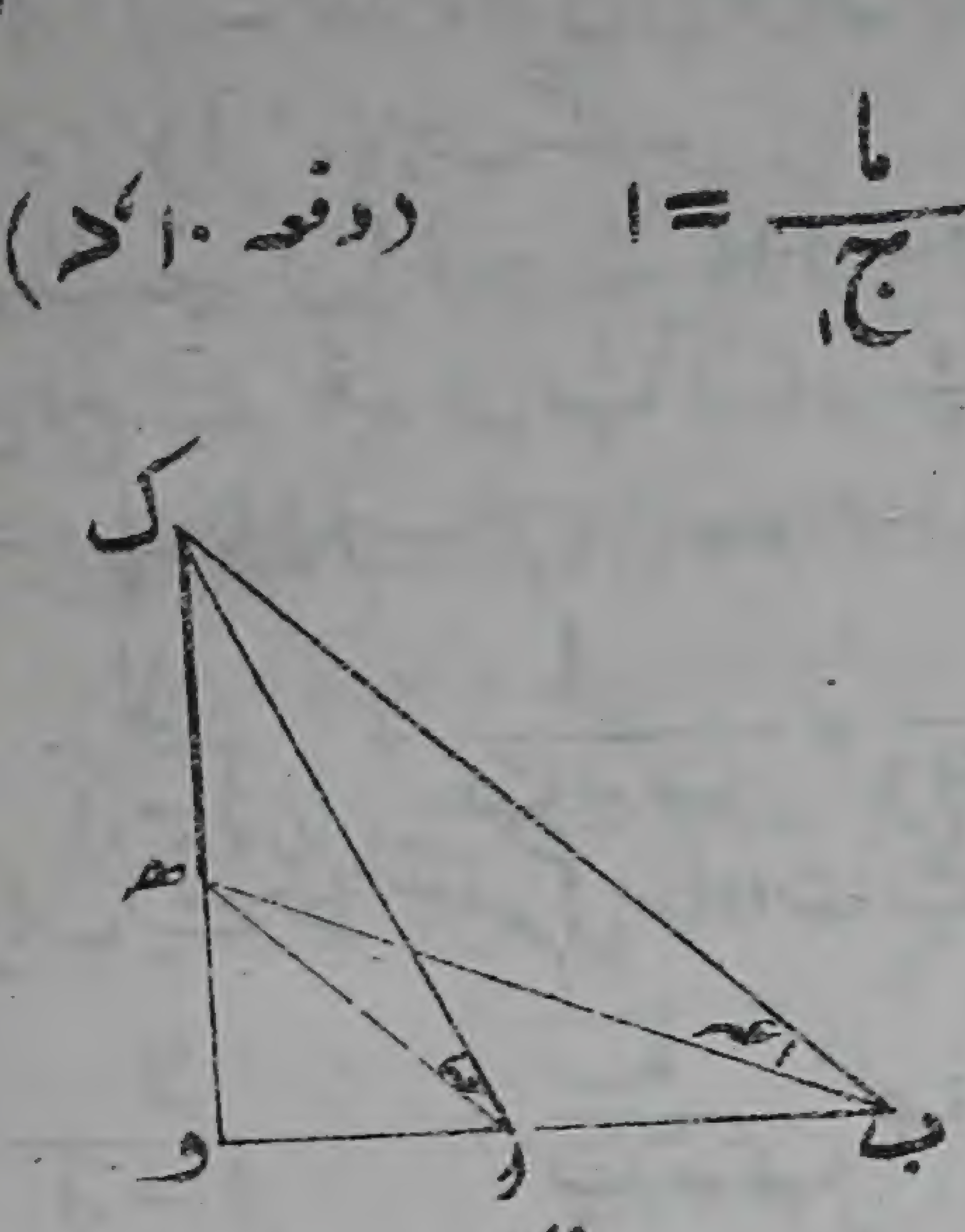
ھ کو خط و ا ب پر کے نقطہ $(\text{لا}_1, 0)$ کے ساتھ ملانے والے خط مستقیم کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1} = 1 \qquad \text{(دفعہ ۱۰، د)}$$

ک کو اسی نقطہ سے ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1+\text{ب}_1} = 1$$

ہوگی۔ اور ان دو خطوں میں جو زاویہ فہ بنتا ہے وہ مساوات ذیل سے معلوم ہوگا



شکل ۲۳

$$\text{مس فہ} = \frac{-\frac{\text{ج}_1+\text{ف}_1}{\text{لا}_1}+\frac{\text{ج}_1}{\text{لا}_1}}{1+\frac{\text{ج}_1(\text{ج}_1+\text{ف}_1)}{\text{لا}_1^2}} = \frac{\text{ف}_1\,\text{لا}_1}{\text{لا}_1^2+\text{ج}_1\text{ف}_1+\text{ج}_1^2} \qquad [\text{دفعہ ۱۹}]$$

یا $\text{لا}_1^2 - \text{لا}_1\text{ف}_1\ \text{مم فہ} + \text{ج}_1\text{ف}_1 + \text{ج}_1^2 = 0$ .... (۱)

شرائط سوال کے بموجب اگر فہ = عہ تو لا_1 کی اس مساوات درجہ دوم کی دو اصلیں ا_1 اور ب_1 ہیں

$\therefore\ \text{ا}_1+\text{ب}_1$ = اصلوں کا مجموعہ جبکہ فہ = عہ

$= \text{ف}_1\ \text{مم عہ}$

جس سے نتیجہ مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

[ملاحظہ ہو کہ لا_1 کی دو الگ الگ قیمتیں نکالنے کے لئے مساوات درجہ دوم کو حل کرنا ضروری نہیں]

(۵) ا ب ج د ایک ذواربعۃ الاضلاع ہے، ا ب، ج د ایک دوسرے کو نقطہ و پر قطع کرتے ہیں، ا ج، ب د نقطہ ن پر اور ا د، ب ج

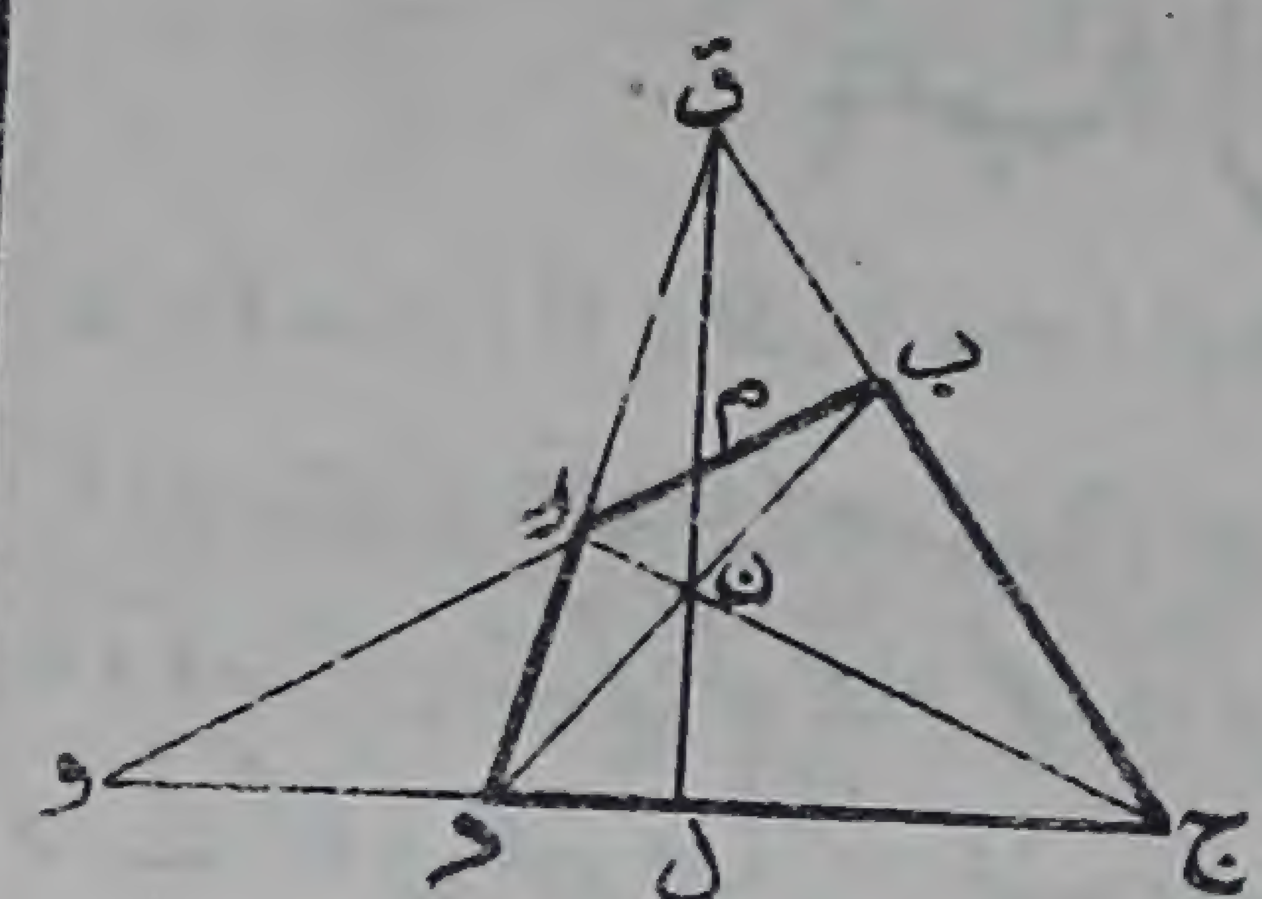
نقطہ ق پر، ن ق، ا ب کو م پر اور ج د کو ل پر کاٹتا ہے

ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{وا}} + \frac{1}{\text{وب}} = \frac{2}{\text{وم}}$، $\frac{1}{\text{وج}} + \frac{1}{\text{ود}} = \frac{2}{\text{ول}}$

فرض کرو کہ و ا = ا۱، و ب = ب۱، و ج = ج۱، و د = د۱

و ا ب اور و ج د کو محور لا اور ما فرض کرو، یہ محور مائل ہونگے۔

ا د کی مساوات ہے



شکل ۲۴

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{د}_1} - 1 = 0$ ......(ا)

ب ج کی $\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1} - 1 = 0$ ......(ب)

ا ج کی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1} - 1 = 0$ ......(ج)

اور ب د کی $\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{د}_1} - 1 = 0$ ......(د) [دفعہ ۱۰ د]

چونکہ ن ق خطوط ا د اور ب ج کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے اس لئے اس کی مساوات ذیل کی شکل کی ہونی چاہیئے

$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{د}_1} - 1\right) + \text{ک}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1} - 1\right) = 0$ ......(ع)

نیز ن ق خطوط ا ج اور ب د کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے اس لئے

اسکی مساوات اس شکل $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1} - 1\right) + \text{کَ}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1} + \frac{\text{ما}}{\text{د}_1} - 1\right) = 0$ ......(ف)

کی ہونی چاہئے۔ ن ق کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہمیں ک اور کَ کو اس طرح منتخب کرنا چاہیے کہ (ع) اور (ف) ایک ہی خط مستقیم کو تعبیر کریں۔

اس سے لازم آتا ہے کہ ک = ۱ اور کَ = ۱

اس لئے ن ق کی مساوات ہے

$$\text{لا}\left(\frac{1}{\text{ا}_1}+\frac{1}{\text{ب}_1}\right)+\text{ما}\left(\frac{1}{\text{ج}_1}+\frac{1}{\text{د}_1}\right)-2=0$$

جہاں ن ق، اب کو کاٹتا ہے اس نقطہ کا لا = و م اور ما = ۰

اس لئے $\frac{2}{\text{و م}}=\frac{1}{\text{ا}_1}+\frac{1}{\text{ب}_1}$ اور اسی طرح سے $\frac{2}{\text{و ل}}=\frac{1}{\text{ج}_1}+\frac{1}{\text{د}_1}$

باب اول پر متفرق مشقیں

۱۰۷ — (۱، ۱) اور (−۳، ۴) کے ملانے والے خط کو جو نقاط داخلاً نسبت ۲:۱ سے اور خارجاً نسبت ۱:۳ سے تقسیم کرتے ہیں ان کے محدد معلوم کرو۔

۱۰۸ — ثابت کرو کہ خواہ محور قائم ہوں یا مائل (لا، ما) اور (−لا، ما) کو ملانے والے خط کی محور ما تنصیف کرتا ہے۔

۱۰۹ — ذیل کے طریق مرتسم کرو (۱) طہ = $\frac{\pi}{4}$ (۲) ر = ۳ (۳) جب ۲طہ = ۰

۱۱۰ — ایک متحرک نقطہ اور (۴، ۰) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ہمیشہ اس فاصلہ کے مربع کا چار گنا ہوتا ہے جو متحرک نقطہ اور (۱، ۰) کے درمیان ہو۔ نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۱۱۱ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے فاصلوں کے مربعے مبدأ اور (۴، ۳) سے مساوی ہوں۔

۱۱۲ — مساوات ۴ لا^2 = ۹ ما^2 کا طریق دریافت کرو۔

۱۱۳ — مساوات $\text{لا}^2+\text{ما}^2=36$ کا طریق دریافت کرو۔

۱۱۴ — محوروں کا زاویہ میلان سہ ہے اور ن کوئی نقطہ (لا_1، ما_1) ہے، ن سے محوروں پر عمود ن ل اور ن م نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

$$\text{و ل}=\text{لا}_1+\text{ما}_1\,\text{جم سہ}\ ،\quad \text{و م}=\text{لا}_1\,\text{جم سہ}+\text{ما}_1$$

ل م کی مساوات حاصل کرو۔

۱۱۵ — اگر مثال بالا میں ل م ایک ثابت نقطہ (ف، ق،) میں سے گذرے

تو ن سے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۱۱۶۔ ایک خط مستقیم کا جو حصہ دونوں محوروں کے درمیان کٹتا ہے اس کا نقطہ تنصیف $(\text{لا}_{۱}،\ \text{ما}_{۱})$ ہے۔ ثابت کرو کہ خط کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{۲\,\text{لا}_{۱}} + \frac{\text{ما}}{۲\,\text{ما}_{۱}} = ۱ \text{ ہے۔}$$

۱۱۷۔ ایک خط مستقیم ایک ثابت نقطہ $(\text{لا}_{۱}،\ \text{ما}_{۱})$ میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا جو حصہ محوروں کے درمیان کٹتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کے طریق کی مساوات $\frac{\text{لا}_{۱}}{۲\,\text{لا}} + \frac{\text{ما}_{۱}}{۲\,\text{ما}} = ۱$ ہے۔

۱۱۸۔ خطوط ذیل سے جوڑوں کے درمیان جو زاوئے بنتے ہیں انکے مماس معلوم کرو، محور قائم ہیں

(۱) $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۰$　(۲) $۲\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا ما} - ۴\,\text{ما}^{۲} = ۰$

(۳) $\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲} = ۰$　(۴) $\text{لا}^{۲} + \text{لا ما} + \text{ما}^{۲} = ۰$

آخری صورت میں مماس کے خیالی ہونے کے معنی سمجھاؤ۔

۱۱۹۔ جن نقاط پر خط مستقیم $\text{لا} + ۲\,\text{ما} = ۳$ منحنی $\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا ما} - \text{ما}^{۲} + ۲\,\text{لا} + \text{ما} + ۱ = ۰$ سے ملتا ہے ان کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

۱۲۰۔ اگر دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ر}^{۲}$ کے ایک وتر $\text{ل لا} + \text{م ما} = ۱$ سے محاذی مبدأ پر زاویہ ۴۵° بنے تو

$$۴\left\{\text{ر}^{۲}(\text{ل}^{۲} + \text{م}^{۲}) - ۱\right\} = \left\{\text{ر}^{۲}(\text{ل}^{۲} + \text{م}^{۲}) - ۲\right\}^{۲}$$

۱۲۱۔ چار خطوط $\text{لا} + \text{ما} + ۱ = ۰$، $\text{لا} - \text{ما} + ۲ = ۰$، $۴\,\text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۳ = ۰$ کے، $\text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۴ = ۰$ کو دو دو کرکے لینے سے جو چھ نقاطِ تقاطع حاصل ہوتے ہیں اِن کے محدد معلوم کرو۔

اس لئے ان خطوط سے جو ذواربعۃ الاضلاع بنتا ہے اس کے تین قطروں کی مساواتیں معلوم کرو، اور ثابت کرو کہ ان قطروں کے نقاط تنصیف ایک خط

مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جس کی مساوات ۵۲ لا + ۸۰ ما − ۷۴ = ۰ ہے۔

۱۲۲ — اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط ما = م لا، ما = ل لا، ا لا + ب ما + ج = ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ ۱/۲ × (م − ل) ج^2 / (ا + ب م)(ا + ب ل) ہے۔

۱۲۳ — ھ کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ لا^2 + ۲ ھ لا ما + ما^2 + ۱۶ لا − ۵ ما − ۳۶ = ۰ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

۱۲۴ — ثابت کرو کہ مساوات ۶ لا^2 − لا ما − ۱۲ ما^2 − ۸ لا + ۲۹ ما − ۱۴ = ۰ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۲۵ — اگر ایک متغیر خط مستقیم دو معلومہ متقاطع خطوط مستقیم پر ایسے حصے کاٹے جن کے متکافیوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۲۶ — اگر ایک متحرک خط مستقیم پر دو ثابت نقاط (۳، ۴)، (۷، ۲) سے عمود نکالے جائیں تو ان کا مجموعہ اُس عمود کا تین گنا ہوتا ہے جو ایک تیسرے ثابت نقطہ (۱، ۳) سے اسی خط پر نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ خط ایک اور ثابت نقطہ میں سے ہمیشہ گذرتا ہے، اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

۱۲۷ — اگر ایک متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع اب، اج نقاط ع اور ف تک اتنے خارج کئے جائیں کہ ب ع × ج ف = اب^2 تو ثابت کرو کہ ع ف ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۲۸ — ثابت کرو کہ مساوات

لا^3 + ما^3 − ۳ لا^2 ما − ۳ لا ما^2 + ۶ لا^2 − ۶ ما^2 + ۶ لا + ۶ ما = ۰

تین ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ ان کے مقامات کو شکل میں دکھاؤ۔

۱۲۹ — محوروں کو حادہ زاویہ مس$^{-1}$ ۳/۴ میں پھرانے کا ضابطہ لکھو۔

۱۳۰ — مائل محوروں و لا اور و ما کا زاویہ میلان س ہے اور ان کے

لحاظ سے ایک نقطہ کے محدد (لا ، ما) ہیں، اسی نقطہ کے محدد و لا اور و میں سے گذرنے والے عمود کے لحاظ سے (لاَ ، ماَ) ہیں، شکل کھینچکر ثابت کرو کہ

لاَ = لا + ما جم سہ ، ماَ = ما جب سہ

۱۳۱- اگر نئے محور بالترتیب ۳ لا - ۴ ما = ۰ ، لا - ما + ۱ = ۰ ہوں تو مساواتوں کے لئے تحویلی ضابطے معلوم کرو۔ پرانے نقطہ (۱ ، ۱) کے محدد نئے نظام میں دونوں منفی ہیں اور نئے محوروں کا درمیانی زاویہ حادہ ہے۔

۱۳۲- ایک خط مستقیم ن ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ہمیشہ و لا پر واقع ہوتا ہے اور ق ، و ما پر۔ نیز جو حصے یہ محوروں پر کاٹتا ہے ان کا فرق △ ن و ق کے متناسب ہے، ثابت کرو کہ یہ خط ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۳۳- اگر ایک متوازی الاضلاع کے ایک ضلع ا ب کو خط ابتدائی اور ا کو قطب قرار دیا جائے تو متوازی الاضلاع کے قطروں کی قطبی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۳۴- تین خطوط مستقیم ۴ لا + ۴ ما = ۱ ، ۳ لا + ۴ ما = ۱ ، ۴ لا + ۳ ما = ۱ کے باہمی تقاطع سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۳۵- خطوط ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰ اور ن لا + ق ما = ر سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۳۶- ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ع ف کو ا ب کے اور گ ھ کو ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ اضلاع سے بالترتیب ع ، ف ، گ ، ھ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ع گ اور ف ھ متوازی الاضلاع کے ایک قطر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

۱۳۷- نقطہ (ن ، ق) سے خطوط مستقیم ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰ پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کا حاصل ضرب معلوم کرو۔

۱۳۸- کئی مثلث کھینچے گئے ہیں جن کا مشترک راس ن ہے اور قاعدے ا₁ب₁ ، ا₂ب₂ ، ... ہیں جہاں ا₁ ، ا₂ ... ب₁ ، ب₂ ... ثابت نقطے ہیں

اگر ان مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۳۹- ا ب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے اور راس کا زاویہ ا قائمہ ہے، اگر ب اور ج دو ایسے ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہوں تو ا کا طریق معلوم کرو۔

۱۴۰- ایک مثلث کا قاعدہ اور مثلث کے قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق دیا ہوا ہے، راس کا طریق معلوم کرو۔

۱۴۱- ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، اگر زاویہ ا اور اضلاع کا مجموعہ دونوں مستقل ہوں تو ثابت کرو کہ ج کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۴۲- ثابت کرو کہ ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ اور ف لا^۲ + ۲ ق لا ما + ر ما^۲ = ۰ کا ایک خط مشترک ہوگا اگر

(ا ر - ب ف)^۲ + ۴ (ھ ف - ا ق) (ھ ر - ب ق) = ۰

۱۴۳- اگر ایک متحرک خط مستقیم پر ن ثابت نقطوں سے عمود نکالے جائیں تو ان کا مجموعہ صفر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۴۴- ثابت کرو کہ خطوط ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ میں سے ایک خط اور خطوط ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ک (لا^۲ + ما^۲) میں سے ایک خط کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ باقی دو خطوط کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

آزمائشی پرچہ

۱- ایک مثلث کا قاعدہ ۲ا اور راسی زاویہ ا معلوم ہے، راس کا طریق دریافت کرو، ہندسی طریق پر اس کی تصدیق کرو۔

۲- ذیل کی مساواتوں کے طریق مرتسم کرو۔

(۱) ر (جم طہ + √۳ جب طہ) = ۲√۳ ا

(۲) ر جب طہ = ا

۳- ثابت کرو کہ مساوات

ا لا + ب ما + ج + ک (اَ لا + بَ ما + جَ) = ۰

ایک ایسے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو خطوط ا لا + ب ما + ج = ۰ اور
اَ لا + بَ ما + جَ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ نیز ک کی ایسی
قیمت معلوم کرو کہ یہ خط مبدأ میں سے بھی گذرے۔

۴۔ ۳ لا + ۲ ما − ۱ = ۰ اور ۴ لا + ۳ ما + ۲ = ۰
کے نقطہ تقاطع کے محدد معلوم کرنے کے بغیر ان خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو
اس نقطہ تقاطع کو (۱) مبدأ سے (۲) نقطہ (−۱، ۳) سے ملائیں۔

۵۔ قائم محوروں کی لحاظ سے خطوط
(۷ لا − ۶ ما − ۱۶)(۹ لا + ۲ ما − ۳۲) = ۰ کو شکل میں مرتسم کرو اور ان کے
درمیانی زاویہ کا مماس معلوم کرو۔
اگر ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصّف محور لا سے نقاط ن اور
ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ن ق کا طول ۵ اکائیاں ہے۔

۶۔ اس میں بالعموم زیادہ سہولت ہے کہ پرانے محددوں کو نئے محددوں کی
رقوم میں بیان کیا جائے بجائے اس کے کہ نئے محددوں کو پرانے محددوں کی
رقوم میں بیان کیا جائے، اس کی وجہ بیان کرو۔

۷۔ اگر محوروں کو زوایا (۱) ۳۰° (۲) ۴۵° میں پھرا دیا جائے تو معلوم کرو کہ
ہر صورت میں مساوات لا^۲ − ما^۲ = ۰ کیا ہو جائے گی۔

۸۔ مائل محوروں و لا اور و ما کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔ ان محوروں کے
لحاظ سے ایک نقطہ کے محدد (لا، ما) ہیں اور اسی نقطہ کے محدد محوروں
و لا اور و میں سے گذرنے والے عمود کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) ہیں،
شکل سے ثابت کرو کہ لاَ = لا + ما جم سہ، ماَ = ما جب سہ اور اسلئے

ما = ماَ / جب سہ ، لا = (لاَ جب سہ − ماَ جم سہ) / جب سہ

۹۔ سوال ماقبل میں معلوم کرو کہ مساوات ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰
کیا ہو جائے گی اگر اسے لاَ، ماَ کی رقوم میں بیان کیا جائے اور اس سے

ثابت کرو کہ دو خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں گے اگر

ا + ب - ۲ ھ جم سہ = ۰

۱۰- قائم محوروں کی صورت میں ثابت کرو کہ جو خط

۵ لا^۲ + ۱۲ لا ما - ۶ ما^۲ + ۴ لا - ۲ ما + ۳ = ۰ اور لا - ما - ۱ = ۰

کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں وہ محوروں سے مساوی زاوئے بناتے ہیں -

حصہ دوم

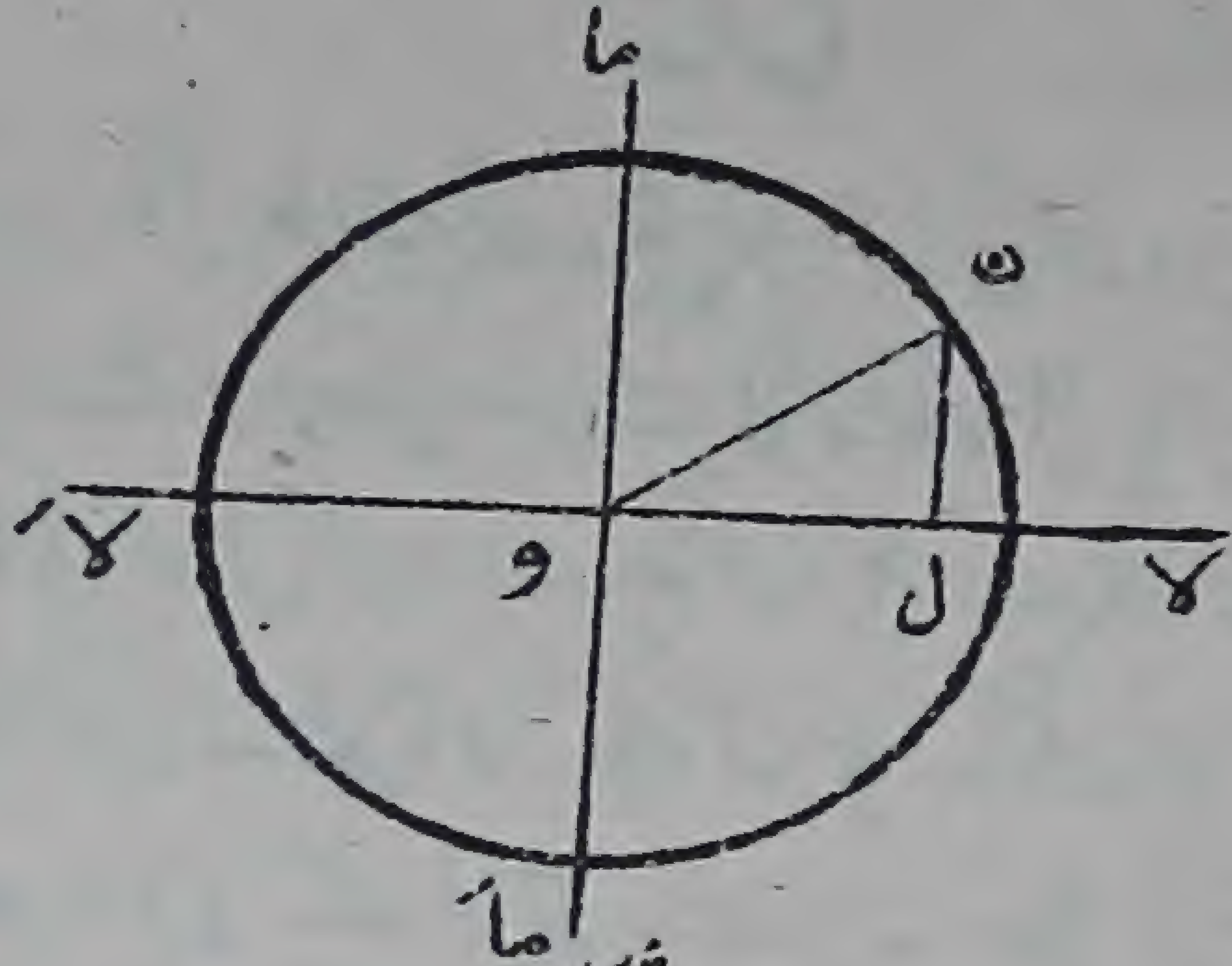
دائرہ اور مخروطی تراشیں

باب اول

دائرہ

۱- دائرہ کے محیط کی مساوات معلوم کرو جبکہ دائرہ کے مرکز کو مبدأ قرار دیا جائے۔

(۱) **قائم محور۔** فرض کرو کہ و مرکز ہے، ا نصف قطر اور ن (لا، ما) محیط پر کوئی نقطہ ہے، ن سے معین ن ل کھینچو۔



شکل ۱

چونکہ و ن = ا اسلئے جو ہندسی شرط ن پوری کرتا ہے وہ یہ ہے $\text{و ل}^2 + \text{ل ن}^2 = \text{ا}^2$

اس کو تحلیلی طریق پر اس طرح بیان کرینگے کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ . . . . . . (۱)

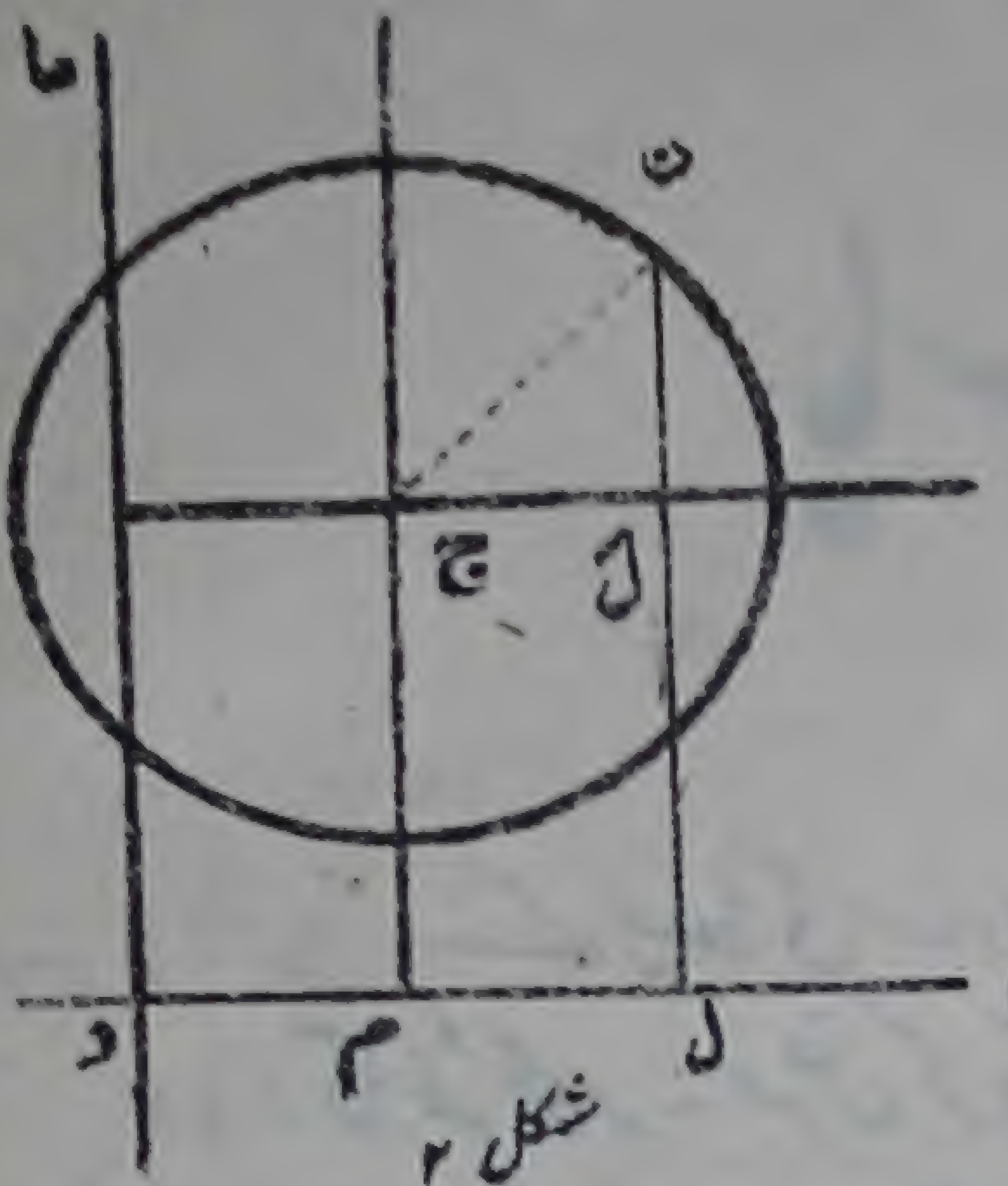
جو دائرہ کی مساوات مطلوبہ ہے۔

(۲) **مائل محور۔** اُسی قسم کے استدلال سے جو حصہ اول دفعہ ۲ میں اختیار کیا گیا ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات مطلوبہ حسب ذیل ہے

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{لا ما جم سہ} = \text{ا}^2$ ....(۲)

۲- دائرہ کی عام مساوات معلوم کرو (محور قائم ہیں)

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محدد (ھ، ک) ہیں، نیز فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے۔



شکل ۲

معین ن ل اور ج م کھینچو
اور ج لَ کو ولا کے متوازی کھینچو
جو ن ل سے لَ پر ملے
نقطہ ن یہ ہندسی شرط پوری کرتا ہے

ج لَ^{2} + لَ ن^2 = ر^2

اور تحلیلی طریق پر اسے ہم اس طرح بیان کرسکتے ہیں کہ

(لا - ھ)^2 + (ما - ک)^2 = ر^2 .... (۳)

مشقیں

۱- مساوات بالا کی حسب ذیل طریقہ پر تصدیق کرو- ابتدائی محوروں کے متوازی مرکز ج میں سے گذرنیوالے محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ر^2 حاصل کرو۔ پھر محاور ولا اور وما کے لحاظ سے مساوات کی تحویل کرو- اب چونکہ ج کے محدد ولا اور وما کے لحاظ سے (ھ، ک) ہیں اس لئے یاد رہے کہ و کے محدد ج میں سے گذرنیوالے متوازی محوروں کے لحاظ سے (- ھ، - ک) ہیں-

۲- مساوات (۳) کو پھیلا کر لکھنے سے

لا^2 + ما^2 - ۲ ھ لا - ۲ ک ما + ھ^2 + ک^2 - ر^2 = ۰

پس معلوم ہوا کہ دائرہ کی عام مساوات قائم محوروں کے لحاظ سے درجہ دوم کی ایک مساوات ہے جس میں لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہوتے ہیں اور لا ما کا سر صفر ہوتا ہے- عام مساوات کو بالعموم اس شکل میں لکھتے ہیں

لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ .... (۴)

مساوات (۴) کو اِس شکل (لا + گ)^2 + (ما + ف)^2 = گ^2 + ف^2 - ج میں لکھنے اور مساوات (۳) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۴) ایک ایسے دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا مرکز نقطہ (- گ، - ف) ہے اور نصف قطر گ^2 + ف^2 - ج ہے۔
مساوات (۴) میں اگر مستقل رقم ج کو بدلا جائے تو اس کا اثر یہ ہوگا کہ دائرہ کا

نصف قطر بدلیگا لیکن اس سے مرکز کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئیگا، پس ج کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے ہم ہم مرکز دائروں کا ایک سلسلہ حاصل کرسکتے ہیں۔

عام صورتوں میں جملہ گ^2 + ف^2 - ج مثبت ہوگا کیونکہ یہ نصف قطر کے مربع کے مساوی ہے، جب یہ جملہ صفر کے مساوی ہوگا تو مساوات ایک ایسے دائرہ کو تعبیر کریگی جس کا نصف قطر صفر ہو اور مرکز (-گ، -ف) یعنی اس صورت میں مساوات مفروضہ خود نقطہ (-گ، -ف) کو تعبیر کریگی۔ ایسی صورت میں طریق کو **نقطہ دائرہ** کہتے ہیں۔

جب گ^2 + ف^2 - ج منفی ہو تو علامت جذر کے اندر کی مقدار منفی ہوگی اور دائرہ بالتمام خیالی ہوگا یعنی اس صورت میں کسی حقیقی نقطہ کے محدد مساوات کو پورا نہیں کرسکینگے۔

۴۔ **نقطہ دائرہ**۔ جب گ^2 + ف^2 - ج = ۰ تو مساوات ایک مسلسل منحنی کو تعبیر کرنے کی بجائے ایک نقطہ کو تعبیر کرتی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ اس صورت میں مساوات ہوجاتی ہے (لا + گ)^2 + (ما + ف)^2 = ۰ جو فی الحقیقت دو مساواتیں ہیں کیونکہ ایک مربع منفی نہیں ہوسکتا اسلئے ہر خطوط وحدانی کو الگ الگ صفر ہونا چاہیئے۔

پس اس طرح ہمیں دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں لا + گ = ۰ اور ما + ف = ۰ جس سے نقطہ (-گ، -ف) کی تعیین ہوتی ہے۔

۵۔ دائرہ کی عام مساوات معلوم کرو (مائل محور)

نقاط (لا، ما)، (ھ، ک) کا درمیانی فاصلہ

(لا - ھ)^2 + (ما - ک)^2 + ۲ (لا - ھ) (ما - ک) جم سہ

کے جذر کے مساوی ہے۔

اس لئے مائل محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی عام مساوات ہے

(لا - ھ)^2 + (ما - ک)^2 + ۲ (لا - ھ) (ما - ک) جم سہ = ق^2

یا لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 - ۲ (ھ + ک جم سہ) لا - ۲ (ھ جم سہ + ک) ما

+ ھ^2 + ۲ ھ ک جم سہ + ک^2 - ق^2 = ۰ ...... (۵)

پس اس صورت میں لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہیں اور لا ما کا سر لا^2 یا ما^2 کے سر کا (۲ جم سہ) گنا ہے۔

۶۔ تین نقاط معلومہ میں سے گذرنے والے دائرہ کی مساوات

قائم محور۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہے، اس مساوات میں تین مستقل مقداریں گ، ف، ج شامل ہوتی ہیں جنہیں معلوم کرنا مقصود ہے۔ (اس سے ظاہر ہے کہ ایک دائرہ عام طور پر معلوم ہو سکتا ہے جو کسی تین نقاط معلومہ میں سے گذرے) اوپر کی مساوات میں ہر نقطہ کے محدد مندرج کرنے سے گ، ف، ج میں تین ہمزاد سادہ مساواتیں حاصل ہونگی جن سے گ، ف، ج معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس کے متعلق کوئی ضابطہ مرتب کرنا لاحاصل ہے، صرف طریق عمل کا یاد رکھنا ضروری ہے۔

مائل محور۔ طریق عمل وہی ہے صرف عام مساوات میں درجہ دوم کی ارقام لا^2 + ما^2 کی بجائے لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ ہونا چاہیئے۔

مثال۔ اگر محور قائم ہوں تو اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۲۰، ۳)، (۱۹، ۸) اور (۲، -۹) میں سے گذرتا ہو۔

اگر دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہو تو محدد مندرج کرنے سے

۴۰ گ + ۶ ف + ج = - ۴۰۹

۳۸ گ + ۱۶ ف + ج = - ۴۲۵

۴ گ - ۱۸ ف + ج = - ۸۵

جس سے گ = - ۷، ف = - ۳، ج = - ۱۱۱ پس دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 - ۱۴ لا - ۶ ما - ۱۱۱ = ۰ ہے، یا اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں (لا - ۷)^2 + (ما - ۳)^2 = ۱۶۹

جو ایک دائرہ ہے جس کا مرکز (۷، ۳) ہے اور نصف قطر ۱۳۔

مشقیں

ذیل کی مشقوں میں سے ۶ تا ۹ قائم محوروں سے متعلق ہیں۔

۲ - ذیل کے معطیات کی بناء پر دائروں کی مساواتیں معلوم کرو
(ا) مرکز ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$)، نصف قطر $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (ب) مرکز (۳، -۲)، نصف قطر ۳
(ج) مرکز (۰، -۱)، نصف قطر ۱

۳ - ذیل کے دائروں کے مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔
(ا) لا^2 + ما^2 + ۴ لا - ۴ ما = ۱ (ب) لا (لا + ما - ۶) = ما (لا - ما + ۸)
(ج) لا^2 + ما^2 + ۲ ا (لا - ما) + ا^2 = ۰ (د) (لا - ا) (لا - ج) + (ما - ب) (ما - د) = ۰
(ع) (لا - ما + ا)^2 + (لا + ما - ا)^2 = ۲ ا^2

۴ - اگر لا^2 + لا ما + ما^2 - ۴ لا - ۵ ما - ۲ = ۰ ایک دائرہ کو تعبیر کرے تو محوروں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو اور اس دائرہ کا نصف قطر اور مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۵ - مائل محوروں کے لحاظ سے لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہے، اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

۶ - نقاط ذیل میں سے گذرنیوالے دائروں کی مساواتیں معلوم کرو اور ہر صورت میں دائرہ کے مرکز کو مبدأ مان کر انہیں تحویل کرو
(ا) (۱، ۰)، (۲، ۳)، (۳، -۱) (ب) (ھ، ک)، (ھ، ۰)، (۰، ک)
(ج) (۱، ۶)، (۳، ۲)، (۲، ۳) (د) (ا، ب)، (ا، ا)، (ب، ب)

۷ - ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو
(ا) جو (۰، ۰) میں سے گذرتا ہے اور محوروں پر حصے ا، ب کاٹتا ہے۔
(ب) جس کا مرکز (ھ، ک) ہے اور جو نقطہ (ف، ق) میں سے گذرتا ہے۔

۸ - مبدأ سے ایک متحرک نقطہ کے فاصلہ کا مربع محور لا سے اس کے فاصلہ کا ا گنا ہوتا ہے جہاں ا مستقل ہے، نقطہ کا طریق معلوم کرو نیز طریق کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو۔

۹ - مبدأ سے ایک متحرک نقطہ کے فاصلہ کا مربع خط لا = $\frac{1}{2}$ ا سے اس کے فاصلہ کا ۲ ا گنا ہوتا ہے، ثابت کرو کہ طریق ایک نقطہ دائرہ ہے، اس کا مقام معلوم کرو۔

۱۰ - ثابت کرو کہ جو حصے دائرہ (لا - لا$_1$)^2 + (ما - ما$_1$)^2 + ۲ (لا - لا$_1$) (ما - ما$_1$) جم سہ = ل^2 محوروں پر کاٹتا ہے اُن کے حاصل ضرب باہم مساوی ہیں، اِس سے اقلیدس

م ۳ ش س ۳۶ کا نتیجہ حاصل کرو۔

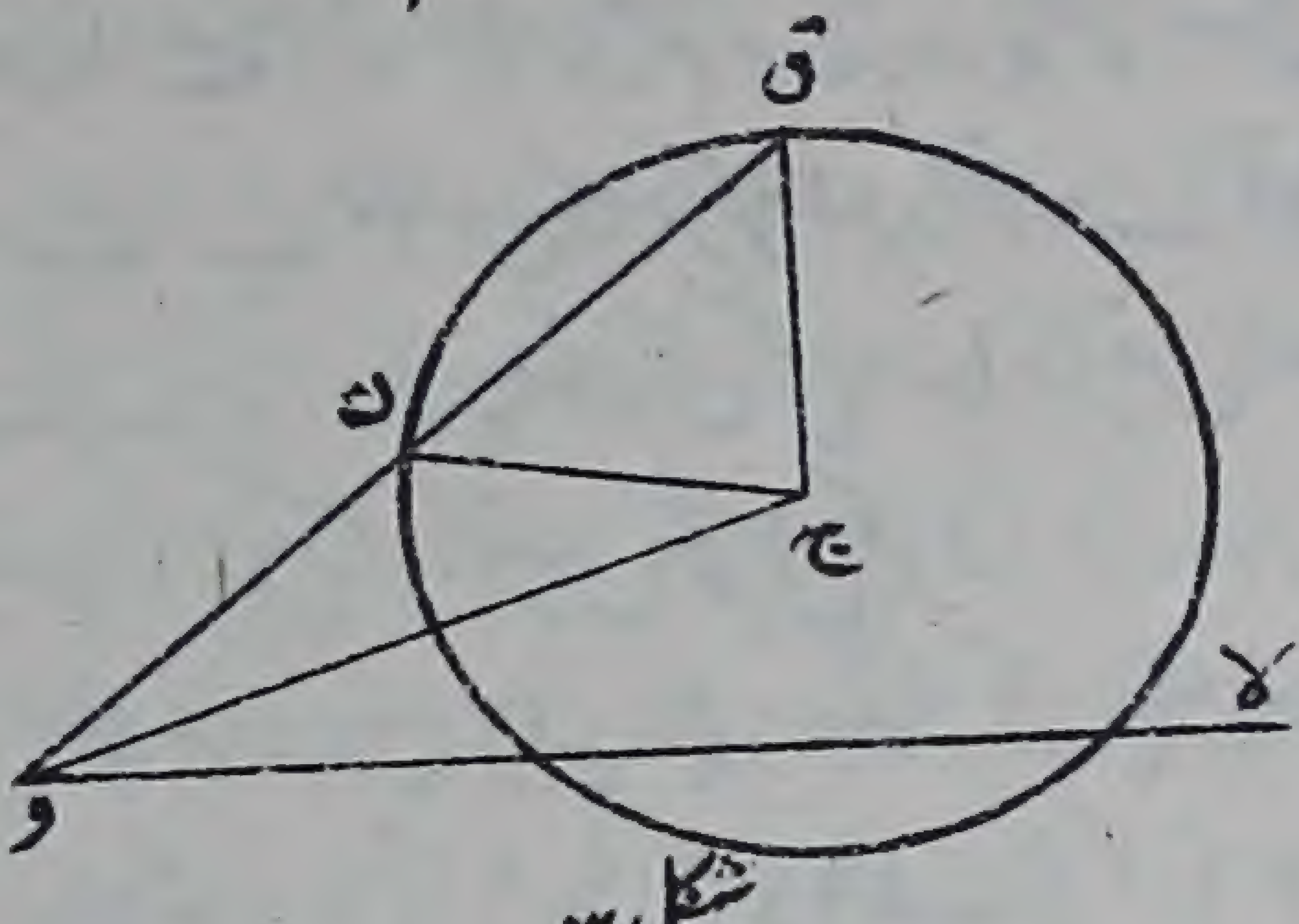
۱۱- اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ نقاط (۵،۵)، (۶،۴)، (-۲،۴)، (۷،۱) سب ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں، اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

۷- دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرو۔

اگر مرکز قطب ہو اور نصف قطر ا تو مساوات صریحاً ر = ا ہوگی، اگر مرکز ج قطب نہ ہو تو فرض کرو کہ اس کے محدد (د، عہ) ہیں، فرض کرو کہ محیط پر کوئی نقطہ ن (ر، طہ) ہے اور دائرہ کا نصف قطر ا ہے۔

نقطہ ن ذیل کا ہندسی ربط پورا کرتا ہے

و ج² + و ن² - ۲ و ج × و ن جم ج و ن = ج ن²



شکل ۳

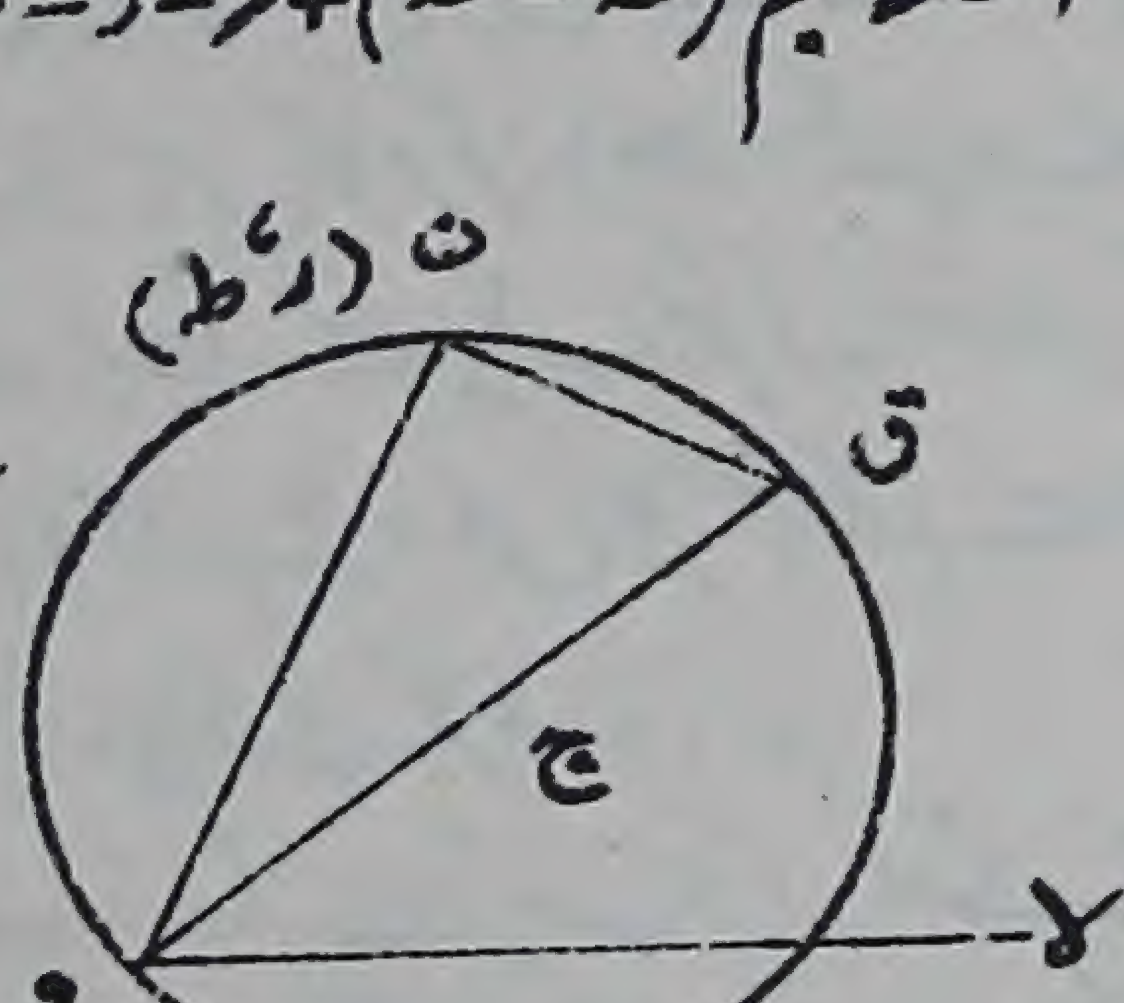
اور اس کو تحلیلی طریق پر اس طرح بیان کرینگے د² + ر² - ۲ د ر جم (طہ - عہ) = ا²
یا ر کی نزولی قوتوں میں ترتیب دینے سے ر² - ۲ ر د جم (طہ - عہ) + د² - ا² = ۰ ....(۶)

۸- اگر قطب محیط پر واقع ہو تو د = ا
اور مساوات ہو جائے گی

ر = ۲ ا جم (طہ - عہ) ......(۷)

اور اگر علاوہ اس کے خط ابتدائی بھی مرکز میں سے گذرے تو مساوات ہو جائیگی

ر = ۲ ا جم طہ ....(۸)



شکل ۴

۹- طول و ن اور و ق اوپر کی مساوات (۶) میں ر کی دو قیمتیں ہیں اس لئے و ن × و ق = د² - ا² پس یہ حاصلضرب

خط مستقیم و ن ق کی سمت پر منحصر نہیں ہے۔ یہ غور طلب ہے کہ جب و دائرہ کے اندر ہو تو و ن اور و ق مختلف العلامت ہوتے ہیں۔ اس صورت میں حاصلضرب و ن × و ق منفی ہوتا ہے [مقابلہ کرو اقلیدس م ۳ شکل ۳۵ اور م ۳ شکل ۳۶ کے ساتھ] جب و دائرہ کے باہر ہو جیسا شکل میں تو و میں سے گذرنیوالا قطر یعنی دائرہ سے اسی صورت میں حقیقی نقاط پر ملیگا جبکہ مساوات (۶) میں ر کی قیمتیں حقیقی ہوں یعنی اگر د² جم² (ط − عہ) − د² + ا² مثبت ہو۔ دوسرے الفاظ میں اگر د جیب (ط − عہ) < ا جو ہندسی طریق پر بھی ظاہر ہے۔ جب و دائرہ کے اندر ہو تو د < ا اس لئے جملہ د² جم² (ط − عہ) − د² + ا² زاویہ ط کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہوگا اور و میں سے گذرنیوالا ہر ایک خط دائرہ سے حقیقی نقاط پر ملیگا۔

مشق

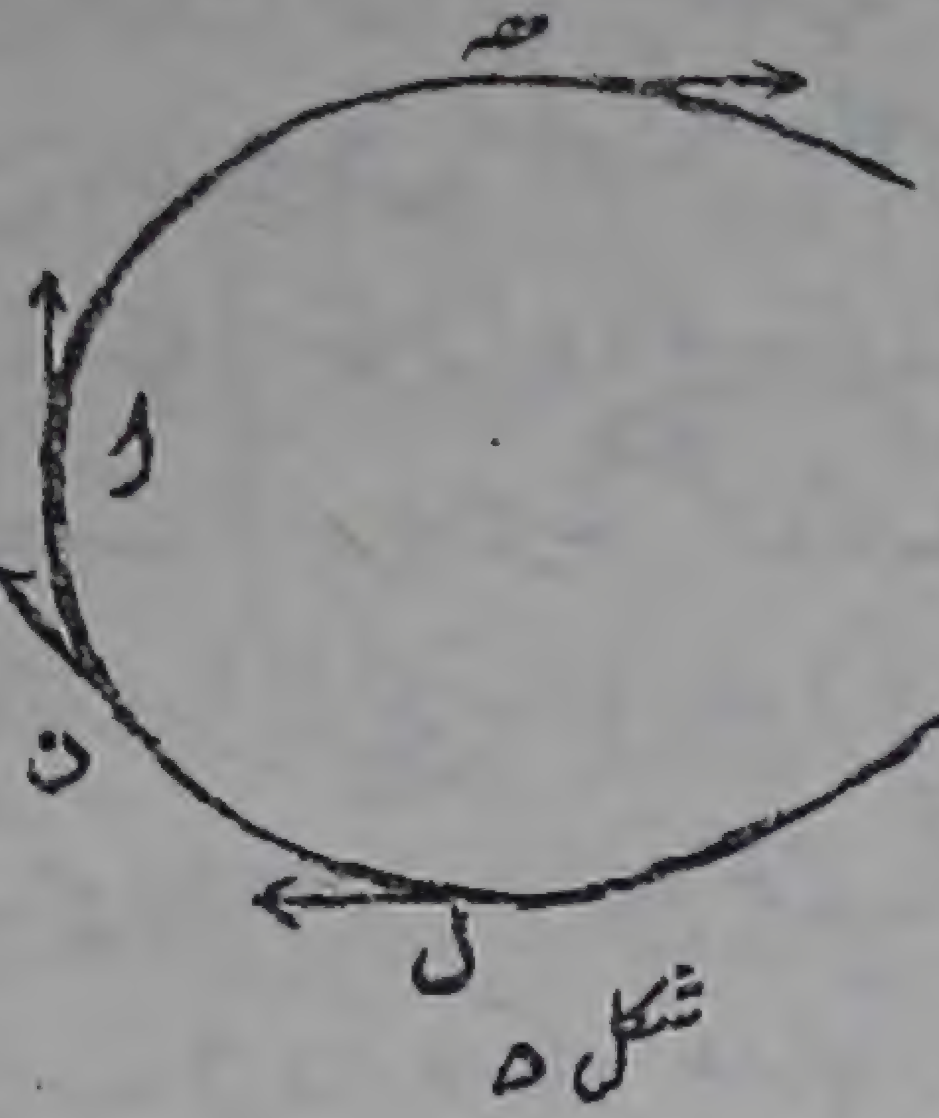
۱۲ - ذیل کے دائروں کے مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

(ا) ر² − ۶ ر جم (ط − ۲ــ۳/۵) − ۱۶ = ۰

(ب) ر² − ۲ ر (√۳ جم ط + جیب ط) = ۵

۱۰ - وتر اور مماس - تعریفات - ایک منحنی کا **وتر** ایسا خط مستقیم ہے جو اس پر کے دو نقطوں کو ملائے۔ ایک ایسے خط مستقیم کو جو منحنی کو کاٹتا ہو بعض اوقات منحنی کا قاطع بھی کہتے ہیں۔ طالب علم اب تک اقلیدس کی تعریف مماس سے مانوس ہے اُسے اب مماس کے نئے تخیل اور تعریف سے واقف ہونا چاہئے اور یہ تعریف صرف دائروں کی صورت میں ہی درست نہیں ہے بلکہ بالعموم سب منحنیات کی صورت میں درست ہے۔ پس ایک منحنی کے کسی نقطہ ر کا مماس فی الحقیقت ایک ایسا خط مستقیم ہے جو اس نقطہ س سے گذرتا ہے اور اس نقطہ پر منحنی کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ کرسٹل پیلس لنڈن کی نمائش میں جو "الٹی سیدھی ریلوے" حال میں بنائی گئی ہے وہ مماس کے اس نئے تخیل کی بخوبی توضیح کرتی ہے۔ ریل کی سڑک سے جو منحنی بنتا ہے اس کے کسی نقطہ **ن** پر کا مماس اُس سمت کو تعبیر کریگا جس سمت میں کہ ریل کے پہیئے ٹھیک ن میں سے گذرتے وقت حرکت کر رہے ہیں

یا یوں خیال کرو کہ ن میں سے گذرتے وقت اگر سڑک کو ریل کے نیچے سے یک لخت الگ کر لیا جائے تو جس سمت میں پہئے سڑک کو چھوڑ کر فضا میں حرکت کرنا شروع کرینگے وہی سمتِ مماس ہوگی۔



شکل ۵

سب سے نچلے نقطہ ل پر یہ سمت افقی ہے سب سے اونچے نقطہ ھ پر یہ افقی ہے لیکن متقابل سمت میں، مگر ایک درمیانی نقطہ ا پر صعود کے وقت یہ انتصاباً اوپر کیطرف ہوگی۔

اوپر ہم نے یہ بتایا ہے کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا مماس اس نقطہ پر منحنی کی سمت کا پتہ دیتا ہے اب یہ سمت اس نقطہ میں سے گذرنیوالے ایک خط مستقیم سے ہی متعین ہو سکتی ہے کیونکہ ایک خط مستقیم ہی کسی محدود فاصلہ تک اپنی سمت کو قائم رکھتا ہے لیکن ایک منحنی (عام تخیل کے مطابق) خواہ کتنا ہی قلیل فاصلہ ہم اس پر طے کریں ہر مقام پر ایک نئی سمت اختیار کرتا ہے۔ اس لئے قدرتی طور پر مماس کا تخیل ہمارے ذہن میں یہ ہو سکتا ہے کہ یہ نقطہ ن میں سے گذرنیوالا ایک خط مستقیم ہے جو ن پر منحنی کی سمت کا تعین کرتا ہے۔ اب ہمیں دیکھنا چاہئے کہ نقطہ ن پر منحنی کی سمت سے کیا مراد ہے، ظاہر ہے کہ جس سمت میں ہم ن سے چلکر منحنی پر اس سے اگلے ساتھ کے نقطہ نَ پر جاتے ہیں وہی منحنی کی سمت نقطہ ن پر ہو سکتی ہے، پس جو خط مستقیم ن اور منحنی کے اگلے متصل نقطہ نَ کو ملاتا ہے اسکی سمت نقطہ ن پر منحنی کی سمت ہے۔ اس سمت کو حاصل کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے کہ ہم ایک وتر ن ق لیں اور نقطہ ق کو منحنی پر اسقدر حرکت دیں کہ چلتے چلتے یہ نَ پر پہنچ جائے جو منحنی پر اگلا متصل نقطہ ہے، یا دوسرے الفاظ میں ہمیں ق کو منحنی پر حرکت دینے سے ن کے اتنا قریب لے آنا چاہئے کہ یہ ن پر عین منطبق ہونیکو ہو۔ پس نقطہ ن پر منحنی کی سمت وتر ن ق کی سمت کا انتہائی مقام ہے جبکہ دوسرا نقطہ تقاطع ق منحنی پر حرکت کرتے کرتے ن کے

اتنا قریب آجائے کہ یہ اس پر منطبق ہونیکو ہو۔

نوٹ طالب علم دیکھے کہ جب ق فی الحقیقت ن پر منطبق ہوتا ہے تو سمت ن ق غیر متعین ہو جاتی ہے اس لئے پوری صحت کے لئے ہمیں یہ کہنا چاہئے کہ جب ق منحنی پر حرکت کرکے نقطہ ن سے لا انتہا کم فاصلہ پر ہوتا ہے تو اُس وقت ن ق کی سمت اپنے مذکورہ بالا انتہائی مقام پر جبکہ ق، ن پر منطبق ہو، حرکت کرکے آتی ہے یا اپنے "انتہائی مقام" کے ساتھ لا انتہا کم مقدار کا زاویہ بناتی ہے

اوپر کی تمہید اور قیود کے بعد طالب علم ذیل کی تعریف کو سمجھ سکیگا۔

۱۱۔ **تعریف**۔ ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا مماس اس نقطہ میں سے گذرنیوالے وتر کا انتہائی مقام ہے جبکہ وتر کا دوسرا نقطہ تقاطع منحنی پر حرکت کرتے کرتے پہلے نقطہ پر منطبق ہو جائے۔

نوٹ مماس ایک خط مستقیم ہونیکی وجہ سے ہر دو جانب غیر محدود متصور ہونا چاہئے، اور ایک مسلسل منحنی کی صورت میں ہمیں اس کے کسی ایک نقطہ پر وہی غیر محدود خط مستقیم بطور مماس حاصل ہوگا خواہ ہم منحنی کے کسی طرف جائیں۔

۱۲۔ اگر منحنی پر ایک نقطہ ن ہو اور اس کے محدد ($لا_1$، $ہا_1$) ہوں اور منحنی پر کے ایک اور نقطہ ق کے ($لا_2$، $ہا_2$) ہوں تو وتر ن ق کی مساوات $\frac{ہا - ہا_1}{لا - لا_1} = \frac{ہا_2 - ہا_1}{لا_2 - لا_1}$ ہوگی (حصہ اول دفعہ ۱۰ ج) اب ن پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کا سوال صرف یہ ہے کہ ہم جملہ $\frac{ہا_2 - ہا_1}{لا_2 - لا_1}$ کی انتہا اس صورت میں معلوم کریں جبکہ نقطہ ($لا_2$، $ہا_2$) منحنی پر حرکت کرتے کرتے نقطہ ($لا_1$، $ہا_1$) کے نہایت ہی قریب آجائے اور اس پر عین منطبق ہونیکو ہو، اس عمل میں یہ ضرور یاد رہے اور اسے لازماً استعمال کیا جائے کہ دونوں نقطوں کے محدد منحنی کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

۱۳۔ دائرہ $لا^2 + ہا^2 + 2 گ لا + 2 ف ہا + ج = 0$ کے محیط پر ایک نقطہ ($لا_1$، $ہا_1$) ہے اس نقطہ پر مماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن ($لا_1$، $ہا_1$) ہے اور اس کے پاس ایک نقطہ دائرہ کے محیط پر ق ($لا_2$، $ہا_2$) ہے ن ق کی مساوات ہے $\frac{ہا - ہا_1}{لا - لا_1} = \frac{ہا_2 - ہا_1}{لا_2 - لا_1}$ ....(۱) (حصہ اول دفعہ ۱۰ ج)

اب چونکہ ن اور ق دائرہ کے محیط پر واقع ہیں اس لئے

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + ۲\text{گ}\,\text{لا}_1 + ۲\text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰$$

$$\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + ۲\text{گ}\,\text{لا}_2 + ۲\text{ف}\,\text{ما}_2 + \text{ج} = ۰$$

تفریق کرنے سے

$$\text{لا}_2^2 - \text{لا}_1^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ما}_1^2 + ۲\text{گ}(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + ۲\text{ف}(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) = ۰$$

$$\text{یا}\ (\text{لا}_2 - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + ۲\text{گ}) + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + ۲\text{ف}) = ۰$$

$$\therefore \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = -\frac{\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + ۲\text{گ}}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + ۲\text{ف}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اس لئے وتر ن ق کی مساوات ہے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + ۲\text{گ}) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + ۲\text{ف}) = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

اب ہمیں وتر کی مساوات ایسی شکل میں حاصل ہو گئی ہے جو غیر متعین نہیں ہو جاتی جب $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ حرکت کر کے $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر منطبق ہو جاتا ہے۔

اس لئے لا_2 کو لا_1 کے اور ما_2 کو ما_1 کے مساوی رکھنے سے نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{گ}) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ف}) = ۰$$

$$\text{یعنی}\ \text{لا}(\text{لا}_1 + \text{گ}) + \text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ف}) = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1$$

یا چونکہ $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + ۲\text{گ}\,\text{لا}_1 + ۲\text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰$ اسلئے مماس کی مساوات اسطرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{لا}(\text{لا}_1 + \text{گ}) + \text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ف}) + \text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اس مساوات کو اس شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{گ}(\text{لا} + \text{لا}_1) + \text{ف}(\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

اور یہ شکل دائرہ کی مساوات سے لا^2 کی بجائے $\text{لا}\,\text{لا}_1$، ما^2 کی بجائے $\text{ما}\,\text{ما}_1$، $۲\,\text{لا}$ کی بجائے $\text{لا} + \text{لا}_1$ اور $۲\,\text{ما}$ کی بجائے $\text{ما} + \text{ما}_1$ لکھنے سے حاصل ہو سکتی ہے

مشقیں

۱۳ — متشابہ طریق سے ثابت کرو کہ منحنی $\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\text{گ}\,\text{لا} + ۲\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$

کے نقطہ $(لا_{۱}، ما_{۱})$ پر مماس کی مساوات ہے

$$لا\,(ا\,لا_{۱} + ھ\,ما_{۱} + گ) + ما\,(ھ\,لا_{۱} + ب\,ما_{۱} + ف) + گ\,لا_{۱} + ف\,ما_{۱} + ج = ۰$$

۱۴ - نقطہ $(۲، ۴)$ پر $لا^{۲} + ما^{۲} - ۴\,لا - ۴\,ما + ۴ = ۰$ کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۱۵ - اُن نقاط پر دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} = ۱۳$ کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں $لا = ۲$

۱۶ - جن نقاط پر $لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵$، $لا^{۲} + ما^{۲} - ۲\,لا - ۲\,ما = ۲۳$ کو قطع کرتا ہے اِن پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۷ - ثابت کرو کہ دوائر $لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} + ۸\,لا + ۶\,ما - ۷۵ = ۰$ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۸ - ثابت کرو کہ دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} = ر^{۲}$ پر کے نقاط $(لا_{۱}، ما_{۱})$ اور $(لا_{۲}، ما_{۲})$ کو ملانے والے قاطع کی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$لا\,(لا_{۱} + لا_{۲}) + ما\,(ما_{۱} + ما_{۲}) = لا_{۱}لا_{۲} + ما_{۱}ما_{۲} + ر^{۲}$$

۱۹ - اگر دائرہ کی مساوات $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲\,گ\,لا + ۲\,ف\,ما + ج = ۰$ ہو تو قاطع کی مساوات ہوگی

$$لا\,(لا_{۱} + لا_{۲} + ۲\,گ) + ما\,(ما_{۱} + ما_{۲} + ۲\,ف) = لا_{۱}لا_{۲} + ما_{۱}ما_{۲} - ج$$

۲۰ - اگر دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲\,گ\,لا + ۲\,ف\,ما + ج = ۰$ کے نقاط $(لا_{۱}، ما_{۱})$ اور $(لا_{۲}، ما_{۲})$ پر کے مماس ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ذیل کا ربط ثابت کرو

$$لا_{۱}لا_{۲} + ما_{۱}ما_{۲} + گ\,(لا_{۱} + لا_{۲}) + ف\,(ما_{۱} + ما_{۲}) + گ^{۲} + ف^{۲} = ۰$$

۲۱ - دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} = ر^{۲}$ کے نقطہ ن پر کا مماس محاور لا اور ما سے بالترتیب ف اور ت پر ملتا ہے اور ن ل، ن م ان محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ $ج\,ل \times ج\,ت = ر^{۲}$ اور $ج\,م \times ج\,ف = ر^{۲}$ جہاں ج مرکز ہے۔

۱۴ - عماد - تعریف ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا عماد ایک ایسا خط مستقیم ہے جو اِس نقطہ میں سے گذرے اور مماس پر عمود ہو۔

۱۵ - دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲\,گ\,لا + ۲\,ف\,ما + ج = ۰$ کے نقطہ

($لا_1$، $ما_1$) پر جو عماد کھنچ سکتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

دائرہ کی مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ محور قائم ہیں۔
عماد ایک خط مستقیم ہے جو ($لا_1$، $ما_1$) میں سے گذرتا ہے اور

$$لا\,(لا_1 + گ) + ما\,(ما_1 + ف) + گ\,لا_1 + ف\,ما_1 + ج = ۰$$

پر عمود ہے اس لئے عماد کی مساوات یہ ہے

$$\frac{لا - لا_1}{لا_1 + گ} = \frac{ما - ما_1}{ما_1 + ف}$$ (حصہ اول دفعہ ۱۰ ب اور دفعہ ۱۹)

اس لئے عماد مرکز (−گ، −ف) میں سے گذرتا ہے اور اس نصف قطر پر منطبق ہوتا ہے جو نقطہ ($لا_1$، $ما_1$) میں سے کھینچا جائے۔ اس لئے ایک دائرہ کا مماس نقطہ تماس میں سے گذرنیوالے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔
[طالب علم یاد رکھے کہ ہم دائرہ کے خواص کو ابتدائی تخیلات کی بناء پر تحقیق کر رہے ہیں اس لئے ہمیں اقلیدس کے مسائل کو تسلیم نہیں کر لینا چاہیے۔]

مشق

۲۲۔ ثابت کرو کہ منحنی $ا\,لا^2 + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 + ۲\,گ\,لا + ۲\,ف\,ما + ج = ۰$ کے نقطہ ($لا_1$، $ما_1$) پر جو عماد کھنچ سکتا ہے اس کی مساوات ہے

$$\frac{لا - لا_1}{ا\,لا_1 + ھ\,ما_1 + گ} = \frac{ما - ما_1}{ھ\,لا_1 + ب\,ما_1 + ف}$$

۱۶۔ دائرہ کی مساوات کی سادہ سے سادہ شکل $لا^2 + ما^2 = ا^2$ ہے، اس مساوات پر اوپر کے عمل کرنے سے یا بلا واسطہ اوپر کی مساواتوں میں گ = ۰، ف = ۰، ج = $-ا^2$ رکھنے سے دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کے نقطہ ($لا_1$، $ما_1$) پر مماس کی مساوات $لا\,لا_1 + ما\,ما_1 = ا^2$ حاصل ہوتی ہے اور اسی نقطہ میں سے گذرنے والے عماد کی مساوات $\frac{ما}{لا} = \frac{ما_1}{لا_1}$ ہے جسکی شکل سے ظاہر ہے کہ عماد مبدأ میں سے گذرتا ہے جو اس صورت میں دائرہ کا مرکز ہے

مشقیں

۲۳ — دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۱۳$ کے نقطہ (۵، ۱۲) پر عماد کی مساوات معلوم کرو۔

۱۶ - دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} - ۵لا - ۴ما + ۴ = ۰$ کے نقطہ (۵، ۲) پر عماد کی مساوات معلوم کرو۔

۱۷ - ایک خط مستقیم اور ایک دائرہ کی مساواتیں معلوم ہیں اُن کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

ہمیں دونوں مساواتوں کو ایک ساتھ لا، ما کے لئے حل کرنا چاہئے

[حصہ اول دفعہ ۹]

مثال - خط $۷لا - ما - ۲۵ = ۰$ اور دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵$ کے نقاط تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لا، ما) مطلوبہ محدد ہیں

خط مستقیم کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے $ما = ۷لا - ۲۵$

دائرہ کی مساوات میں اس کو مندرج کرنے سے

$$لا^{۲} + (۷لا - ۲۵)^{۲} = ۲۵$$

جس سے $لا = ۳$ یا ۴ اور $ما = -۴$ یا ۳

اس لئے مطلوبہ محدد ہیں (۳، -۴) اور (۴، ۳)۔

۱۸ - اگر دفعہ ۱۷ کے موافق عمل کیا جائے تو مطلوبہ فصلہ لا کے لئے ایک مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اس مساوات کی دو اصلیں ہونگی اور ہر اصل کے جواب میں خط مستقیم کی مساوات سے ما کی ایک قیمت حاصل ہوگی۔

پس ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے یہ نقطے حقیقی ہونگے اگر مساوات درجہ دوم کی اصلیں حقیقی ہوں اور خیالی ہونگے اگر مساوات کی اصلیں خیالی ہوں اور موخر الذکر صورت میں خط مستقیم بالتمام دائرہ کے باہر واقع ہوگا۔

اگر مساوات کی اصلیں مساوی ہوں تو خط مستقیم دائرہ کو ایسے دو نقطوں پر قطع کریگا جو ایک دوسرے پر منطبق ہونگے یعنی اس صورت میں مذکورہ خط مستقیم ایک ایسے وتر کی انتہائی صورت ہوگا جبکہ نقاط تقاطع ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنی اس حالت میں خط مستقیم دائرہ کا مماس ہوگا۔ اس لئے ایک خط مستقیم کے محیط دائرہ کو مس کرنے کی شرط یہ ہے کہ لا یا ما کے لئے حل کرنے سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہو

اس کی اصلیں مساوی ہوں۔

خط مستقیم ما = م لا + ب، کے دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲} کو مس کرنے کیلئے جو شرط ضروری ہے اسے یاد رکھنا چاہیے

لا کے لئے حل کرنے سے لا^{۲} + (م لا + ب)^{۲} = ا^{۲} یا لا^{۲} (۱ + م^{۲}) + ۲ م ب لا + ب^{۲} − ا^{۲} = ۰

اگر اس مساوات کی اصلیں برابر ہوں تو ضروری ہے کہ

(۱ + م^{۲}) (ب^{۲} − ا^{۲}) = م^{۲} ب^{۲} یا ب^{۲} = ا^{۲} (۱ + م^{۲}) اس لئے خط مستقیم ما = م لا ± ا $\sqrt{۱ + م^{۲}}$، م کی تمام قیمتوں کے لئے دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲} کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۲۵ ۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ ا (لا + ما) + ا^{۲} = ۰ محاور کو مس کرتا ہے نقاط تماس معلوم کرو۔

ان دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جن کے مرکز مبدأ پر ہوں اور جو خطوط ذیل کو بالترتیب مس کریں۔

۲۶ ۔ ما = $\frac{۱}{۳}$ لا + ۲$\frac{۱}{۲}$ ۲۷ ۔ ۳ لا + ۴ ما = ۱۰

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ ذیل کے خطوط مستقیم اور دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ہر صورت میں نقاط تماس معلوم کرو۔

(ا) لا^{۲} + ما^{۲} + لا + ما = ۰ اور لا + ما + ۲ = ۰

(ب) لا^{۲} + ما^{۲} = ۶ ما اور ما = لا $\sqrt{۳}$ + ۹

۲۹ ۔ ثابت کرو کہ خط ما = م لا + ا $\{۱ \pm \sqrt{۱ + م^{۲}}\}$ ہمیشہ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۲ ا ما کو مس کرتا ہے۔

۱۹ ۔ اس کے لئے کیا شرط ہے کہ خط مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو مس کرے۔

جو خطوط مستقیم مبدأ کو خط مستقیم اور دائرہ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں انکی مساوات ہے

ن^{۲} (لا^{۲} + ما^{۲}) − ۲ ن (ل لا + م ما) (گ لا + ف ما) + ج (ل لا + م ما)^{۲} = ۰ ...... (۱)

اگر خط مستقیم دائرہ کو مس کرتا ہے تو یہ دائرہ کو ایسے نقاط پر ملیگا جو ایکدوسرے پر منطبق ہوتے ہوں - اس صورت میں مساوات (ا) دو ایسے خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اس کا دایاں رکن لازماً مربع کامل ہے اس کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ

(ج ل^۲ - ۲ گ ن ل + ن^۲) (ج م^۲ - ۲ ف م ن + ن^۲)
= (ج ل م - گ م ن - ف ن ل)^۲ جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے
ج (ل^۲ + م^۲) + ن^۲ - (ف ل - گ ن)^۲ - ۲ ف م ن
- ۲ گ ن ل = ۰ .... (ب)

۲۰ - نوٹ اوپر کی مساوات متشاکل نہیں ہے اسے یاد رکھنے کی ضرورت نہیں صرف طریق عمل کا یاد رکھنا ضروری ہے - اس طریقہ کی مزید توضیح کے لئے طالب علم اسی طرح ثابت کرے کہ اگر خط مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ منحنی ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو مس کرے تو اس کے لئے یہ شرط ضروری ہے

(ب ج - ف^۲) ل^۲ + (ج ا - گ^۲) م^۲ + (ا ب - ھ^۲) ن^۲
+ ۲ (گ ھ - ا ف) م ن + ۲ (ھ ف - ب گ) ن ل
+ ۲ (ف گ - ج ھ) ل م = ۰ .... (ج)

مساوات (ج) متشاکل ہے اور مساوات (ب) اس سے حاصل ہو سکتی ہے اگر اس میں رکھا جائے ا = ا ب = ا ھ = ۰

مشقیں

۳۰ - دائرہ لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا = ۰ کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا کے ساتھ ۴۵° کا (مخالف سمت ساعت) زاویہ بنائیں -

۳۱ - دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲۵ کے اُن مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو ۳ لا + ۴ ما = ۰ کے متوازی ہوں -

۳۲ - دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲ کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا کے ساتھ بالترتیب زاویے (ا) ۱۲۰° (ب) -۳۰° (ج) مس^-۱ 5/12 بنائیں -

۳۳ — دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} = ج^{۲}$ اور خط $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے جو خط ملاتے ہیں اُن کی مساواتیں معلوم کرو۔
اگر یہ خط دائرہ کو مس کرے تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ا^{۲}} + \frac{۱}{ب^{۲}} = \frac{۱}{ج^{۲}}$

۳۴ — ثابت کرو کہ جو خطوط دوائر $لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲}$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ (گ لا + ف ما) =$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں اُن کی مساوات

$$ا^{۲} (لا^{۲} + ما^{۲}) - ۴ (گ لا + ف ما)^{۲} =$$ ہے

۳۵ — دوائر $لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} - ۲۶ ما + ۲۵ = ۰$ کے نقاط تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ایکدوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

باب اول پر متفرق مثالیں

۳۶ — ایک نقطہ اسطرح حرکت کرتا ہے کہ نقاط (ا، ۰) اور (−ا، ۰) سے اسکے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ $۲ ب^{۲}$ کے مساوی ہوتا ہے، اس کا طریق معلوم کرو۔

۳۷ — دوائر $لا^{۲} + ما^{۲} = ۹$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} - ۱۰ لا + ۹ = ۰$ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ اِن نقاط تقاطع پر دونوں دائروں کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو۔
ثابت کرو کہ ہر نقطہ پر کے دو مماس علی القوائم ہیں۔

۳۸ — عام صورت میں ثابت کرو کہ دوائر $لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲}$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ گ لا + ا^{۲} = ۰$ علی القوائم ہیں۔

۳۹ — دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ ا لا + ۲ ب ما + ج = ۰$ کے اُن مماسات کی مساواتیں معلوم کرو جو $۳ لا + ۴ ما + ۷ = ۰$ کے متوازی ہوں۔

۴۰ — دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵$ کے اُن دو مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور لا کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بنائیں۔

۴۱ — کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ عہ کی تمام قیمتوں کے لئے خط مستقیم $ر جم (طہ - عہ) = د جم عہ + ا$ دائرہ $ر^{۲} - ۲ ر د جم طہ + د^{۲} - ا^{۲} = ۰$ کو مس کرتا ہے۔

۴۲ — خط مستقیم $ر جم طہ = ۳$ اور دائرہ $ر = ۴ جم طہ$ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ یہ نقطے مبدأ کے ساتھ ملکر ایک مثلث متساوی الاضلاع بناتے ہیں۔

۴۳ ـ ثابت کرو کہ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ر^{2} کے دو نقاط (لا$_{1}$، ما$_{1}$) اور (لا$_{2}$، ما$_{2}$) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ۲ (ر^{2} - لا$_{1}$ لا$_{2}$ - ما$_{1}$ ما$_{2}$) ہے۔

۴۴ ـ ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو ایسے نقاط پر قطع کرتا ہے جن کے فاصلے محیط کے ایک نقطہ (لا$_{1}$، ما$_{1}$) سے مساوی ہیں اور د کے برابر ہیں۔ ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کی مساوات لا لا$_{1}$ + ما ما$_{1}$ - ر^{2} + $\frac{1}{2}$ د^{2} = ۰ ہے۔ اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے (لا$_{1}$، ما$_{1}$) پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۵ ـ مائل محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزرے اور محوروں پر مقطوعے ف، ق کاٹے۔

۴۶ ـ اگر خط مستقیم ا لا + ب ما = ۱ دائرہ ر = ک جم ط کو مس کرے تو اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے۔

۴۷ ـ جو دائرہ نقاط (۰، ۰)، (ا، ع)، (ب، ہ) میں سے گذرتا ہے اس کے نصف قطر کا طول معلوم کرو۔

۴۸ ـ ایک دائرہ کی مساوات سے ثابت کرو کہ جو زاویے ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں وہ مساوی ہوتے ہیں۔

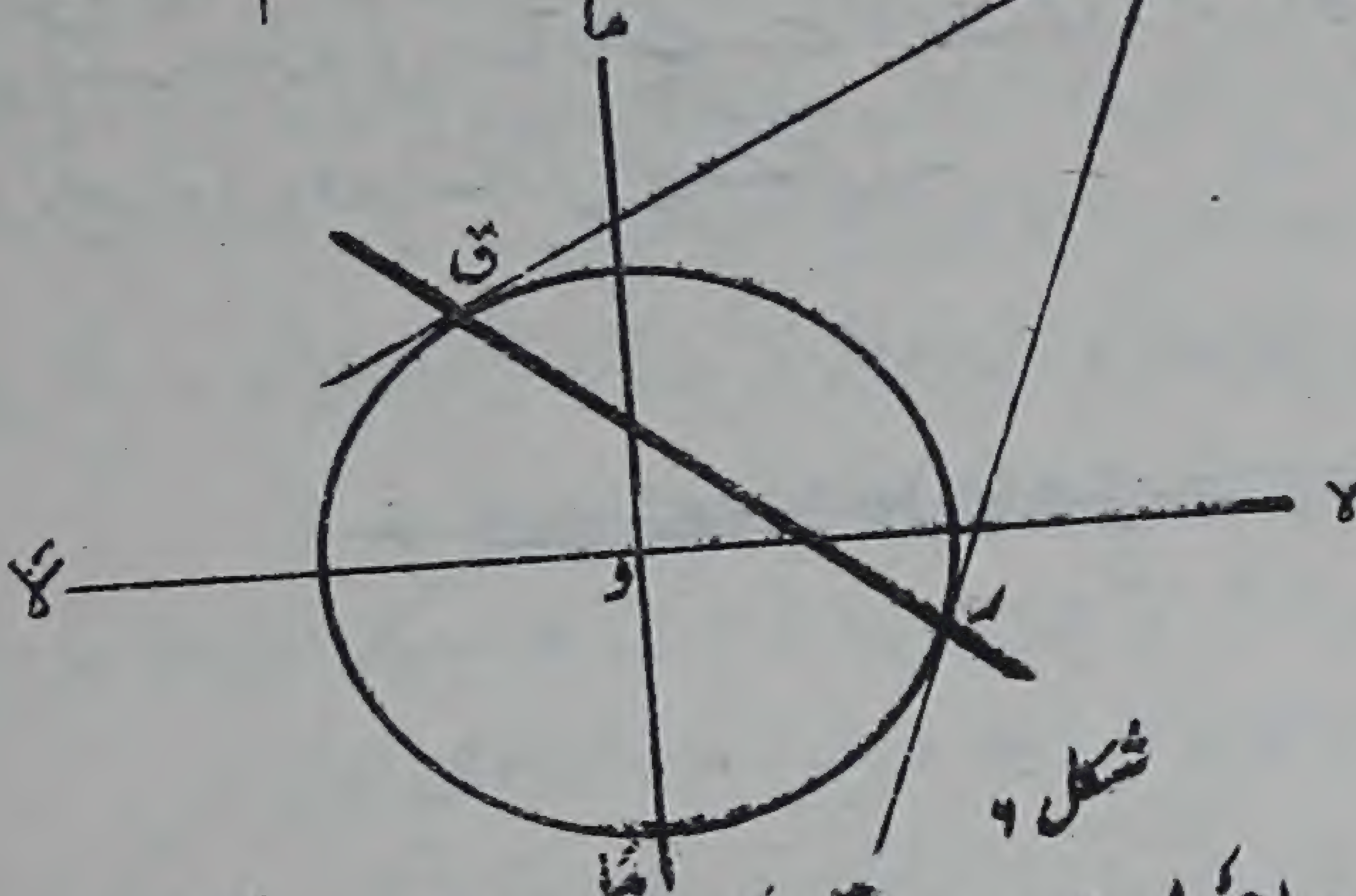
باب دوم

دائرہ مسلسل

۲۱۔ ایک دئے ہوئے بیرونی نقطہ سے ایک دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں، اُنکے وترِ تماس کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بیرونی نقطہ ن ہے اور دائرہ کے مماس ن ق، ن ر نقطہ ن سے کھینچے گئے ہیں۔

عمل کے اختصار کی خاطر ہم دائرہ کی مساوات بلحاظ قائم محوروں کے لینگے جبکہ مرکز مبدا ہو۔



شکل ۶

فرض کرو کہ ن کے محدد (لا$_1$، ما$_1$) ہیں اور ق، ر کے بالترتیب (ھَ، کَ)، (ھً، گً)

(یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ ق اور ر کے محدد آخری نتیجہ میں داخل نہیں ہونگے)

ق پر کے مماس ق ن کی مساوات ہے لا ھَ + ما کَ = ا^2

اسیطرح ر ن کی مساوات ہے لا ھً + ما گً = ا^2

چونکہ یہ دونوں خط (لا$_1$، ما$_1$) میں سے گذرتے ہیں اس لئے

لا$_1$ ھَ + ما$_1$ کَ = ا^2 اور لا$_1$ ھً + ما$_1$ گً = ا^2

اس لئے محددوں کے دو جوڑے (ھ، ک) اور (ھ'، ک') مساوات لا لا' + ما ما' = ا²
کو پورا کرتے ہیں یعنی نقاط ق اور ر دونوں خط مستقیم

لا لا' + ما ما' = ا² ......(۱)

پر واقع ہوتے ہیں اور اس لئے یہ ق ر کی مساوات ہے۔
جب ن دائرہ کے اندر واقع ہو تو ن سے دائرہ کے مماس نہیں کھینچ سکتے اسلئے ہمیں اس صورت میں مساوات (۱) کی نئی ہندسی تعبیر معلوم کرنی چاہیئے۔

(۱) اگر وتر تماس ق ر ایک ثابت نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتا ہو جہاں یہ ثابت نقطہ دائرہ کے اندر واقع ہے یا باہر تو محدد (ھ، ک) مساوات (۱) کو پورا کریں گے اور اس لئے لا' ھ + ما' ک = ا² جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن ایک ایسے ثابت خط مستقیم پر واقع ہے جسکی مساوات لا ھ + ما ک = ا² ہے۔ اس سے ہمیں مساوات لا ھ + ما ک = ا² کی ہندسی تعبیر حاصل ہوتی ہے جو نقطہ (ھ، ک) کے مقام پر منحصر نہیں ہے کیونکہ اس صورت میں یہ نقطہ دائرہ کے لحاظ سے کہیں اندر یا باہر واقع ہو سکتا ہے۔ پس یہ معلوم ہوگا کہ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے دائرہ کے وتر کھینچے جائیں تو ان میں سے ہر ایک کے سروں پر جو مماسوں کا جوڑا کھینچ سکتا ہے اُن کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔ اس خط مستقیم کو ثابت نقطہ کا **قطبی** کہتے ہیں اور مساوات لا ھ + ما ک = ا² نقطہ (ھ، ک) کے قطبی کو بلحاظ دائرہ لا² + ما² = ا² کے تعبیر کرتی ہے۔ ایک بیرونی نقطہ کا قطبی وہ وتر ہے جو اس نقطہ میں سے گذرنیوالے مماسات کے نقاط تماس کو ملاتا ہے۔

(۲) نیز مشاہدہ ہو کہ اگر ن (لا'، ما') ثابت خط مستقیم لا ھ + ما ک = ا² پر واقع ہو (اور خواہ یہ خط دائرہ کو حقیقی نقاط پر کاٹے یا نہ کاٹے) تو لا' ھ + ما' ک = ا² جس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم ق ر جس کی مساوات لا لا' + ما ما' = ا² ہے ثابت نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے اگر ایک ثابت خط مستقیم پر کے نقاط سے دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو ایسے ہر ایک جوڑے کے نقاط تماس کو ملانے والا وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔ اس نقطہ کو معلومہ خط مستقیم کا **قطب** کہتے ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم لا ھ + ما ک = ا² کے قطب کے محدد بلحاظ دائرہ

لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} کے (ھ، ک) ہیں۔ اگر ایک خط مستقیم دائرہ کو حقیقی نقاط پر کاٹتا ہو اور ان نقطوں پر دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسات کا نقطہ تقاطع خط مفروض کا قطب ہوگا۔

(۳) خط مستقیم لا ھ + ما ک = ا^{2} کا قطب بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} کے نقطہ (ھ، ک) ہے، اس لئے خط مستقیم لا جم عہ + ما جب عہ = ع کا قطب نقطہ

$$\left(\frac{\text{ا}^2\,\text{جم عہ}}{\text{ع}} ، \frac{\text{ا}^2\,\text{جب عہ}}{\text{ع}}\right)$$

ہوگا۔ اگر ن قطب ہو، ق ر قطبی، و مرکز تو ظاہر ہے کہ اُس عمود کی سمت جو و سے ق ر پر نکالا جائے و ن ہوگی۔ اگر و ن، ق ر کو نَ پر قطع کرے تو و نَ = ع کیونکہ و نَ عمود ہے مبدا سے خط مستقیم

لا جم عہ + ما جب عہ = ع پر۔

نیز

$$\text{و ن} = \sqrt{\left(\frac{\text{ا}^2\,\text{جم عہ}}{\text{ع}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ا}^2\,\text{جب عہ}}{\text{ع}}\right)^2} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ع}}$$

اور اسلئے و ن × و نَ = ا^{2}

اگر ن دائرہ کے باہر واقع ہو تو یہ نتیجہ ہندسی طریق پر حسب ذیل حاصل ہو سکتا ہے۔ فرض کرو ن سے مماس ن ق کھینچا گیا ہے تب و نَ ق اور و ق ن متشابہ قائم الزاویہ مثلث ہیں اور اس لئے و نَ : و ق = و ق : و ن

مثال و ن دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ن ا}} + \frac{1}{\text{ن ب}} = \frac{2}{\text{ن نَ}}$$

مشقیں

۱۔ نقاط ذیل کے قطبیوں کی مساواتیں بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ۱۴ کے لکھو

(ا) (۲۱، -۳۵) (ب) (-۳، ۱) (ج) (۰، ۱)

۲۔ بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ۱۴ کے ذیل کے خطوط کے قطب معلوم کرو

(ا) ۳ لا - ما = ۲ (ب) لا - ما = ۱۴ (ج) ۲ لا = ۷

۳۔ خط مستقیم ل لا + م ما = ۱ کا قطب بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} کے معلوم کرو۔

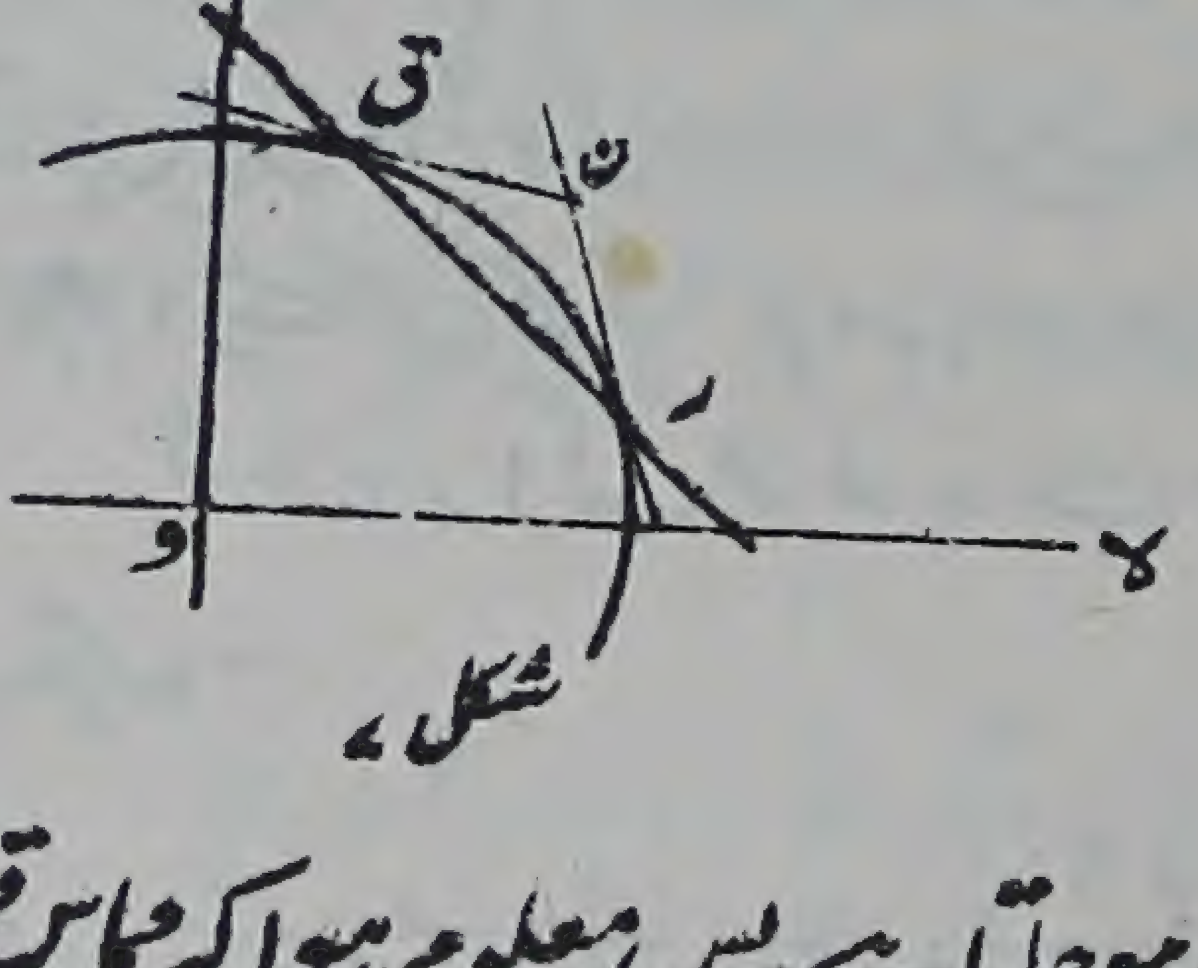
۲۲- اگر ن کا قطبی ت میں سے گذرتا ہو تو ثابت کرو کہ ت کا قطبی ن میں سے گذرتا ہے
فرض کرو کہ ن کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں اور ت کے (لاِ، باِ) نیز دائرہ
کی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ ہے۔
ن کے قطبی کی مساوات لا لاَ + ما ماَ = ر^۲ ہے، چونکہ نقطہ (لاِ، باِ) اس خط پر
واقع ہے اس لئے لاَ لاِ + با ماَ = ر^۲
اس لئے نقطہ (لاَ، ماَ) خط لا لاِ + ما با = ر^۲ پر واقع ہے یعنی ن، ت کے
قطبی پر واقع ہوتا ہے۔

۲۳- قطبی کی عام مساوات۔ اوپر کے عمل میں ہم نے دائرہ کی مساوات سادہ سے سادہ شکل میں لی ہے تاکہ طالب علم کی توجہ اصل مقصد سے منعطف نہ ہو۔ اسیطرح کے عمل سے معلوم ہوگا کہ نقطہ (لاَ، ماَ) اور خط مستقیم

لا (لاَ + گ) + ما (ماَ + ف) + گ لاَ + ف ماَ + ج = ۰

بلحاظ دائرہ لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے بالترتیب ایکدوسرے کے قطب اور قطبی ہیں۔

نوٹ طالب علم غور سے دیکھے کہ قطبی کی مساوات بعینہٖ اُسی شکل کی ہے جس شکل کی کہ مماس کی مساوات ہے، اس لئے اِسے الگ یاد رکھنے کی ضرورت نہیں۔ اِن دو خطوط میں ضروری فرق یہ ہے کہ مماس کی صورت میں نقطہ (لاَ، ماَ) منحنی پر واقع ہوتا ہے لیکن قطبی کی صورت میں اسکے مقام پر ایسی کوئی قید نہیں۔
البتہ یہ ظاہر ہے کہ جب ایک نقطہ منحنی پر واقع ہو تو اسکا قطبی وہی ہے جو اسکا مماس ہے۔



شکل ۷

نیز یہ امر ہندسی تخیلات کی بناء پر بھی ظاہر ہے کیونکہ جیسے بیرونی نقطہ ن منحنی کے قریب آتا جاتا ہے ویسے نقاط تماس ق اور ر ایکدوسرے کے بتدریج قریب آتے جاتے ہیں اور جب نقطہ ن منحنی پر واقع ہوتا ہے تو بالآخر ق اور ر کو ملانے والا خط منحنی کا مماس ہو جاتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ مماس قطبی کی

ایک خاص صورت ہے۔

مشقیں

۴۔ نقطہ (۵، ۴) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا² + ما² ـ ۴ لا ـ ۳ ما = ۰ کے معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ مبدا کا قطبی بلحاظ دائرہ

لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

کے خط مستقیم گ لا + ف ما + ج = ۰ ہے۔

۶۔ ایک نقطہ معلومہ و میں سے گذرنیوالا خط مستقیم ایک دائرہ کو نقاط ا اور ب پر کاٹتا ہے اور بلحاظ دائرہ کے و کا جو قطبی ہے اس کو وَ پر، ثابت کرو کہ

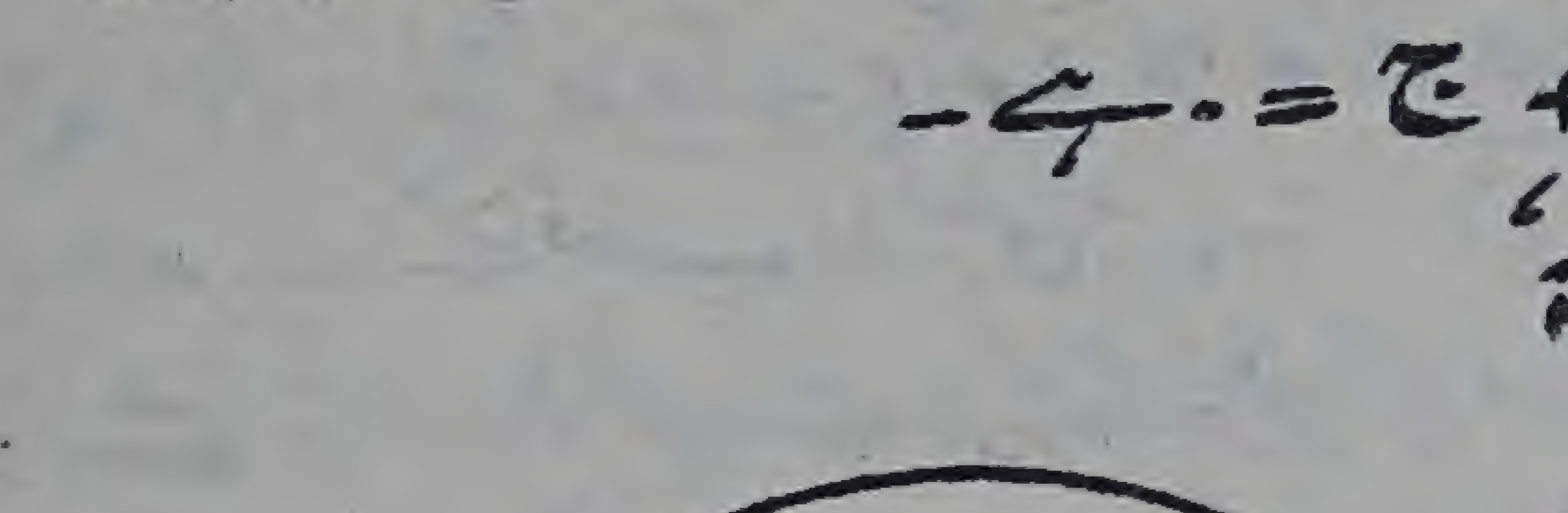
۱/و ا + ۱/و ب = ۲/و وَ

و کو مبدا قرار دو اور فرض کرو کہ قائم محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات

لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہے۔

فرض کرو کہ و ا = ر۱، و ب = ر۲

و وَ = د



شکل ۸

فرض کرو کہ خط مستقیم و ا ب محور لا ب سے زاویہ طہ بناتا ہے۔

اب ر۱، ر۲ نصف قطر ر کی دو قیمتیں ہیں جن کے لئے کارٹیسری محدد (ر جم طہ، ر جب طہ) دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں، پس دائرہ کی مساوات میں لا کی بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ر۱، ر۲ مساوات

ر² + ۲ ر (گ جم طہ + ف جب طہ) + ج = ۰

کی اصلیں ہیں۔

اس لئے ۱/ر۱ + ۱/ر۲ = (ر۱ + ر۲)/(ر۱ ر۲) = ـ ۲ (گ جم طہ + ف جب طہ)/ج

اسیطرح سے دستی نیم قطر ر کی وہ قیمت ہے جس کے لئے محدد (رجم طہ، رجب طہ) مساوات گ لا + ف ما + ج = ۰ کو پورا کرتے ہیں یعنی د، ر کی وہ قیمت ہے جس کے لئے ر (گ جم طہ + ف جب طہ) + ج = ۰

اس لئے ۱/د = − (گ جم طہ + ف جب طہ)/ج

اس لئے ۱/ر + ۱/ر = ۲/د یا ۱/و ا + ۱/و ب = ۲/و و

اس ضروری نتیجہ کو بالعموم اسطرح بیان کرتے ہیں کہ ایک نقطہ معلومہ و میں سے گذرنیوالے خط مستقیم کو ایک دائرہ اور (بلحاظ اس دائرہ کے) نقطہ و کا قطبی موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۲۵۔ ایک نقطہ معلومہ میں سے ایک دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں، اُن کے طول معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ معلومہ ن (لاَ، ماَ) ہے اور دائرہ کی مساوات

لا² + ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ہے۔

اگر نقطہ ن میں سے ایک خط مستقیم ن ا ب محور لا سے زاویہ طہ بناتا ہوا کھینچا جائے اور یہ دائرہ کو ا اور ب پر کاٹے تو (حصہ اول دفعہ ۰ اب نتیجہ صریح کی رو سے) ن ا اور ن ب سمتی نیم قطر ر کی وہ قیمتیں ہونگی جن کے لئے محدد (لاَ + رجم طہ، ماَ + رجب طہ) دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی ن ا، ن ب مساوات

(لاَ + رجم طہ)² + (ماَ + رجب طہ)² + ۲گ (لاَ + رجم طہ) + ۲ف (ماَ + رجب طہ) + ج = ۰

یا ر² + ۲ ر {(لاَ + گ) جم طہ + (ماَ + ف) جب طہ} + لاَ² + ماَ² + ۲گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج = ۰ ....(ا)

میں ر کی قیمتیں ہیں۔

اس لئے ن ا × ن ب = لاَ² + ماَ² + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج ....(ب)

جس سے ظاہر ہے کہ یہ حاصل ضرب ن میں سے گذرنیوالے وتر کی

سمت پر منحصر نہیں۔
(مقابلہ کرو اقلیدس م ۳ ش ۳۶)
جب ن میں سے گزرنیوالا خط مستقیم دائرہ کو مس کرے تو ا اور ب ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ن ا، ن ب میں سے ہر ایک اُس مماس کے مساوی ہوگا جو ن سے دائرہ تک کھینچا گیا ہو۔

اس لئے مماس کے طول کا مربع ہے

لاَ^{2} + ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج ....(۲)

اور ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ ن کے محددوں کو دائرہ کی مساوات کے بائیں رُکن میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے (یاد رہے کہ محدد مندرج کرنے سے قبل لا^2 اور ما^2 میں سے ہر ایک کا سر ایک ہونا چاہیئے)

[جملہ لاَ^{2} + ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج اسطرح لکھا جا سکتا ہے

(لاَ + گ)^2 + (ماَ + ف)^2 - (گ^2 + ف^2 - ج)

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مماس کا مربع = نقطہ معلومہ اور مرکزِ دائرہ کے درمیانی فاصلہ کا مربع - دائرہ کے نصف قطر کا مربع

نوٹ اس طریقہ کو پورے طور پر ذہن نشین کرنے کی غرض سے طالب علم کو چاہیے کہ ذیل کے منحنی کی صورت میں جو عام مساوات

ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ سے

متعین ہوتا ہے ایسا ہی عمل کرے جو اوپر کیا گیا ہے۔

اگر نقطہ ن (لاَ، ماَ) میں سے وتر ن ا ب، ن اَ بَ کھینچے جائیں جو محور لا سے زاوئے طہ اور طہَ بنائیں اور منحنی سے ا، ب اور اَ، بَ پر ملیں تو معلوم ہوگا

کہ ن ا × ن ب = (ا لاَ^{2} + ۲ھ لاَ ماَ + ب ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج) / (ا جم^2 طہ + ۲ھ جم طہ جب طہ + ب جب^2 طہ)

اور ن اَ × ن بَ = (ا لاَ^{2} + ۲ھ لاَ ماَ + ب ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج) / (ا جم^2 طہَ + ۲ھ جم طہَ جب طہَ + ب جب^2 طہَ)

پس نسبت (ن ا × ن ب) / (ن اَ × ن بَ) صرف متقاطع وتروں کی سمتوں پر منحصر ہے اور نقطہ

ن (لاَ، ماَ) کے مقام پر منحصر نہیں۔ [دیکھو دفعہ ۱۳۲]

اگر نقطہ ن دائرہ کے اندر ہو تو جملہ لاَ² + ماَ² + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج منفی ہوگا (کیونکہ اس صورت میں ن ا اور ن ب کی علامتیں مختلف ہیں) اور طولوں ا ن اور ن ب کی سطح کو تعبیر کریگا جس کے پہلے منفی علامت ثبت کرنی چاہئے۔

مشقیں

۶۔ اُن مماسات کا طول معلوم کرو جو (ا) نقطہ (۶، ۴) سے دائرہ لا² + ما² = ۲۰ تک (ب) مبدأ سے دائرہ (لا − ۱)² + (ما − ۲)² = ۴ تک اور (ج) نقطہ (۲، ۳) سے دائرہ ۲ لا² + ۲ ما² − ۵ لا − ۷ ما + ۶ = ۰ تک کھینچے جائیں۔

۷۔ اگر ایک نقطہ سے دو ہم مرکز دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ اُنکے مربعوں کا فرق نقطہ مذکورہ کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۲۶۔ دائرہ کی صورت میں متوازی وتروں کا ایک نظام دیا گیا ہے، اِن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ وتر محور لا سے زاویہ طہ بناتے ہیں اور دائرہ کی مساوات ہے

لا² + ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ....(۱)

فرض کرو کہ کسی ایک وتر کا وسطی نقطہ (لاَ، ماَ) ہے، تب ر کی وہ دو قیمتیں جن کے لئے کہ محدد (لاَ + ر جم طہ، ماَ + ر جب طہ) مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں مقداریں مساوی اور علامت میں مختلف ہونی چاہئیں کیونکہ وتر کے دونوں مساوی حصے نقطہ (لاَ، ماَ) سے متقابل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں۔

اس لئے مساوات (۱) دفعہ ۲۵ میں اصلوں کا مجموعہ صفر ہونا چاہئے یعنی

(لاَ + گ) جم طہ + (ماَ + ف) جب طہ = ۰

اس لئے مطلوبہ طریق خط مستقیم

(لا + گ) جم طہ + (ما + ف) جب طہ = ۰ ....(۳)

ہے جو مرکز (− گ، − ف) میں سے گذرتا ہے نیز ظاہر ہے کہ یہ خط متوازی

وتروں پر عمود ہے کیونکہ اگر مبدأ میں سے خط (۳) پر عمود نکالا جائے تو یہ محور لا سے زاویہ طہ بنائیگا (مقابلہ کرو اقلیدس م ۳ شں ۳ کے ساتھ)

مشق

۸ - دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 13$ کے ایسے وتروں کے وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو جو $2\,\text{لا} + 3\,\text{ما} - 5 = 0$ کے متوازی ہوں۔

۲۷ - دو دائروں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\,\text{لا} + 2\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$ اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\,\text{لا} + 2\text{ف}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$ کے وتر مشترک کی مساوات معلوم کرو۔

مساوات $(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\,\text{لا} + 2\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1) - (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\,\text{لا} + 2\text{ف}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2) = 0$ ذیل کی مساوات میں تحویل ہوتی ہے

$$2(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)\,\text{لا} + 2(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)\,\text{ما} + \text{ج}_1 - \text{ج}_2 = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے نیز لا، ما کی ایسی تمام قیمتیں اُسکو پورا کرتی ہیں جو دونوں دائروں کی مساواتوں کو پورا کریں، اس لئے مساوات (۴) ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے یعنی (۴) وتر مشترک کی مساوات ہے۔ جب دائرے ایکدوسرے کو حقیقی نقاط پر نہ قطع کریں تو اس صورت میں بھی (۴) کسی خط مستقیم کو تعبیر کریگی، دفعہ ۲۹ میں ہم اس خط مستقیم کی ہندسی تعبیر معلوم کرینگے۔

۲۸ - بنیادی محور تعریف دو دائروں کا بنیادی محور ایسے نقطوں کا طریق ہے جن سے اگر ان دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو یہ مماس باہم مساوی ہوں۔

۲۹ - دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔

اگر نقطہ (لاَ، ماَ) بنیادی محور پر واقع ہو اور دائروں کی مساواتیں حسب بالا ہوں تو دفعہ ۲۵ کی رو سے

$$\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + 2\text{گ}_1\,\text{لاَ} + 2\text{ف}_1\,\text{ماَ} + \text{ج}_1 = \text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + 2\text{گ}_2\,\text{لاَ} + 2\text{ف}_2\,\text{ماَ} + \text{ج}_2$$

یا $2(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)\,\text{لاَ} + 2(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)\,\text{ماَ} + (\text{ج}_1 - \text{ج}_2) = 0$

اس لئے ان دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات ہے

۲ (گ$_1$ - گ$_2$) لا + ۲ (ف$_1$ - ف$_2$) ما + (ج$_1$ - ج$_2$) = ۰ ...... (۵)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دفعہ ۲۷ کی مساوات (۴) دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات ہے اور یہ تعبیر ہندسی نقطہ نظر سے کچھہ معنی رکھتی ہے خواہ دائرے ایکدوسرے کو حقیقی نقاط پر قطع کریں یا نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ وتر مشترک کی مساوات وہی ہے جو بنیادی محور کی، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دو متقاطع دائروں کا بنیادی محور ان کا وتر مشترک ہوتا ہے یا با لفاظ دیگر اگر ان دائروں کے وتر مشترک کے کسی نقطہ سے دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔ ہندسی طریق پر یہ اقلیدس حم ۳ شکس ۳۶ سے ظاہر ہے۔ بالخصوص یاد رہے کہ وتر مشترک مشترک مماسوں کی تنصیف کرتا ہے۔

یہ بھی ملاحظہ ہو کہ جو خط مرکزوں (- گ$_1$ - ف$_1$) اور (- گ$_2$ - ف$_2$) کو ملاتا ہے اس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} + \text{گ}_1}{\text{گ}_1 - \text{گ}_2} = \frac{\text{ما} + \text{ف}_1}{\text{ف}_1 - \text{ف}_2}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ بنیادی محور مرکزوں کے ملانے والے خط پر عمود ہے

۳۰۔ مختصر طریق کتابت میں (دیکھو حصہ اول دفعہ ۲۷) اگر س$'$ اور س$''$ بالترتیب جملات لا^2 + ما^2 + ۲گ$_1$ لا + ۲ف$_1$ ما + ج$_1$ اور لا^2 + ما^2 + ۲گ$_2$ لا + ۲ف$_2$ ما + ج$_2$ کو تعبیر کریں تو دائروں س$'$ = ۰ اور س$''$ = ۰ کے بنیادی محور کی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے س$'$ - س$''$ = ۰ لیکن بخوبی یاد رہے کہ اس اختصار میں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ دائرہ کی مساوات میں سب رقمیں بائیں جانب منتقل کر دی گئی ہیں اور مختصر طریق کتابت اختیار کرنے سے قبل لا^2 اور ما^2 کے سروں کو ایک کے مساوی بنا لیا گیا ہے۔

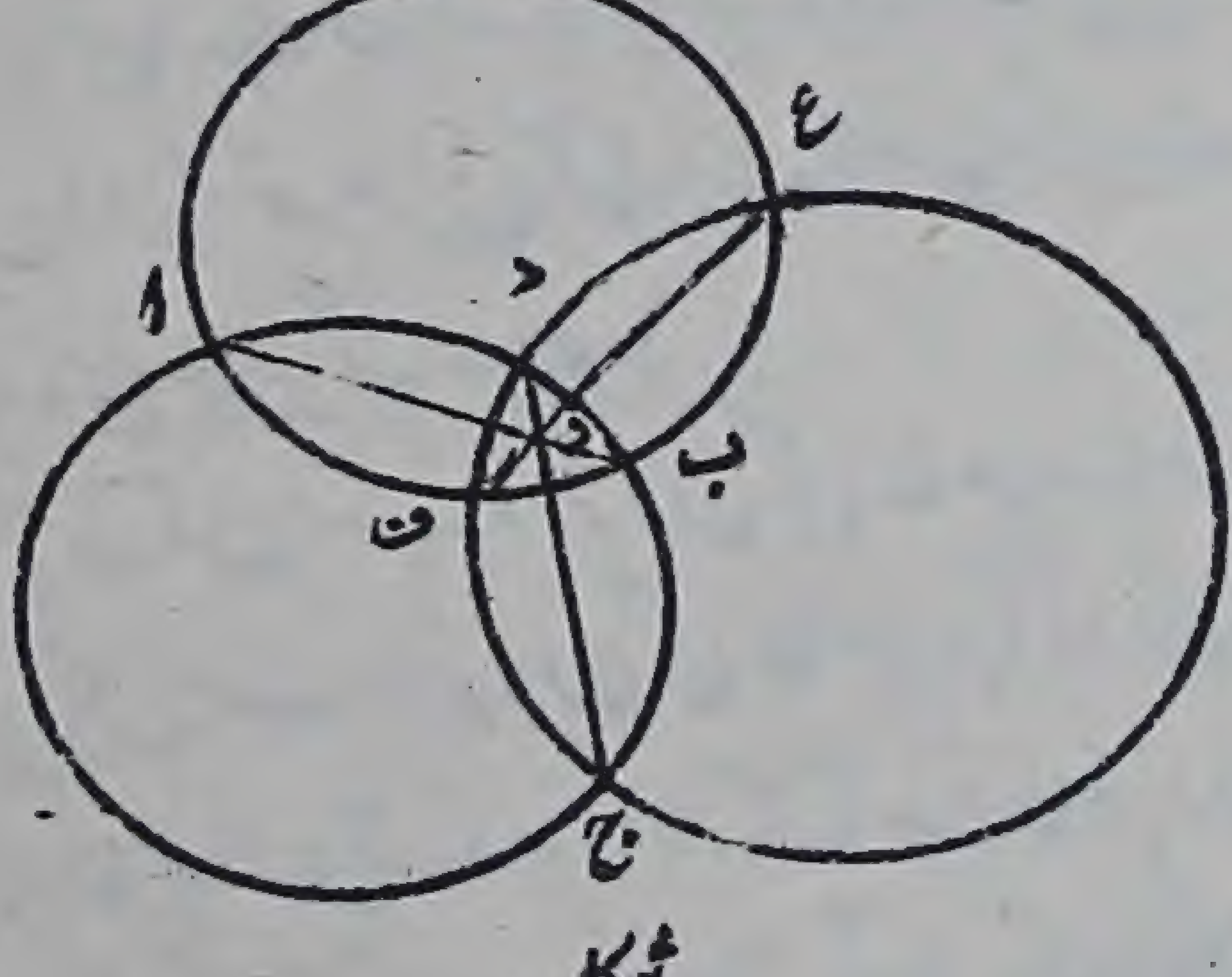
۳۱۔ اُن سب دائروں کی عام مساوات جن کا بنیادی محور وہی ہو جو دو معلومہ دائروں کا ہے۔

اُن سب دائروں کی عام مساوات جو ایک ہی مشترک بنیادی محور رکھتے ہوں س$'$ + لہ س$''$ = ۰ ہو گی جہاں س$'$ = ۰ اور س$''$ = ۰ نظام دوائر کے کسی دو دائروں کی مساواتیں ہیں۔ کیونکہ س$'$ = ۰ اور س$''$ = ۰ کا بنیادی محور س$'$ - س$''$ = ۰ ہے اور چونکہ جملہ

سَ + لہ سً میں لاؔ، ماؔ کا سر ۱ + لہ ہے، اس لئے سَ = ۰ اور سَ + لہ سً = ۰ کا بنیادی محور
سَ ـ سَ + لہ سً / ۱ + لہ = ۰ یا سَ ـ سً = ۰ ہے [دیکھو یادداشت دفعہ بالا]
یعنی سَ = ۰ اور سَ + لہ سً = ۰ کا بنیادی محور وہی ہے جو دو معلومہ دائروں کا ہے۔
اب مساوات سَ + لہ سً = ۰ کسی ایسے نقطہ کے محددوں سے پوری
ہوتی ہے جو دونوں مساواتوں سَ = ۰ اور سً = ۰ کو پورا کرتے ہیں۔
اسلئے اگر دوائر سَ = ۰ اور سً = ۰ کے نقاط تقاطع حقیقی ہوں تو تمام
دائرے حقیقی نقاط کے ایک ہی جوڑے میں سے گذرینگے۔
جب سَ = ۰ اور سً = ۰ حقیقی نقاط پر ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو
اُس صورت میں بھی انکی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کرنے سے ہمیں لاؔ کی دو خیالی
قیمتیں اور اُن کے جواب میں ماؔ کی دو خیالی قیمتیں مل سکتی ہیں اور انہیں ہم دو ایسے
خیالی نقاط کے محدد تصور کرسکتے ہیں جو مساواتوں سَ = ۰ اور سً = ۰ اور
اس لئے سَ + لہ سً = ۰ کو پورا کرہیں۔ اس لئے اس صورت میں
اگرچہ ہم ان نقاط کو شکل میں نہیں دکھا سکتے تاہم ہم یہ خیال کرتے ہیں کہ نظام
مذکور کے تمام دائرے اُن دو خیالی نقاط میں سے گذرتے ہیں جو سَ = ۰ اور سً = ۰
کے نقاط تقاطع ہیں۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ اُن سب دائروں کے مرکز جو ایک ہی مشترک محور
رکھتے ہوں یا بالفاظ دیگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے سب مرکز ایک ہی خط
میں واقع ہوتے ہیں کیونکہ کسی دو مرکزوں کو ملانے والا خط مشترک بنیادی محور پر عمود ہوتا ہے۔

۳۲ــ تین دائروں کے تین بنیادی محور جبکہ دو دو دائروں کو الگ الگ لیا جائے ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں
مختصر طریق کتابت کے موافق
سَ = ۰، سً = ۰، سؔ = ۰ ہیں
بنیادی محوروں کی مساواتیں ہیں



شکل ۹

س′ − س″ = ۰
س″ − س‴ = ۰
س‴ − س′ = ۰

چونکہ جب ان مساواتوں کے دائیں طرف کے رکنوں کو اکٹھا جمع کیا جاتا ہے تو یہ متطابقاً صفر ہوتے ہیں اس لئے ثابت ہوا کہ تینوں بنیادی محور ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں [حصہ اول، دفعہ ٢٣]
اس نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مرکز "کہتے ہیں۔

مشقیں

٩ — دو دائر لا^{٢} + ما^{٢} − ٤ لا + ٤ ما − ١ = ۰ اور لا^{٢} + ما^{٢} + ٢ لا − ٣ ما − ١ = ۰ کے وتر مشترک کی مساوات معلوم کرو۔

١۰ — ثابت کرو کہ دائروں لا^{٢} + ما^{٢} + ٢ ما = ۰؛ لا^{٢} + ما^{٢} + لا − ما − ٢ = ۰ اور لا^{٢} + ما^{٢} + ٣ لا − ٧ ما − ٦ = ۰ کا مشترک بنیادی محور ایک ہی ہے اسے معلوم کرو۔

١١ — دائروں لا^{٢} + ما^{٢} + ٢ لا + ٤ ما + ٤ = ۰ اور
٤ لا^{٢} + ٤ ما^{٢} − ٤٤ لا + ٨ ما + ٢٥ = ۰ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔

١٢ — دائروں لا^{٢} + ما^{٢} + ٢ لا + ٤ ما = ٧ اور لا^{٢} + ما^{٢} − ٦ لا + ٢ ما = ٥ کا بنیادی محور معلوم کرو اور دکھاؤ کہ یہ دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔

١٣ — دو دائر لا^{٢} + ما^{٢} − ٣ لا − ٦ ما + ٨ = ۰؛ لا^{٢} + ما^{٢} − لا − ٤ ما + ٢ = ۰ اور لا^{٢} + ما^{٢} + ٢ لا − ٦ ما + ٣ = ۰ کا بنیادی مرکز معلوم کرو۔

٣٣ — انتہائی نقطے — مساوات س′ + لہ س″ = ۰ میں لہ کو مناسب قیمت دینے سے ہم دائرہ س′ + لہ س″ = ۰ کے نصف قطر کو صفر بنا سکتے ہیں اور اسطرح دائروں کے ہم محور نظام کا ایک نقطہ دائرہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم دیکھینگے کہ حسب مساوات سے لہ کی مطلوبہ قیمت یا قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

وہ مساوات درجہ دوم ہے اس لئے معلوم ہوا کہ دائروں کے کسی ہم محور نظام میں دو نقطے دائرے (حقیقی یا خیالی) ہوتے ہیں جو باقی دائروں کی طرح اس نظام کے رکن ہیں۔ ان کو نظام مذکور کے "انتہائی نقطے" کہتے ہیں۔

ثابت کرو کہ دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں جب دائرے حقیقی نقاط پر ایکدوسرے کو قطع کریں اور حقیقی ہوتے ہیں جب دائرے خیالی نقاط پر قطع کریں۔

ہندسی نقطۂ نظر سے پہلا حصہ عیاں ہے کیونکہ کوئی نقطہ دائرہ دو ایسے نقطوں میں سے نہیں گذر سکتا جو ایکدوسرے سے محدود فاصلہ پر واقع ہوں۔

مگر دونوں حصے تحلیلی طریق پر اس طرح ثابت ہو سکتے ہیں۔ دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو محور لا مقرر کرو اور بنیادی محور کو محور ما (اگر اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہم دائرہ کی عام مساوات لیں تو ہم دیکھینگے کہ عمل طولانی اور پریشان کن ہوگا)

فرض کرو کہ نظام کے ایک دائرہ کا مرکز (ھ، ۰) ہے اور نصف قطر ا،

اس دائرہ کی مساوات ہوگی $(\text{لا} - \text{ھ})^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ . . . . (ا)

بنیادی محور کی مساوات ہے $\text{لا} = ۰$ . . . . (ب)

نظام دوائر کا ہر ایک دائرہ (ا) اور (ب) کے نقاط تقاطع (حقیقی یا خیالی) میں سے گذرتا ہے اس لئے اس نظام کے کسی دائرہ کی مساوات اس شکل کی ہونی چاہیئے

$$(\text{لا} - \text{ھ})^{۲} + \text{ما}^{۲} - \text{ا}^{۲} + \text{لہ}\,\text{لا} = ۰$$

یا $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + (\text{لہ} - ۲\,\text{ھ})\,\text{لا} + \text{ھ}^{۲} - \text{ا}^{۲} = ۰$ . . . . (ج)

اگر اس دائرہ کا نصف قطر صفر ہو تو

$$(\tfrac{۱}{۲}\,\text{لہ} - \text{ھ})^{۲} - (\text{ھ}^{۲} - \text{ا}^{۲}) = ۰$$

یا $(\text{لہ} - ۲\,\text{ھ})^{۲} - ۴\,(\text{ھ}^{۲} - \text{ا}^{۲}) = ۰$ . . . . (د)

مساوات (د) میں لہ کی قیمتیں حقیقی یا خیالی ہونگی اگر $\text{ھ}^{۲}$ بالترتیب بڑا ہو یا چھوٹا ہو $\text{ا}^{۲}$ سے یعنی اگر دائرہ (ا) کے مرکز کا فاصلہ بڑا ہو یا چھوٹا ہو دائرہ کے نصف قطر سے

یعنی اگر یہ دائرہ اور بنیادی محور ایکدوسرے کو خیالی یا حقیقی نقاط پر قطع کریں تو اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

انتہائی نقاط کی مساواتیں ہیں $\{لا + \frac{1}{2}(له - ۲ھ)\}^2 + ما^2 = ۰$

یعنی $لا = -\frac{1}{2}(له - ۲ھ)$، $ما = ۰$ (ہر ایک مربع الگ الگ صفر کے مساوی ہوگا کیونکہ ایک حقیقی مقدار کا مربع منفی نہیں ہو سکتا) جہاں له مساوات (د) سے معلوم ہوگا۔

اسلئے انتہائی نقاط کے محدد $(\sqrt{ھ^2 - ا^2}, ۰)$ اور $(-\sqrt{ھ^2 - ا^2}, ۰)$ ہیں۔

مشق

۱۴۔ ہم محور دائروں کے نظام $لا^2 + ما^2 + له\,لا - ۵\,له - ۱۶ = ۰$ کے انتہائی نقاط معلوم کرو۔

۳۴۔ نقطہ $(لا', ما')$ سے دائرہ $لا^2 + ما^2 + ۲گ\,لا + ۲ف\,ما + ج = ۰$ کے جو دو مماس کھنچ سکتے ہیں ان کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ع کے محدد $(لا', ما')$ ہیں اور اس نقطہ سے دائرہ کے مماس ع ق اور ع ر کھینچے گئے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ س جملہ $لا^2 + ما^2 + ۲گ\,لا + ۲ف\,ما + ج$ کو اور س' جملہ $لا'^2 + ما'^2 + ۲گ\,لا' + ۲ف\,ما' + ج$ کو اور م جملہ $لا\,لا' + ما\,ما' + گ(لا + لا') + ف(ما + ما') + ج$ کو تعبیر کرتا ہے

مساوات $ک\,س - م(ل\,لا + ف\,ما + ص)$ جہاں ک ایک مستقل مقدار ہے ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جس کی مساوات درجہ دوم کی ہے اور جو ان چار نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر خطوط $م = ۰$ اور $ل\,لا + ف\,ما + ص = ۰$ دائرہ $س = ۰$ کو قطع کرتے ہیں۔

اب $م = ۰$ ان مماسات کے وتر تماس ق ر کی مساوات ہے جو نقطہ ع سے کھینچے جائیں، فرض کرو کہ $ل\,لا + ف\,ما + ص = ۰$ حرکت کرتے کرتے

بالآخر م = ۰ پر منطبق ہو جاتا ہے۔

اِس صورت میں ک س۔ م۲ = ۰ ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جس کی مساوات درجہ دوم کی ہے اور جو دائرہ کے نقطہ ق پر دو منطبق ہونیوالے نقاط میں سے نیز نقطہ ر پر کے دو منطبق ہونیوالے نقاط میں سے گذرتا ہے یعنی معلوم ہوا کہ یہ منحنی ایسا ہے کہ مماسات ع ق اور ع ر اُس کو ق اور ر پر مس کرتے ہیں۔

اب خطوط مستقیم ع ق، ع ر کا جوڑا خود ایک ایسا منحنی ہے جو اِن شرائط کو پورا کرتا ہے اس لئے یہ نظام ک س۔ م۲ = ۰ کا ایک رکن ہے جو ک کو ایک خاص قیمت دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ اب ک کی قیمت مطلوبہ وہ ہوگی جو منحنی ک س۔ م۲ = ۰ کو نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گذار سکے کیونکہ اِس صورت میں خط ع ق منحنی س = ۰ کو تین نقطوں پر کاٹیگا (نقطہ ع پر اور دو منطبقہ نقاط ق پر) اور اسیطرح ع ر بھی تین نقطوں پر اسے قطع کریگا لیکن درجہ دوم کا منحنی ایسا نہیں کر سکتا جب تک کہ یہ خطوط مستقیم کے ایک جوڑے (ع ق اور ع ر) پر مشتمل نہ ہو۔

اِس لئے ک کی مطلوبہ قیمت مساوات ک س۔ م۲ = ۰
میں (لا، ما) کی بجائے (لا۱، ما۱) مندرج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
اِس اندراج کے بعد س اور م دونوں بالترتیب س۱ ہو جاتے ہیں

∴ ک س۱ ۔ س۱۲ = ۰ یا ک = س۱

اسلئے نقطہ (لا۱، ما۱) سے مماسات کا جو جوڑا کھنچ سکتا ہے اسکی مساوات ہے

س۱ س ۔ م۲ = ۰ (۶)

طالب علم پر واضح ہو کہ اوپر کا استدلال خاص اہمیت رکھتا ہے، وہ اِس پر پورا عبور حاصل کرلے۔ ک کی قیمت اس شرط (حصہ اول، دفعہ ۳۲) کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہے کہ مساوات ک س ۔ م۲ = ۰ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے لیکن اِس صورت میں حسابات طولانی اور تکلیف دہ ہونگے۔

۳۵ — مسئلہ بالا کی اہمیت کے لحاظ سے اِس کا ایک اور حل یہاں دیا جائیگا۔
اُس نقطہ کے محدد جو (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کے ملانے والے خط کو نسبت

ک : ل سے تقسیم کرتا ہے $\frac{\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$ ، $\frac{\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$ ہیں (حصہ اول دفعہ ۲)۔
اگر اس نقطہ کے محدد دائرہ کی مساوات میں مندرج کئے جائیں تو $\frac{\text{ک}}{\text{ل}}$ میں ایک مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اور اس مساوات سے وہ نسبتیں حاصل ہونگی جن کے موافق دائرہ نقاط (لا₁، ما₁) اور (لا₂، ما₂) سے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے۔
اگر (لا₂، ما₂) کسی ایک مماس پر واقع ہو جو نقطہ (لا₁، ما₁) سے کھینچا گیا ہے تو مساوات درجہ دوم کی اصلیں مساوی ہونگی۔

مساوات زیر بحث یہ ہے

$$(\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1)^2 + (\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1)^2 + 2\text{گ}(\text{ک} + \text{ل})(\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1)$$
$$+ 2\text{ف}(\text{ک} + \text{ل})(\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1) + \text{ج}(\text{ک} + \text{ل})^2 = 0$$

یا $\text{ک}^2\,\text{س}_2 + 2\,\text{ک}\,\text{ل}\,\text{م}_{12} + \text{ل}^2\,\text{س}_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

جہاں $\text{س}_1 = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\text{گ}\,\text{لا}_1 + 2\text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج}$

$\text{س}_2 = \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + 2\text{گ}\,\text{لا}_2 + 2\text{ف}\,\text{ما}_2 + \text{ج}$

$\text{م} = \text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{ما}_1\,\text{ما}_2 + \text{گ}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2) + \text{ف}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) + \text{ج}$

اگر مساوات (۱) کی اصلیں مساوی ہوں تو اس کے لئے شرط یہ ہے
$\text{س}_1\,\text{س}_2 - \text{م}^2 = 0$، پس لا₂ اور ما₂ میں آخر کے ہندسوں کو حذف کرنے سے ان مماسوں کے جوڑے کی مساوات جو نقطہ (لا₁، ما₁) سے دائرہ کے محیط تک کھنچ سکتے ہیں

$$\text{س}\,\text{س}_1 - \text{م}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

حاصل ہوتی ہے جہاں س، س₁ اور م کا مفہوم وہی ہے جو اوپر بیان ہوا۔

مشقیں

۱۵۔ دفعات ۳۴ اور ۳۵ کے ضابطہ کی مدد کے بغیر اوپر کے کسی طریقے سے ثابت کرو کہ نقطہ (لا₁، ما₁) سے دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ کے مماسات کی مساوات ہے

(لا^٢ + ما^٢ − ل^٢) (لا′^٢ + ما′^٢ − ل^٢) − (لا لا′ + ما ما′ − ل^٢)^٢ = ۰

۱۶ – نقطہ (۵، ۵) سے دائرہ لا^٢ + ما^٢ − ۶ لا − ۶ ما + ۱۴ = ۰ کے جو دو مماس کھنچ سکتے ہیں انکی مساوات معلوم کرو۔

۳۶ – محددوں کو ایک متبدل کی رقوم میں بیان کرنا۔

اگر محور قائم ہوں تو دائرہ لا^٢ + ما^٢ = ل^٢ کے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدد (ل جم عہ، ل جب عہ) سے تعبیر ہو سکتے ہیں جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو نقطۂ مذکورہ میں سے گذرنیوالا نصف قطر محور لا سے بناتا ہے۔ اگر محددوں کو ایک مجہول مقدار عہ کی رقوم میں اسطرح بیان کر لیا جائے تو بعض اوقات وہ مساواتیں جن سے ہمیں بالعموم سابقہ پڑتا ہے نہایت سادہ اور مختصر صورت میں لائی جا سکتی ہیں بالخصوص نقطہ (ل جم عہ، ل جب عہ) پر جسے ہم آیندہ "نقطہ عہ" کہیں گے مماس کی مساوات ہے

لا جم عہ + ما جب عہ = ل

مشقیں

۱۷ – ثابت کرو کہ دائرہ لا^٢ + ما^٢ = ل^٢ کے نقطہ عہ پر کے عماد کی مساوات ما = لا مس عہ ہے
۱۸ – ثابت کرو کہ نقاط عہ اور بہ کو ملانے والے وتر کی مساوات ہے

لا جم (عہ + بہ)/٢ + ما جب (عہ + بہ)/٢ = ل جم (عہ − بہ)/٢

۱۹ – ثابت کرو کہ عہ اور بہ پر کے مماسات کا نقطہ تقاطع

(ل جم (عہ + بہ)/٢ قط (عہ − بہ)/٢، ل جب (عہ + بہ)/٢ قط (عہ − بہ)/٢) ہے۔

۲۰ – اگر ق اور ر پر کے مماسات ن پر ملیں، و مرکز ہو اور و ن، ق ر کو ن′ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ و ن × و ن′ = و ق^٢

۳۷ – تقلیب۔ تعریف فرض کرو کہ و ایک نقطہ معلومہ ہے اور ن ایک اور نقطہ ایک معلومہ منحنی پر واقع ہے، و ن پر ایک نقطہ ن′ ایسا لو کہ

$\text{و ن} \times \text{و ن}' = \text{ک}^2$ جہاں ک ایک مستقل مقدار ہے۔ جیسے ن معلومہ منحنی پر حرکت کرتا ہے ن' بھی شرطِ بالا کے ماتحت ایک منحنی مرتسم کرتا ہے۔ ن' کے اِس طریق کو معلومہ منحنی کا مقلوب کہتے ہیں بلحاظ نقطہ و اور نصف قطر تقلیب ک کے۔

دائرہ کا مقلوب بلحاظ کسی نقطہ کے معلوم کرو۔

نقطہ معلومہ کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات قطبی محددوں میں

$$\text{ر}^2 - 2\,\text{ر}\,\text{د}\,\text{جم}\,(\text{ط} - \text{ع}) + \text{د}^2 = \text{ا}^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

ہے جہاں (د ، ع) مرکز کے قطبی محدد ہیں اور ا نصف قطر ہے۔ اگر دائرہ کے نقطہ (ر ، ط) کے جواب میں مقلوب منحنی پر نقطہ (ر' ، ط) ہو تو $\text{ر}\,\text{ر}' = \text{ک}^2$

$$\text{یا}\quad \text{ر} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ر}'}$$

ر کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کرنے اور ر' کی زبروں کو حذف کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مقلوب کی مساوات دائرہ کی مساوات (۱) میں ر کی بجائے $\frac{\text{ک}^2}{\text{ر}}$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لئے یہ مساوات حسب ذیل ہے

$$\left(\frac{\text{ک}^2}{\text{ر}}\right)^2 - 2\,\frac{\text{ک}^2}{\text{ر}}\,\text{د}\,\text{جم}\,(\text{ط} - \text{ع}) + \text{د}^2 = \text{ا}^2$$

$$\text{یا}\quad \text{ر}^2 - 2\,\frac{\text{ک}^2\,\text{د}}{\text{د}^2 - \text{ا}^2}\,\text{ر}\,\text{جم}\,(\text{ط} - \text{ع}) + \frac{\text{ک}^4\,\text{د}^2}{(\text{د}^2 - \text{ا}^2)^2} = \frac{\text{ک}^4\,\text{ا}^2}{(\text{د}^2 - \text{ا}^2)^2} \quad \ldots (2)$$

اسلئے دائرہ کا مقلوب ایک دائرہ ہے جس کا مرکز

$\left(\frac{\text{ک}^2\,\text{د}}{\text{د}^2 - \text{ا}^2} ، \text{ط}\right)$ ہے اور جس کا نصف قطر $\frac{\text{ک}^2\,\text{ا}}{\text{د}^2 - \text{ا}^2}$ ہے

اِس مساوات کا ہندسی مفہوم یہ ہے۔ فرض کرو کہ ن' نقطہ ن کا مقلوب ہے اور و ن دائرہ معلومہ کو دوبارہ ق پر قطع کرتا ہے اب $\text{و ن} \times \text{و ن}' = \text{ک}^2$ اور $\text{و ن} \times \text{و ق} =$ اُس مماس کا مربع جو و سے کھینچا جائے $= \text{د}^2 - \text{ا}^2$

$$\therefore\quad \text{و ن}' = \frac{\text{ک}^2}{\text{د}^2 - \text{ا}^2}\,\text{و ق}$$

پس مقلوب منحنی اصلی دائرہ کا عکس ہے پیمانہ $\frac{\text{ک}^2}{\text{د}^2 - \text{ا}^2}$ پر جہاں ن' ، ق کا جواب ہے اور ق' (جو ق کا مقلوب ہے) ن کا جواب ہے۔

اگر مرکز تقلیب و دائرہ کے محیط پر واقع ہو تو دائرہ کی مساوات ہوگی
ر = ۲ ا جم (ط - ع) اور مقلوب کی ر جم (ط - ع) = ک^۲ / ۲ ا ، اس
صورت میں دائرہ کا مقلوب ایک خط مستقیم ہے جو و میں سے گذرنیوالے نصف
قطر پر عمود ہے۔ اگر تقلیب کا نصف قطر ۲ ا ہو تو مقلوب و میں سے گذرنیوالے
قطر کے دوسرے سرے پر کا مماس ہوگا۔

مشق

۲۱ ۔ اگر ن کا مقلوب نَ ہو تو ثابت کرو کہ منحنی کے نقطہ ن اور مقلوب کے نقطہ
نَ پر کے مماسات خط ن نَ سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

(ا) اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ دائرہ
لا^۲ + ۲ لا ما جم سہ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
جو حصہ خط مستقیم ل لا + م ما = ۱ سے کاٹے اس کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنے۔
اگر ن اور ق نقاط تقاطع ہوں تو ہمیں و ن اور و ق کی مساوات معلوم
کرکے ان کے باہم علی القوائم ہونیکی شرط معلوم کرنی چاہیئے۔
پہلی مساوات کی مدد سے دوسری مساوات کو متجانس بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
و ن اور و ق کی مساوات ہے
لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ + ۲ (گ لا + ف ما) (ل لا + م ما)
+ ج (ل لا + م ما)^۲ = ۰
یا لا^۲ (۱ + ۲ گ ل + ج ل^۲) + ۲ لا ما {جم سہ + گ م + ف ل + ج ل م}
+ ما^۲ {۱ + ۲ ف م + ج م^۲} = ۰
اگر یہ ایکدوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو حصہ اول دفعہ ۲۹ کی رو سے
(۱ + ۲ گ ل + ج ل^۲) + (۱ + ۲ ف م + ج م^۲)
- ۲ (جم سہ + گ م + ف ل + ج ل م) جم سہ = ۰

یا اختصار کے بعد

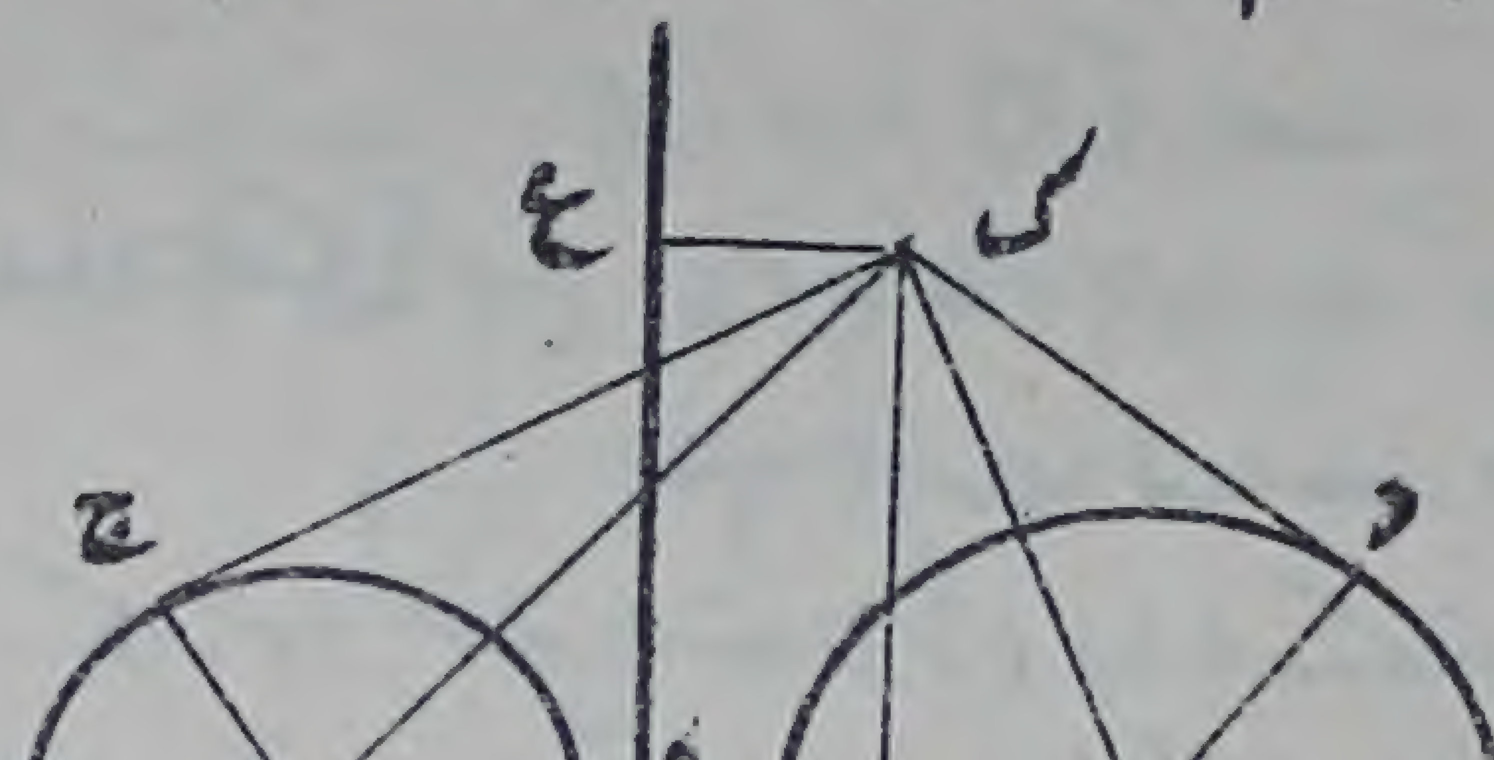
$$\text{۲ جب}^2\,\text{سم} + \text{۲ ل (گ - ف جم سم)} + \text{۲ م (ف - گ جم سم)}$$
$$+\ \text{ج (ل}^2 + \text{م}^2 - \text{۲ ل م جم سم)} = ۰$$

جو شرط مطلوبہ ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ اگر کسی نقطہ ک سے دو معلومہ دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو انکے مربعوں کا فرق دو چند سطح ک ع × ا ب کے مساوی ہے جہاں ک ع نقطہ ک سے بنیادی محور پر عمود ہے اور ا، ب دائروں کے مرکز ہیں۔

فرض کرو کہ ک کے محدد (لا، ما) ہیں اور دائروں کے مساواتیں $\text{س} = ۰$ اور $\text{س}' = ۰$ ہیں جہاں

$$\text{س} \equiv \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}_1\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{ج}$$
$$\text{اور س}' \equiv \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}_2\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}_2\,\text{ما} + \text{ج}$$



شکل ۱۰

نیز فرض کرو کہ س_1 اور $\text{س}'_1$ اُن نتائج کو تعبیر کرتے ہیں جو ک کے محددوں کو جملات س اور س' میں مندرج کرنے سے حاصل ہوں

نیز فرض کرو کہ نقطہ ک سے دائروں کے مماس ک ج اور ک د کھینچے گئے ہیں تب $\text{ک ج}^2 = \text{س}_1$، $\text{ک د}^2 = \text{س}'_1$

$$\therefore\ \text{ک ج}^2 - \text{ک د}^2 = \text{س}_1 - \text{س}'_1 \quad \ldots\ldots (۱)$$

بنیادی محور کی مساوات ہے $\text{س} - \text{س}' = ۰$ جس میں لا کا سر $۲\,(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)$ ہے اور ما کا سر $۲\,(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)$

$$\text{اس لئے ک ع} = \frac{\text{س}_1 - \text{س}'_1}{۲\sqrt{(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)^2 + (\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

(حصہ اول دفعہ ۱۷)

ہمیں ک ع کی علامت سے تعلق نہیں، ا کے محدد $(-\text{گ}_1، -\text{ف}_1)$ ہیں

اور ب کے ($-\text{گ}_2$ ، $-\text{ف}_2$)

$$\therefore \text{اب} = \sqrt{(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)^2 + (\text{ف}_1 - \text{ف}_2)^2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۱)، (۲) اور (۳) سے $\text{ک ج}^2 - \text{ک د}^2 = ۲\,\text{ک ع} \times \text{اب}$

(۳) کسی نقطہ ف سے ایک ہم محور نظام کے دو معلومہ دائروں کے مماس ف م_1 اور ف م_2 کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ جب ف اسی نظام کے کسی تیسرے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے تو نسبت ف م_1 : ف م_2 مستقل رہتی ہے۔

بطریق کتابت حسب مثال بالا فرض کرو کہ $\text{س}_1 = ۰$ اور $\text{س}_2 = ۰$ دو معلومہ دائروں کی مساواتیں ہیں۔ اسی نظام کے کسی اور دائرہ کی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\text{س}_1 + \text{ل}\,\text{س}_2 = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

جس کی ہندسی تعبیر (دفعہ ۲۵) یہ ہے کہ

$$\text{ف م}_1^2 + \text{ل}\,\text{ف م}_2^2 = ۰$$

یعنی جب نقطہ ف دائرہ (۱) کے محیط پر حرکت کرتا ہے تو

$$\frac{\text{ف م}_1}{\text{ف م}_2} = \sqrt{-\text{ل}} \quad \text{جو مستقل ہے۔}$$

[ملاحظہ ہو کہ ل کو منفی ہونا چاہئے اگر ف م_1 اور ف م_2 حقیقی ہوں]

(۴) ثابت کرو کہ دائرہ کا کوئی وتر دائرہ سے جو قوس کاٹتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف پر کا مماس وتر کے متوازی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ دائرہ کی مساوات ہے اور قوس کے سرے ا اور ب ہیں اور وسطی نقطہ ط۔

دفعہ ۳۶ کے طریق کتابت کے موافق فرض کرو کہ ا نقطہ عہ ہے اور ب نقطہ بہ۔ تب ط نقطہ $\frac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ})$ ہوگا۔ ط پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\text{لا جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{ما جب}\,\frac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ}) = \text{ر} \quad \ldots\ldots (۱)$$

وتر ا ب کی مساوات ہے ملاحظہ ہو مثال ۱۸ صفحہ ۲۸۔

لا جم $\frac{1}{2}$ (ع + ب) + ما جب $\frac{1}{2}$ (ع + ب) = ر جم $\frac{1}{2}$ (ع - ب) ....(۲)

ان دو مساواتوں میں لا اور ما کے سر وہی ہیں' اس لئے معلوم ہوا کہ یہ ایکدوسرے کے متوازی ہیں۔

(۵) ا ب ر د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے۔ ا ب' ر د نقطہ و پر ملتے ہیں' ا ر' ب د نقطہ ن پر اور ا د' ب ر نقطہ ق پر۔ ثابت کرو کہ ن ق نقطہ و کا قطبی ہے۔

و ا ب اور و د ر کو محاور لا اور ما فرض کرو۔

فرض کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ سمر ہے اور دائرہ کی مساوات ہے

لا^2 + ۲ لا ما جم سمر + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ....(۱)

تب و ا اور و ب' مساوات درجہ دوم لا^2 + ۲ گ لا + ج = ۰ کی اصلیں ہیں اور و ر' و د مساوات ما^2 + ۲ ف ما + ج = ۰ کی اصلیں ہیں' ج کی بجائے ت^2 لکھو اور فرض کرو کہ و ا = م ت' و ر = ل ت

تب و ب = $\frac{ت}{م}$ اور ۲ گ = - ت (م - $\frac{1}{م}$)

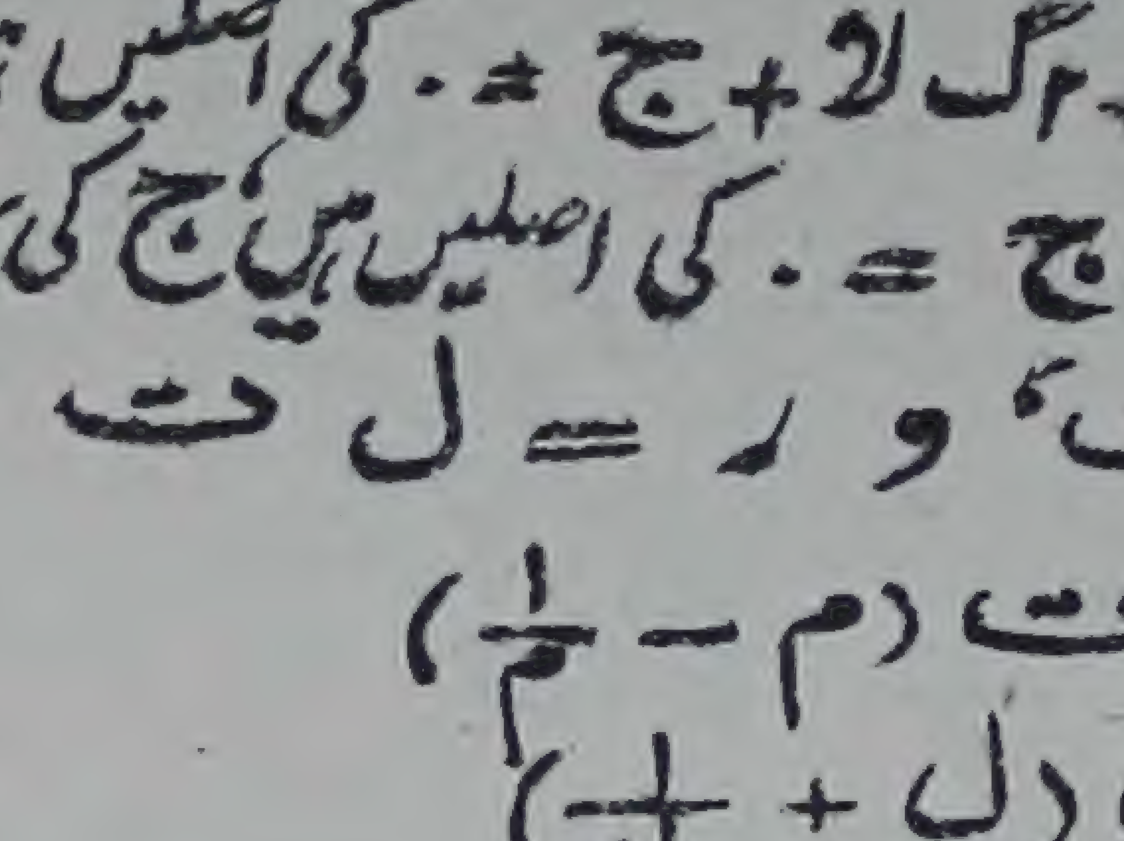
نیز و د = $\frac{ت}{ل}$ اور ۲ ف = - ت (ل + $\frac{1}{ل}$)

اس لئے دائرہ کی مساوات ہو جاتی ہے

لا^2 + ۲ لا ما جم سمر + ما^2 - (م + $\frac{1}{م}$) ت لا - (ل + $\frac{1}{ل}$) ت ما + ت^2 = ۰ ....(۲)

اور مبدأ و کا قطبی بلحاظ (۲) کے مثال ۳۰ صفحہ ۲۴ کی رو سے ہے

$\frac{1}{2}$ (م + $\frac{1}{م}$) لا + $\frac{1}{2}$ (ل + $\frac{1}{ل}$) ما - ت = ۰ ....(۳)



شکل ۱۱

اب چونکہ ن ق خطوط ا ر اور ب د کے نقطہ تقاطع میں سے اور نیز ا د اور ب ر کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے اس لئے (حصہ اول دفعہ ۲۲ کی رو سے) اس کی مساوات ذیل کی صورتوں پر مشتمل ہونی چاہئے

$$\left(\frac{لا}{م} + \frac{ما}{ل} - ت\right) + ک\,(لام + مال - ت) = ۰$$

اور $\left(\frac{لا}{م} + مال - ت\right) + کَ\left(لام + \frac{ما}{ل} - ت\right) = ۰$

جو باہم منطابق اُسی صورت میں ہوسکتی ہیں اگر ک = ۱ اور کَ = ۱

اس لئے ن ق کی مساوات ہے

$$لا\left(م + \frac{۱}{م}\right) + ما\left(ل + \frac{۱}{ل}\right) - ۲\,ت = ۰ \quad ....(۴)$$

یعنی ن ق نقطہ و کا قطبی ہے۔

[ملاحظہ ہو کہ نقطہ و سے مماس کا طول ت ہے]

باب دوم پر متفرق مشقیں

۴۲ ۔ نقطہ (لا، ما) سے دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کے مماس کھینچے گئے ہیں، اُن خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو مرکز کو مماسوں کے نقاط تماس کے ساتھ ملاتے ہیں، اگر یہ خطوط علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ (لا، ما) دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۲ ا^2$ کے محیط پر واقع ہوتا ہے

۴۳ ۔ ثابت کرو کہ مبدا سے دائرہ $لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ کے مماس کا طول $\sqrt{ج}$ ہے۔

۴۴ ۔ ذیل کے دائروں میں سے دو دو لیکر ان کے بنیادی محور معلوم کرو اور وہ نقطہ معلوم کرو جہاں ان کے تینوں بنیادی محور ایکدوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

$لا^2 + ما^2 - ۳ لا - ۶ ما + ۸ = ۰$، $لا^2 + ما^2 - لا - ۴ ما + ۲ = ۰$، $لا^2 + ما^2 + ۲ لا - ۶ ما + ۳ = ۰$

۴۵ ۔ ثابت کرو کہ اُس مماس کا طول جو دائرہ $لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ کے کسی نقطہ سے دائرہ $لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + جَ = ۰$ تک کھینچا جائے $\sqrt{جَ - ج}$ ہے۔

۴۶ ۔ دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کے جو وتر ثابت نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں انکے وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو۔

۴۷ ۔ اگر ایک نقطہ سے دو معلومہ دائروں کے مماس کھینچے جائیں اور انکے طولوں کی باہمی نسبت مستقل ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک ایسا دائرہ ہے جو معلومہ دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۲۸ ـ تین دائروں لا^۲ + ما^۲ = ۹، لا^۲ + ما^۲ − ۲لا − ۲ما = ۵ اور لا^۲ + ما^۲ + ۴لا + ۶ما = ۱۹ کے بنیادی مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۲۹ ـ ثابت کرو کہ دائرے ر = ۲ا جم (طہ − عہ) اور ر = ۲ب جم (طہ − بہ) ایکدوسرے کو زاویہ عہ − بہ پر کاٹتے ہیں۔

۳۰ ـ محیط پر کے کسی ایک نقطہ میں سے جتنے وتر گذرتے ہیں اُن کے وسطی نقاط کا طریق دریافت کرو۔

۳۱ ـ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گذرنے کے علاوہ خط مستقیم ۳لا + ۲ما + ۴ = ۰ اور دائرہ لا^۲ + ما^۲ + ۴لا + ۳ما + ۲ = ۰ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۳۲ ـ اُن مماسات کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ سے دائرہ
(لا − ن)^۲ + (ما − ق)^۲ = ر^۲ تک کھینچے جائیں۔

۳۳ ـ ثابت کرو کہ کسی دو دائروں کی مساواتیں ہمیشہ اسطرح لکھی جاسکتی ہیں
لا^۲ + ما^۲ + ن ما + ج = ۰، لا^۲ + ما^۲ + ق ما + ج = ۰

۳۴ ـ اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ مشق ۳۳ کے دائروں میں سے ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالتمام اندر واقع ہو۔

۳۵ ـ ثابت کرو کہ نقطہ (ن، ق) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ کے (لا − ج)^۲ + (ما − د)^۲ = ب^۲ کو مس کرتا ہے اگر ب^۲ (ن^۲ + ق^۲) = (ا^۲ − ج ن − د ق)^۲

۳۶ ـ ایک خط مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ کے خط مستقیم ا لا + ب ما = ۱ پر واقع ہوتا ہے ثابت کرو کہ خط مستقیم کی مساوات لا − ا ر^۲ = ج (ما − ب ر^۲) ہے جہاں ج مستقل ہے

۳۷ ـ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلوں میں جو نسبت ہے وہ اُن عمودوں کی نسبت کے مساوی ہے جو ہر نقطہ سے دوسرے کے قطبی پر نکالے جائیں۔

۳۸ ـ نقطہ (ن، ق) سے دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ کے مماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ جو مثلث ان مماسات اور (ن، ق) کے قطبی سے بنتا ہے اسکا رقبہ ر(ن^۲ + ق^۲ − ر^۲)^(۳/۲) ÷ (ن^۲ + ق^۲) ہے

۳۹ — دو دائرہ $(لا + ج)^2 + (ما + د)^2 = ر^2$ اور $(لا + د)^2 + (ما + ج)^2 = ر^2$ کے وترِ مشترک کا طول معلوم کرو۔

۴۰ — ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو قائم محوروں کو مس کرے۔

۴۱ — دو دائر $لا^2 + ما^2 - ا ما = ۰$؛ $لا^2 + ما^2 - ب لا = ۰$ کے مشترک مماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۴۲ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دو دائر $لا^2 + ما^2 + ۲ گ_1 لا + ۲ ف_1 ما + ج = ۰$؛ $لا^2 + ما^2 + ۲ گ_2 لا + ۲ ف_2 ما + ج = ۰$ کے ساتھ ہم محور ہو اور مبدا میں سے گذرے۔

۴۳ — ایک مثلث کا قاعدہ اور اضلاع کی باہمی نسبت معلوم ہے، ثابت کرو کہ راس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۴ — ایک ہم محور نظام دوائر کے مماس ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں، اُن کے نقاط تماس کا طریق معلوم کرو۔

۴۵ — اگر ایک سلسلہ کے دائرے ایکدوسرے کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو ان کے قطبی بلحاظ ایک نقطہ معلومہ کے متراکز ہونگے۔

آزمائشی پرچہ ۱

۱ — ایک خط مستقیم کا طول ۲ ا معلوم ہے اور یہ اسطرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے ہمیشہ محوروں پر واقع ہوتے ہیں، اس کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو، محور قائم ہیں۔

۲ — مبدا سے ایک نقطہ کا جو فاصلہ ہے اس کا مربع خط $لا = \frac{1}{2} ا$ سے اس کے فاصلے کا ۲ ا گنا ہے، ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک نقطہ دائرہ ہے۔ اس کا مقام معلوم کرو، محور قائم ہیں۔

۳ — اس کی بالتفصیل تشریح کرو کہ "ایک منحنی کے مماس" سے کیا مراد ہے۔

۴ — دائرہ $لا^2 + ما^2 = و^2$ کے نقطہ ن پر کا مماس محاور لا اور ما سے بالترتیب م اور مَ پر ملتا ہے، ن ل اور ن لَ ان محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

ج ل × ج م = ا^{۲} اور ج لَ × ج مَ = ا^{۲} جہاں ج دائرہ کا مرکز ہے۔

۵۔ دوائر لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵ اور لا^{۲} + ما^{۲} − ۲۶ ما + ۲۵ = ۰ کے نقاط تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

۶۔ ف کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ خط مستقیم لا جم عہ + ما جب عہ = ف دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} − ۲ ا لا = ۰ کو مس کرے۔

۷۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = م لا دوائر

لا^{۲} + ما^{۲} − ۲ ا لا $\sqrt{۱ + م^{۲}}$ + ا^{۲} = ۰

اور لا^{۲} + ما^{۲} − ۲ ب ما $\sqrt{۱ + م^{۲}}$ + ب^{۲} م^{۲} = ۰

کو مس کرتا ہے۔

اس سے حاصل کرو کہ دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر ا = ± م ب

۸۔ ایک دائرہ کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں (اس نقطہ کو قطب مانکر) ان سے وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ اگر مرکز کا مقام نہ بدلے تو یہ طریق دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۹۔ اگر ایک خط مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ج^{۲} کے دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۹ ج^{۲} پر ہو تو قطبی دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = $\frac{ج^{۲}}{۹}$ کا مماس ہے۔

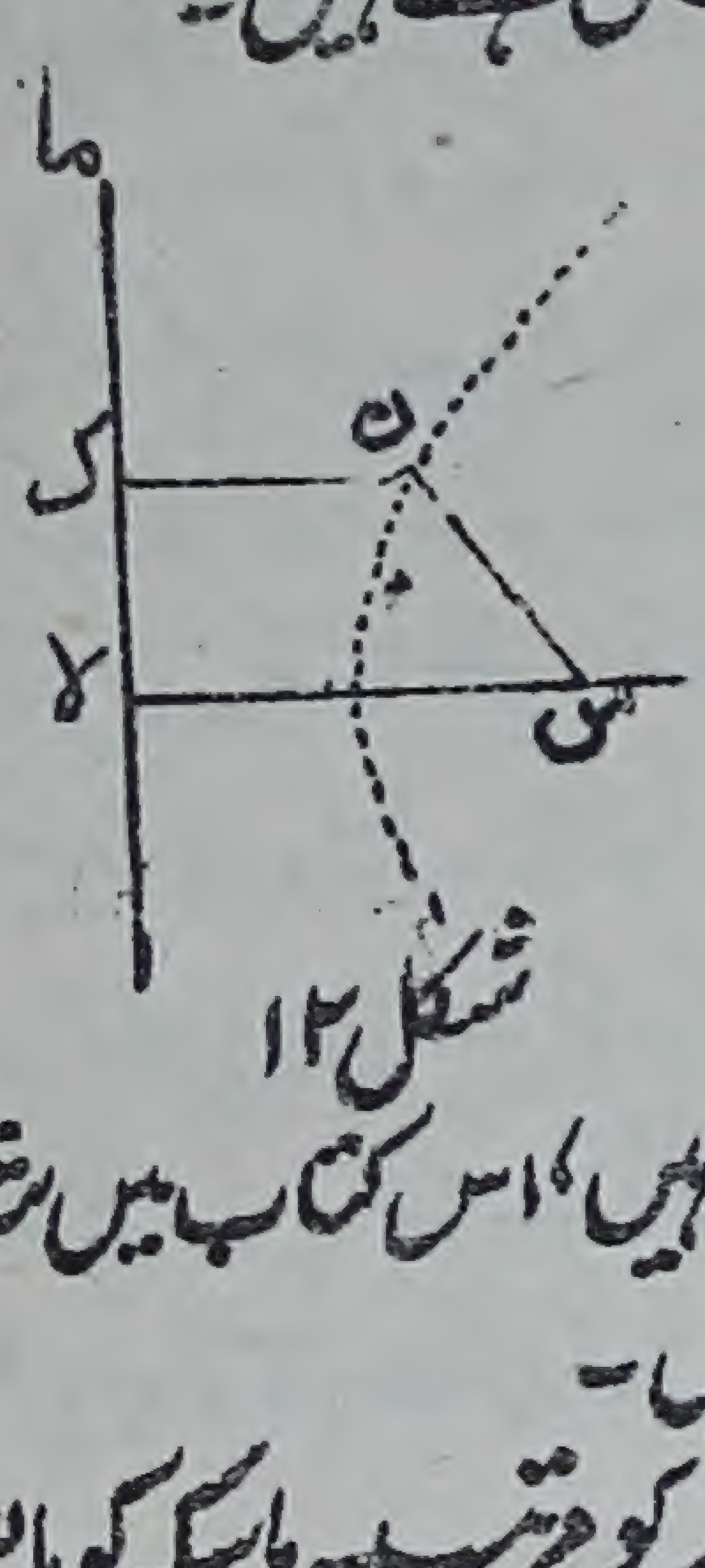
۱۰۔ نقطہ و میں سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا گیا ہے اور یہ ایک ثابت خط مستقیم سے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ سطح و ن × و ق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

باب سوم

قطع مکافی

۳۸ ـ مکافی تعریفات جب ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اثنائے حرکت میں اس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم سے ہمیشہ مساوی رہتے ہیں تو اس کے طریق کو **قطع مکافی** یا اختصاراً مکافی کہتے ہیں۔

نوٹ ۱ ـ اوپر کی تعریف میں "فاصلہ" سے مراد چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے ثابت خط مستقیم کی صورت میں یہ اُس عمود کے طول سے تعبیر ہوگا جو متحرک نقطہ کے کسی مقام سے ثابت خط مستقیم پر کھینچا جائے۔



شکل ۱۲

نوٹ ۲ ـ نقطہ کی حرکت ہمیشہ اُس سطح مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں نقطہ اور خط واقع ہیں، اس کتاب میں شروع سے آخر تک تمام نقطے، خط، اور منحنی ایک ہی سطح میں واقع ہیں۔

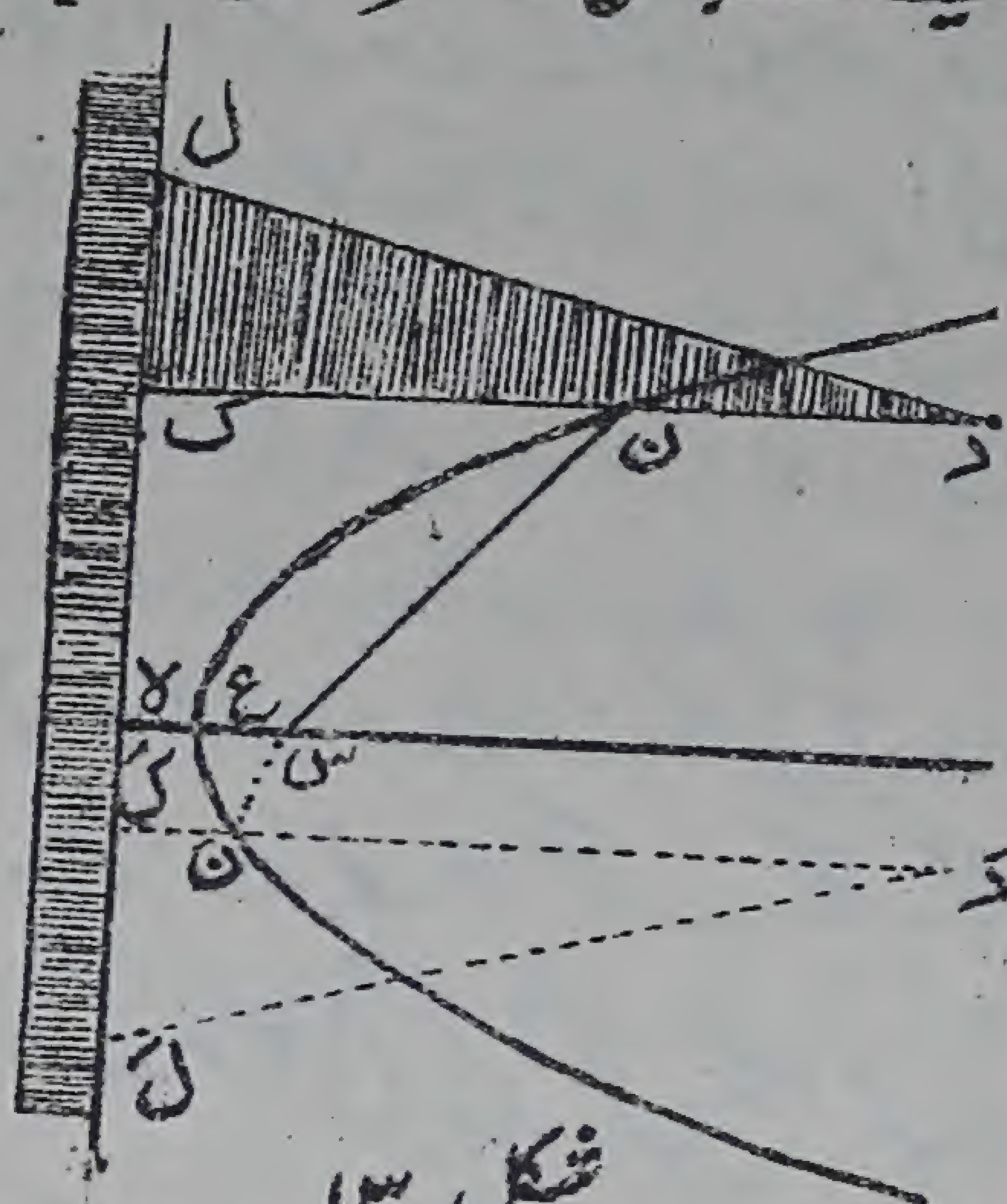
ثابت نقطہ کو **ماسکہ** کہتے ہیں اور ثابت خط مستقیم کو **مرتب**۔ ماسکہ کو بالعموم حرف **س** سے تعبیر کرتے ہیں اور س سے مرتب پر جو عمود نکالا جائے اس کے پایہ کو **لا** کہتے ہیں۔

مثلاً اگر منحنی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ن سے مرتب پر عمود ن ک نکالا جائے

تو س ن = ن ک

۳۹ — مکافی کی آلی ترسیم

اوپر کی تعریف سے مکافی کھینچنے کی ایک آسان ترکیب حاصل ہوتی ہے۔ ایک چپٹی پٹری لو اور اس کا ایک سرا مرتب لاک پر ٹھیک منطبق کرو، اس پیمانہ کے ساتھ ایک مثلثی گنیا ک د ل اس طرح لگادو کہ اس کا ایک کنارہ ک د منحنی کے محور کے متوازی ہو، طول د ک کے مساوی ایک تاگا لو جس کا ایک سرا د پر اور دوسرا س پر باندھو۔ اب اگر ایک پنسل سے تاگے کو د ک پر بخوبی تنے رکھیں (دیکھو شکل ۱۳) تو مثلثی گنیے کو ثابت سیدھے پیمانہ پر حرکت دینے سے پنسل کا سرا مکافی کے کچھ حصہ کو مرتسم کرے گا۔



شکل ۱۳

کیونکہ س ن + ن د = رسی کا طول

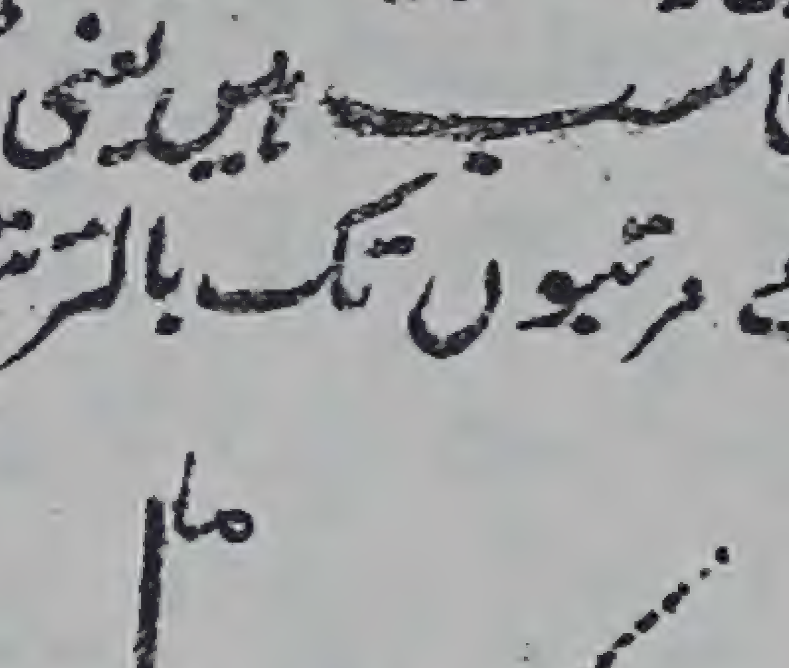
= ک د = ک ن + ن د

∴ س ن = ن ک

منحنی کا نچلا حصہ مثلثی گنیے وغیرہ کو اُس مقام پر رکھنے سے حاصل ہوسکتا ہے جہاں نقطوں سے نشان دیا گیا ہے۔

نتیجہ صریح۔ سب مکافی شکل میں ایک جیسے لیکن ناپ میں مختلف ہوتے ہیں۔

تعریف اور بناوٹ سے ظاہر ہے کہ کوئی دو مکافی شکل میں ایک جیسے ہیں اور ان کے متناظر خطوط ان کے س لا، فاصلوں کے متناسب ہیں یعنی اُن فاصلوں کے متناسب ہیں جو ماسکوں سے اُن کے مرتبوں تک بالترتیب کھینچے جائیں۔



شکل ۱۴

۴۰ — مکافی کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ س ثابت نقطہ ہے اور لاگ ثابت خط مستقیم ہے اور س سے لاگ پر عمود س لا کھینچا گیا ہے۔ لا کو مبداء، لا س کو محور لا اور لاگ کو

محور ما مانو اور فرض کرو کہ س لا کا طول ۲ ا ہے، اگر منحنی پر کوئی نقطہ ن (لا ، ما) ہو تو چونکہ س ن = ن ک

اس لئے س ن^{۲} = ن ک^{۲} یعنی (لا - ۲ ا)^{۲} + ما^{۲} = لا^{۲}

تحویل کے بعد ما^{۲} = ۴ ا (لا - ا)

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۴۱ - مساوات مکافی کی تحویل شکل ما^{۲} = ۴ ا لا میں۔

اگر ہم نیا مبدأ نقطہ ع (ا ، ۰) یعنی س لا کے نقطہ وسطی پر لیں اور نئے محور اصلی محوروں کے متوازی ہوں تو نئی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں پرانی مساوات میں لا کی بجائے لا + ا اور ما کی بجائے ما لکھنا چاہئے ۔ (دیکھو حصۂ اول دفعہ ۳۱) اس طرح مساوات ہو جائے گی

ما^{۲} = ۴ ا (لا + ا - ا) = ۴ ا لا

یا ما^{۲} = ۴ ا لا .... (۱)

ما^{۲} = ۴ ا لا مساوات مکافی کی سادہ سے سادہ شکل ہے اور ضرور یاد رکھنی چاہئے، نئے محور جو منتخب کئے گئے ہیں انہیں اصلی محور کہتے ہیں۔

۴۲ - مکافی کی شکل کا اس کی مساوات سے حاصل کرنا۔

ع کو مبدأ مانو (شکل ۱۵)، اب س ع = ع لا = ا

اور مکافی کی مساوات ہے ما^{۲} = ۴ ا لا

یعنی ما = ± ۲ $\sqrt{\text{ا لا}}$

پس لا کی ہر ایک مثبت قیمت کے لئے ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، نیز اگر ا کو مثبت قرار دیا جائے تو لا کے منفی ہونیکی صورت میں ا لا منفی ہوگا اور اس لئے ما غیر حقیقی ہوگا۔

اس سے ہم نتائج ذیل اخذ کرتے ہیں

(۱) منحنی بالتمام محور ما کے دائیں جانب واقع ہے۔

(۲) ع ما کے متوازی کوئی خط منحنی سے ایسے دو نقاط پر ملتا ہے جو خط ع لا سے

متساوی الفصل ہوتے ہیں۔

(۳) نتیجہ ۲ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ خط ع ما یا لا = ۰ نقطہ ع پر منحنی کا مماس ہے کیونکہ اس سے ما کی دو مساوی قیمتیں (یعنی صفر) ملتی ہیں۔

(۴) لا کے لاانتہا بڑھنے سے ما بھی لاانتہا بڑھتا ہے۔

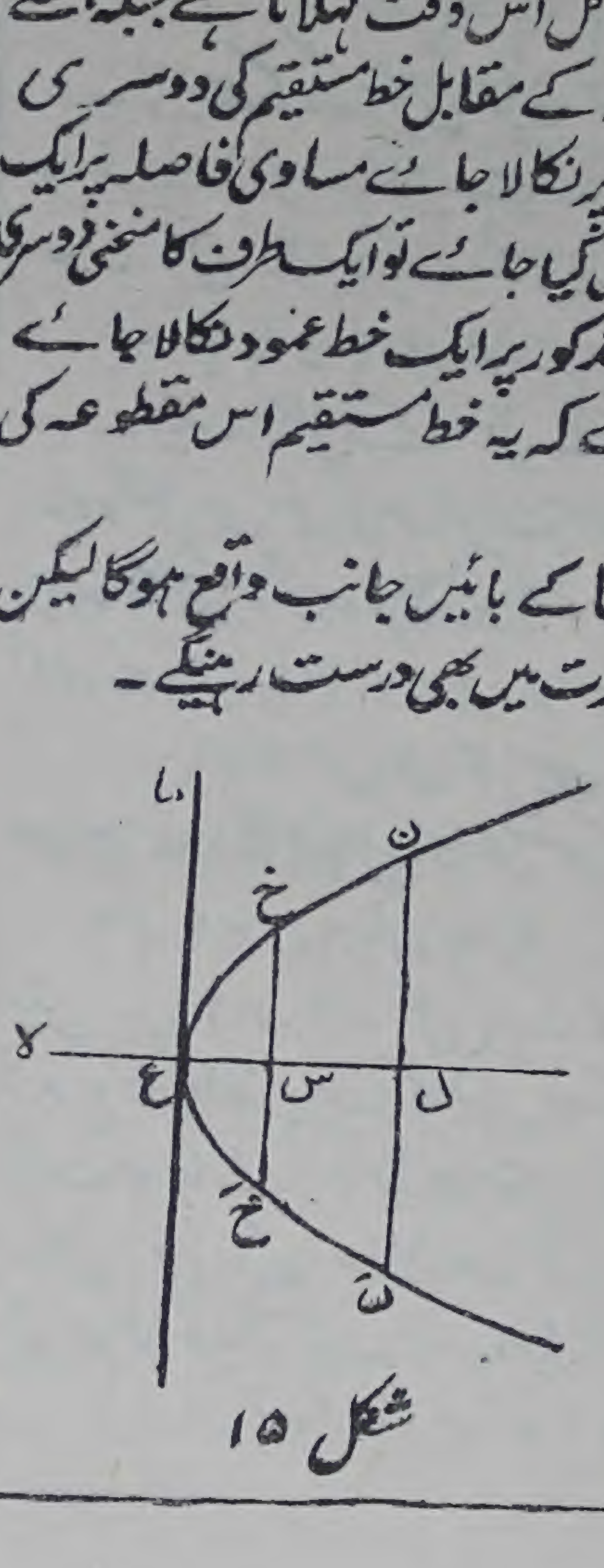
امور بالا سے ہم منحنی کی شکل کا کچھ اندازہ کر سکتے ہیں، یہ ع ما سے ع پر مس کرتا ہے اور بلحاظ لا ع کے متشاکل ہے، نیز محور لا کے دونوں جانب باہر کی طرف لاانتہا فاصلے تک پھیلتا ہے۔

نوٹ۔ ایک منحنی بلحاظ ایک خط مستقیم کے متشاکل اُس وقت کہلاتا ہے جبکہ اسکے ایک جانب منحنی کا جو حصہ ہو اسکے ہر ایک نقطہ کے مقابل خط مستقیم کی دوسری طرف اُس عمود پر جو نقطہ مذکورہ سے خط مستقیم پر نکالا جائے مساوی فاصلہ پر ایک اور نقطہ ہو، اگر خط مستقیم کو ایک مستوی آیئنہ خیال کیا جائے تو ایک طرف کا منحنی دوسری طرف کے منحنی کی تصویر ہو، اس لئے اگر خط مذکور پر ایک خط عمود نکالا جائے اور یہ دونوں جانب منحنی پر آ کر ختم ہو تو ظاہر ہے کہ یہ خط مستقیم اس مقطوعہ کی تنصیف کرے گا۔

انتباہ۔ اگر ا منفی ہو تو منحنی بالتمام محور ما کے بائیں جانب واقع ہوگا لیکن اوپر کے نتائج (۲)، (۳)، (۴) اس صورت میں بھی درست رہینگے۔

محور، راس کی تعریفیں۔ خط مستقیم لا ع س بلحاظ جس کے منحنی متشاکل ہے مکافی کا محور کہلاتا ہے اور نقطہ ع کو جہاں محور منحنی سے ملتا ہے، منحنی کا راس کہتے ہیں۔

اگر کوئی نقطہ ن منحنی پر واقع ہو اور ن سے محور پر عمود ن ل نکالا جائے تو ن ل کو ن کا معین کہتے ہیں اور اگر یہ منحنی سے



شکل ۱۵

دوبارہ نَ پر ملے تو ن نَ دوہرا معین کہلاتا ہے، ماسکہ میں سے جو دوہرا معین خ س خَ گذرتا ہے اُسے وتر خاص کہتے ہیں، اس کا طول ۴ ا ہے کیونکہ مساوات

ما^2 = ۴ ا لا سے خ س^2 = ۴ ا × ع س = ۴ ا^2

∴ خ س = ۲ ا اس لئے خ س خَ = ۴ ا

مشقیں

۱- ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا پر کے نقطہ ن (لاَ، ماَ) کا فاصلہ ماسکہ سے ا + لاَ ہے۔

۲- ذیل کے ہر ایک مکافی کے وتر خاص کا طول معلوم کرو

(۱) ما^2 = ۲ ا لا (۲) ما^2 = ۷ لا (۳) ۷ ما^2 - لا = ۰۔

۳- ایک مکافی کے رأس سے اس کے ماسکہ کا فاصلہ ۳ ہے، سادہ سے سادہ شکل میں اس کی مساوات معلوم کرو۔

۴- مکافی ما^2 = ۱۰ لا پر ایک نقطہ ن ایسا ہے کہ ان محور لا سے بالترتیب زاویے (۱) ۴۵° (۲) ۳۰° بناتا ہے، ن کے محدد معلوم کرو۔

[(۱) میں ن کا معین اس کے فصلہ کے مساوی ہے]۔

۳۴- مکافیوں کا مرتسم کرنا

دفعہ ۳۹ میں بیان ہو چکا ہے کہ سب مکافی ایک ہی شکل کے ہوتے ہیں لیکن ناپ (اور البتہ محل) کے لحاظ سے مختلف ہوتے ہیں، طالب علم کو چاہئیے کہ مربع دار کاغذ پر چند مکافیوں کو نقطہ بنقطہ مرتسم کرنے سے انکی شکل سے بخوبی واقف ہو جائے، ملاحظہ ہو مثال ذیل۔

مثال منحنی ما^2 = ۳ لا کو مرتسم کرو

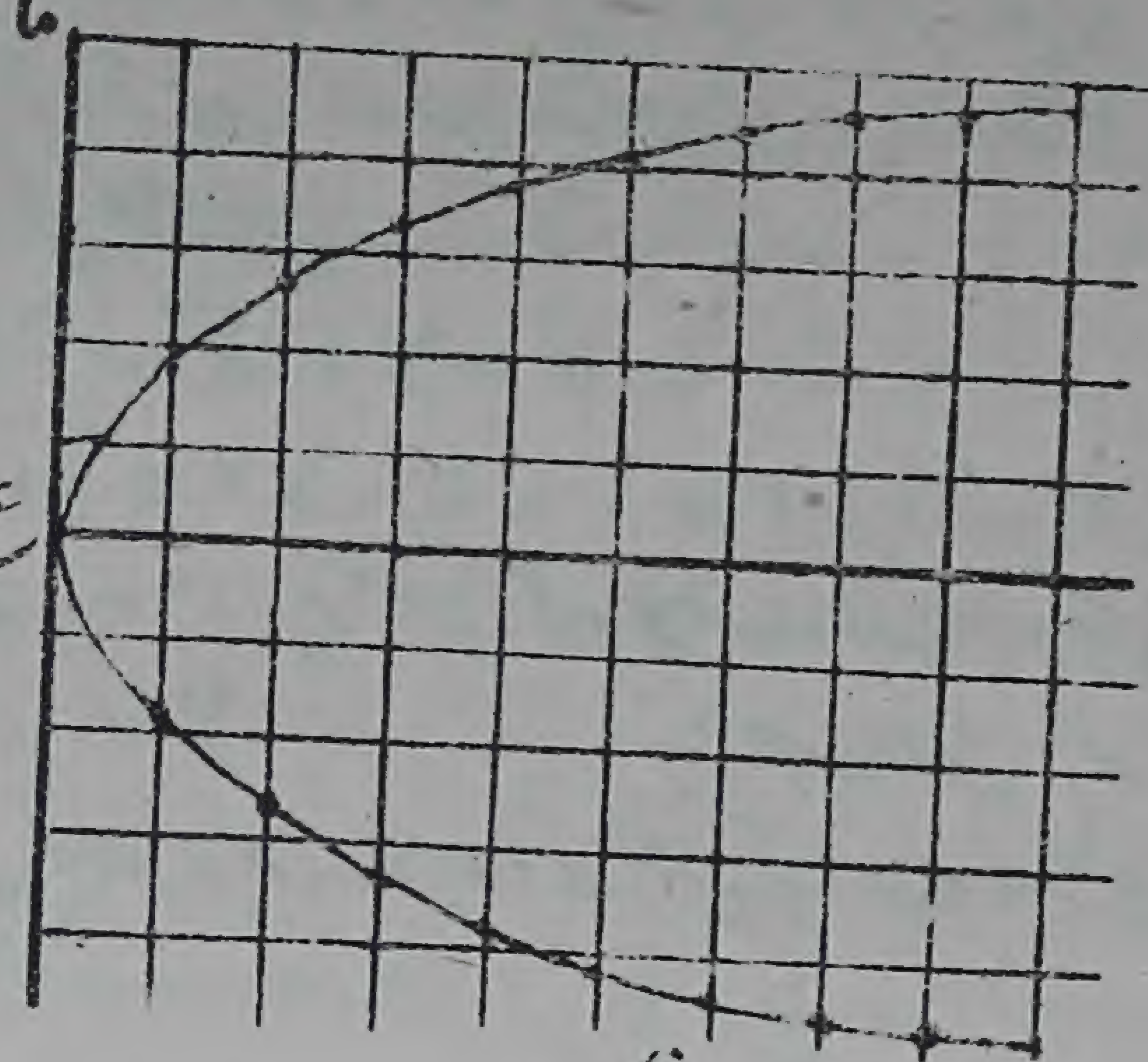
اگر ہم لا کو بالترتیب حسب ذیل قیمتیں دیں

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸

تو ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہونگی

$۰، \pm\sqrt{۳}، \pm\sqrt{۶}، \pm\sqrt{۹}، \pm\sqrt{۱۲}، \pm\sqrt{۱۵}، \pm\sqrt{۱۸}، \pm\sqrt{۲۱}، \pm\sqrt{۲۴}$

یا ۰، ±۱٫۷، ±۲٫۵، ±۳، ±۳٫۵، ±۳٫۹، ±۴٫۲، ±۴٫۶، ±۴٫۹



شکل ۱۶

ان نقاط کی شکل میں نشان دہی کرنے اور ان میں سے ایک منحنی کھینچنے سے ہمیں مکافی کی شکل کا کچھ اندازہ ہوتا ہے۔

نوٹ حسابات میں آسانی ہوگی اگر ما کو قیمتیں ۰، ±۱، ±۲، ... دیکر لا کی متناظر قیمتیں ۰، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۴}{۳}$، ۳، ... معلوم کی جائیں۔

مشقیں

اسی طرح ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو۔

۵۔ (۱) $ما^{۲} = ۲لا$ (۲) $ما^{۲} = ۹لا$

۶۔ (۱) $ما^{۲} = -لا$ (۲) $ما^{۲} = -۷لا$

۴۴۔ مکافی کی مساوات بلحاظ ایسے محوروں کے جو اس کے اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طالب علم منحنی کی عام شکل سے واقف ہے، اب ہم مکافی کو مرتسم کرنے کی کوشش کرتے ہیں جبکہ اس کی مساوات ایسے محوروں کے لحاظ سے دی گئی ہو جن میں سے ایک، مکافی کے محور اور دوسرا راس پر کے مماس کے متوازی ہو۔

مثال (۱) منحنی $\text{ما}^{2} - 2\,\text{لا} - 2\,\text{ما} + 5 = 0$ کو مرتسم کرو۔

مساوات کو اس طرح ترتیب دو کہ وہ رقمیں جن میں ما شامل ہوتا ہے مربع کامل کی صورت میں رکھی جا سکیں

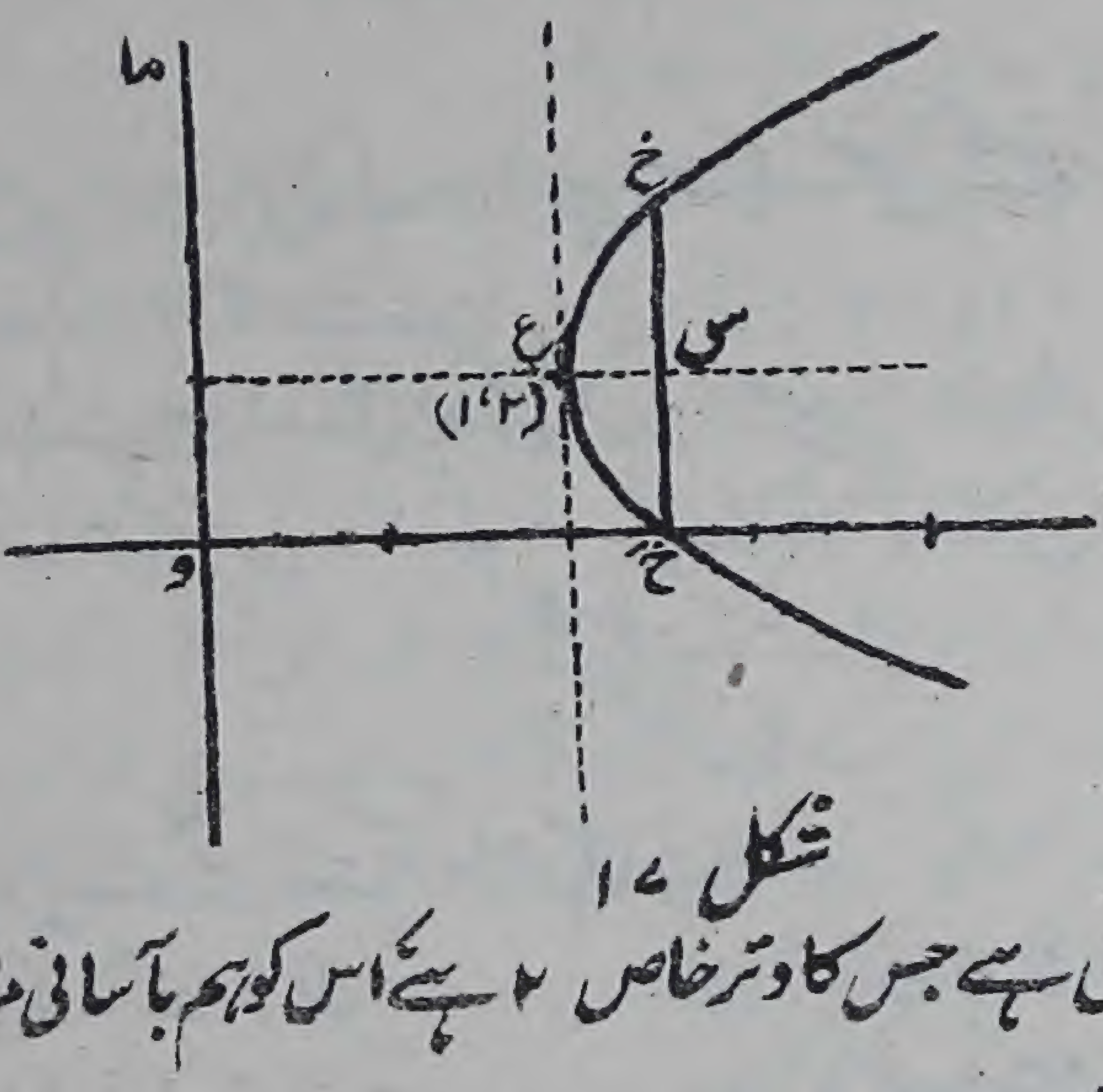
پس $\text{ما}^{2} - 2\,\text{ما} = 2\,\text{لا} - 5$

$\therefore (\text{ما} - 1)^{2} = 2\,\text{لا} - 5 + 1 = 2\,(\text{لا} - 2)$

اب مبدأ کو نقطہ (۲، ۱) پر منتقل کرو تو مساوات ہو جاتی ہے

$\text{ما}^{2} = 2\,\text{لا}$ [حصہ اول دفعہ ۳۱]

[ظاہر ہے کہ جس نقطہ پر ہم نے مبدأ کو منتقل کیا ہے وہ منحنی کا راس ہے]



شکل ۱۷

منحنی مذکور ایک مکافی ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے، اس کو ہم بآسانی مرتسم کر سکتے ہیں، دیکھو شکل ۱۷۔

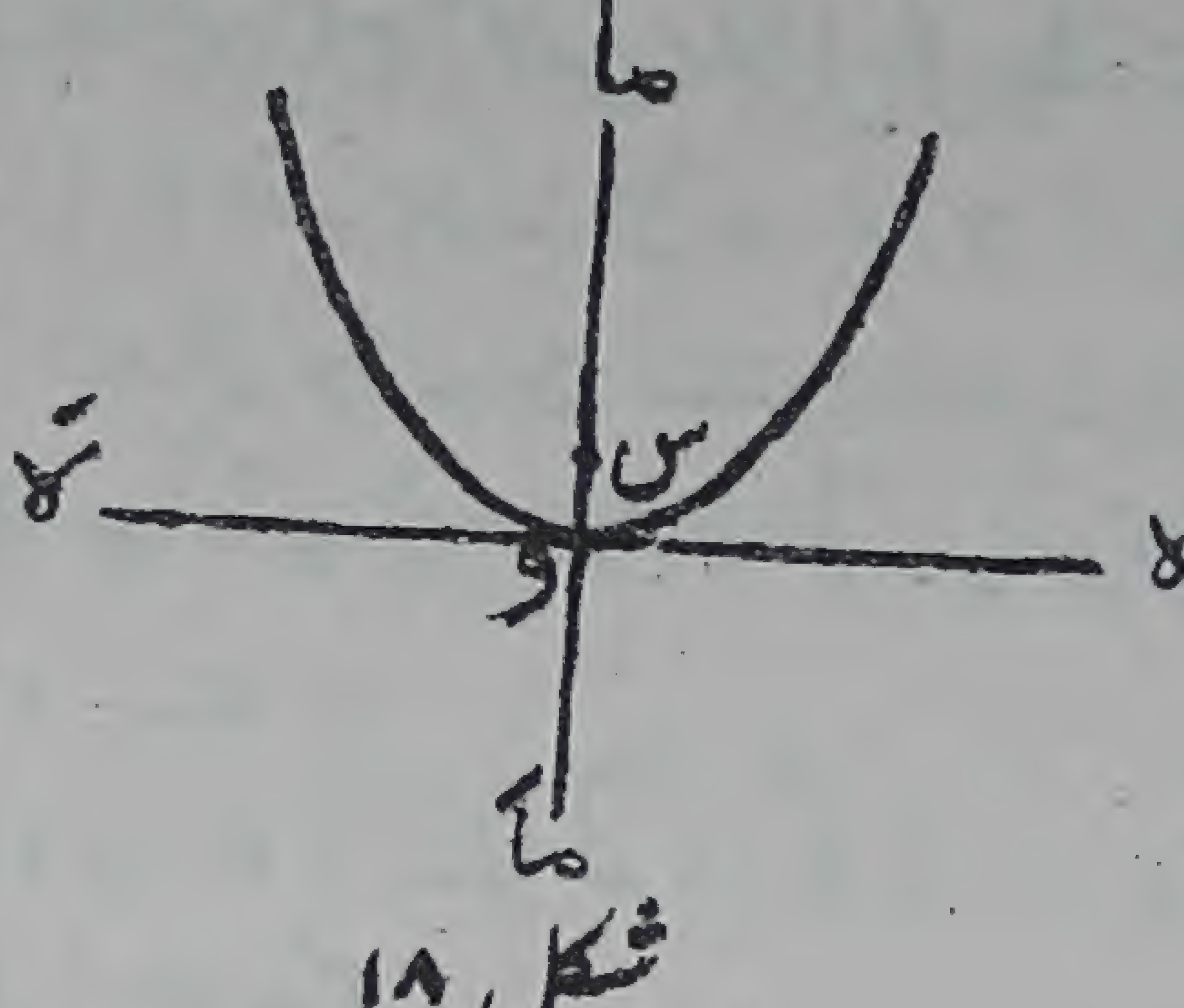
طالب علم کو یہ دیکھنے سے اپنے عمل کی تصدیق کرنی چاہیئے کہ منحنی ابتدائی محوروں سے کہاں ملتا ہے۔ مثلاً جب $\text{ما} = 0$ تو $\text{لا} = \frac{5}{2}$ اور جب $\text{لا} = 0$ تو

ما^{2} - ۲ ما + ۵ = ۰ جس سے ما کی خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں -

انتباہ - یاد رہے کہ مبدأ کو منتقل کرنے سے منحنی کی شکل اور ناپ میں فرق نہیں آتا، صرف اس کا مقام بلحاظ محوروں کے بدلتا ہے، ظاہر ہے کہ منحنی کا مقام بلحاظ نئے محوروں کے وہی نہیں ہے جو اس کا مقام بلحاظ پرانے محوروں کے ہے -

مثال ۲ - منحنی لا^{2} = ۴ ا ما کو مرتسم کرو -

مساوات ما^{2} = ۴ ا لا کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات لا^{2} = ۴ ا ما وہی ہے جو مساوات ما^{2} = ۴ ا لا اگر ہم محاور لا اور ما کا باہم تبادلہ کر دیں، یعنی یہ ایک ایسا مکافی ہے جس میں محور لا راس پر کا مماس ہے (اور منحنی کا محور نہیں ہے) اور محور ما منحنی کا محور ہے (اور راس پر کا مماس نہیں ہے) اس لئے اسکی شکل منحنی شکل ۱۸ کی طرح ہوگی -



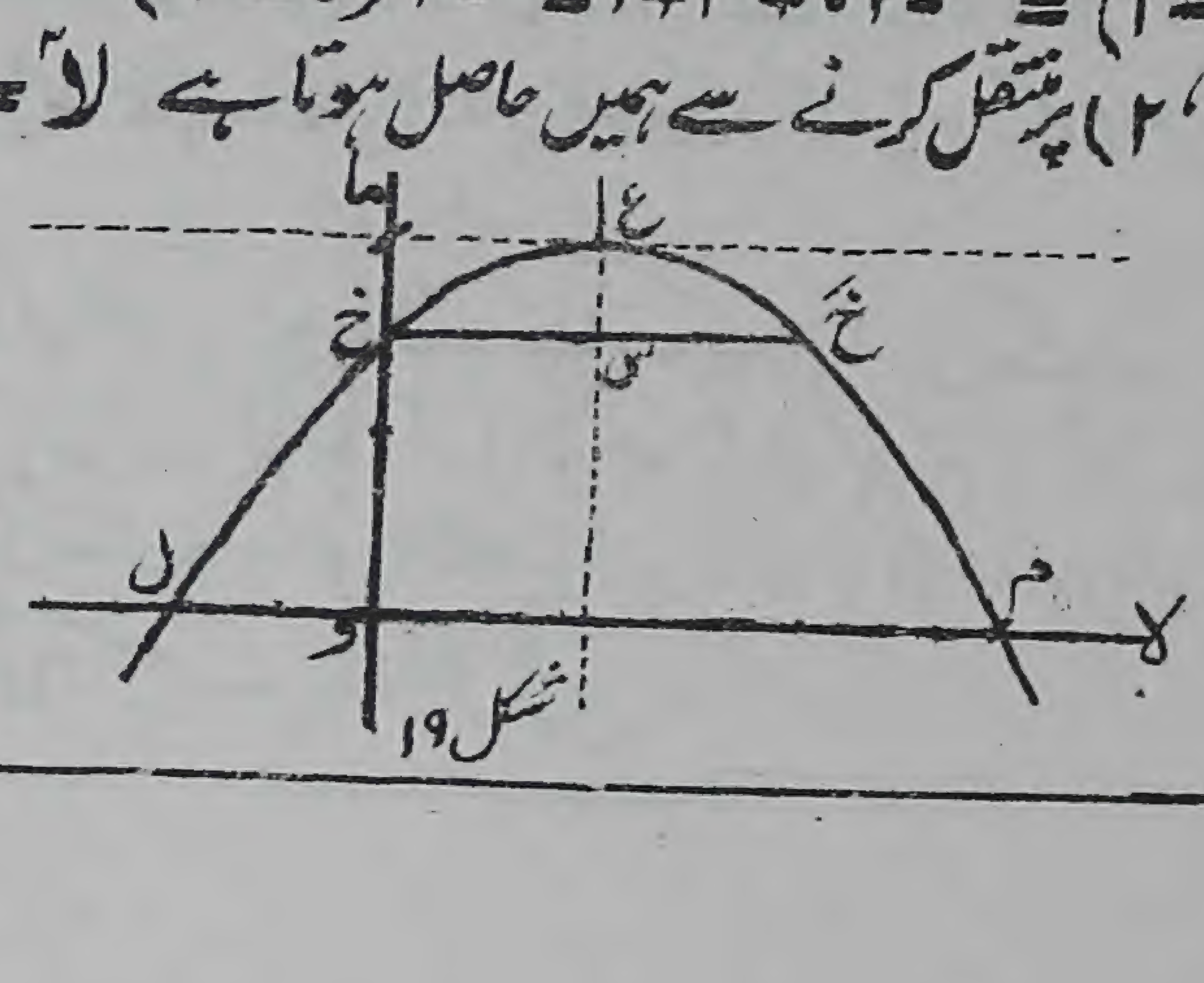
شکل ۱۸

مثال ۳ - منحنی لا^{2} - ۲ لا + ۲ ما - ۳ = ۰ کو مرتسم کرو -

چونکہ مساوات میں لا^{2} واقع ہوتا ہے اور ما^{2} شامل نہیں ہوتا اس لئے ہمیں اُن رقموں کو جن میں لا شریک ہوتا ہے مربع کامل بنانا چاہئے

پس (لا - ۱)^{2} = -۲ ما + ۳ + ۱ = -۲ (ما - ۲)

مبدأ کو نقطہ (۱، ۲) پر منتقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا^{2} = -۲ ما



شکل ۱۹

اس لئے یہ ایک مکافی ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے۔
نیا محور لا راس پر کا مماس ہے اور نئے محور ما کا منفی حصہ منحنی کا محور ہے۔
مکافی ابتدائی محور لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں ما = ۰ اور لا^{۲} - ۲ لا - ۳ = ۰
یا لا = ۳ یا -۱ (م، ل) اور ابتدائی محور ما کو جہاں لا = ۰
اور ما = $\frac{۳}{۲}$ (خ)۔ اس لئے منحنی کی شکل حسب بالا ہے دیکھو شکل ۱۹۔

مشقیں

۷- منحنی ما^{۲} = ۲ لا - ۴ کو مرتسم کرو۔

۸- ثابت کرو کہ مکافی ما^{۲} = - ۴ ا لا منحنی ما^{۲} = ۴ ا لا کے بالکل مساوی ہے لیکن اس کا رخ مقابل کی جانب میں ہے۔
[ملاحظہ ہو کہ لا = - د سے ایک مکافی میں وہی معین حاصل ہوتا ہے جو لا = + د سے دوسرے میں]

۹- ما^{۲} = - ۳ لا + ۴ کو مرتسم کرو، ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا طول ۳ ہے۔

۱۰- ۳ ما^{۲} - لا - ۱۸ ما + ۲۷ = ۰ کو شکل میں کھینچو اور اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۱۱- مکافی لا^{۲} - ۴ لا - ۸ ما - ۱۲ = ۰ کو مرتسم کرو اور اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۱۲- منحنی ما^{۲} = ۲ لا + ۳ کا راس کہاں ہے، اس کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۱۳- منحنی (ما + ۲)^{۲} = لا کا راس معلوم کرو، راس پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۱۴- ثابت کرو کہ نقطہ (لاَ، ماَ) مکافی ما^{۲} = ۴ ا لا کے اندر یا اوپر یا باہر واقع ہوگا اگر ماَ^{۲} بالترتیب کم ہو، مساوی ہو یا بڑا ہو ۴ ا لاَ سے۔

۱۵- معلوم کرو کہ نقطہ (۱، ۲) مکافیوں ما^{۲} = ۲ لا اور لا^{۲} = ۲ ما کے اندر ہے یا باہر، اس کی توضیح کے لئے شکل کھینچو۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ منحنی (ما ۔ ف)^2 = ق (لا ۔ ل) کا راس (ل، ف) ہے اور وتر خاص ق ہے۔

۱۷۔ ذیل کے منحنیات کے راس، ماسکے اور مرتب معلوم کرو۔

(۱) (ما ۔ ۴)^2 = ۲ (لا ۔ ۱) (۲) (ما + ۳)^2 = ۲ (لا + ۲)

۴۵ ۔ حوالہ کے محور خواہ کوئی ہوں مکافی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوگی اور لا، ما میں جو درجہ دوم کی رقمیں ہیں وہ ایک مربع کامل بنائیں گی۔

سادہ سے سادہ صورت میں مکافی کی مساوات ہے

ما^2 = ۴ ا لا

اب اگر کسی نئے محوروں کے لحاظ سے ہم اس مساوات کو بدلنا چاہیں خواہ یہ محور قائم ہوں یا مائل ہمیں لا، ما کی بجائے نئے محددوں کے خطی (درجہ اول کے) جملے لکھنے ہوں گے (حصہ اول، دفعہ ۳۵)

فرض کرو کہ لا کی بجائے ہم ل$_1$ لا + م$_1$ ما + ن$_1$ اور ما کی بجائے ل$_2$ لا + م$_2$ ما + ن$_2$ لکھتے ہیں، اس طرح اوپر کی مساوات ہو جائے گی

(ل$_2$ لا + م$_2$ ما + ن$_2$)^2 = ۴ ا (ل$_1$ لا + م$_1$ ما + ن$_1$)

جو درجہ دوم کی مساوات ہے۔

اس میں درجہ دوم کی رقمیں (ل$_2$ لا + م$_2$ ما + ن$_2$)^2 ہیں اور یہ مربع کامل بناتی ہیں۔

۴۶ ۔ اگر نئے محور قائم ہوں تو اس مسئلہ کو ہم ایک اور طرح ثابت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ (لاَ، ماَ) ماسکہ س کے محدد ہیں اور ل$_1$ لا + م$_1$ ما + ن$_1$ = ۰ مرتب کی مساوات ہے

تب س ن^2 = (لا ۔ لاَ)^2 + (ما ۔ ماَ)^2

اور ن ک^2 = (ل$_1$ لا + م$_1$ ما + ن$_1$)^2 ÷ (ل$_1^2$ + م$_1^2$) (حصہ اول دفعہ ۱۷)

$$\therefore (\text{لا} - \text{لاَ})^2 + (\text{ما} - \text{ماَ})^2 = \frac{(\text{ل}_1 \text{لا} + \text{م}_1 \text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{ل}_1^2 + \text{م}_1^2}$$

جو لا، ما میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔
کسروں کو خارج کرنے سے یہ ہو جاتی ہے

$$(\text{ل}_1^2 + \text{م}_1^2)\left\{(\text{لا} - \text{لاَ})^2 + (\text{ما} - \text{ماَ})^2\right\} - (\text{ل}_1 \text{لا} + \text{م}_1 \text{ما} + \text{ن}_1)^2 = 0$$

اب لا، ما میں درجہ دوم کی رقمیں ہیں

$$(\text{ل}_1^2 + \text{م}_1^2)(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) - (\text{ل}_1 \text{لا} + \text{م}_1 \text{ما})^2 = (\text{ل}_1 \text{ما} - \text{م}_1 \text{لا})^2$$ اور

یہ مربع کامل ہے۔
پس اگر درجہ دوم کی مساوات

$$\text{ا} \text{لا}^2 + 2 \text{ھ} \text{لا} \text{ما} + \text{ب} \text{ما}^2 + 2 \text{گ} \text{لا} + 2 \text{ف} \text{ما} + \text{ج} = 0$$

ایک مکافی کو تعبیر کرے تو رقوم $\text{ا} \text{لا}^2 + 2 \text{ھ} \text{لا} \text{ما} + \text{ب} \text{ما}^2$ کو لا، ما میں مربع کامل ہونا چاہئے، اس کے لئے شرط یہ ہے کہ $\text{ا} \text{ب} = \text{ھ}^2$
ہم دفعہ ۵۲ میں دیکھینگے کہ اس کا عکس بھی درست ہے یعنی
اگر درجہ دوم کی رقمیں ایک مربع کامل بنائیں تو منحنی مکافی ہوگا۔

مثال ۔ ایک مکافی کا ماسکہ (۱، ۱) ہے اور اس کے مرتب کی مساوات $3 \text{لا} + 4 \text{ما} = 1$ ہے، اس کی مساوات اور اس کے وتر خاص کا طول دریافت کرو۔

اگر (لا، ما) کوئی نقطہ منحنی پر ہو تو اس کا فاصلہ نقطہ (۱، ۱) سے وہی ہوگا جو اس کا عمودی فاصلہ خط $3 \text{لا} + 4 \text{ما} = 1$ سے ہے۔

اس لئے $\sqrt{(\text{لا} - 1)^2 + (\text{ما} - 1)^2} = \frac{3 \text{لا} + 4 \text{ما} - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ جس سے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$25 \text{لا}^2 - 50 \text{لا} + 25 + 25 \text{ما}^2 - 50 \text{ما} + 25 = 9 \text{لا}^2 + 24 \text{لا} \text{ما} + 16 \text{ما}^2 - 6 \text{لا} - 8 \text{ما} + 1$$

∴ ۱۶ لا^{2} − ۲۴ لا ما + ۹ ما^{2} − ۴۴ لا − ۴۲ ما + ۹۴ = ۰

وترِ خاص اُس عمود کا دوچند ہے جو ماسکہ سے مرتب پر کھینچا جائے اس لئے

یہ ہے ۲ $\frac{۳ \times ۱ + ۴ \times ۱ - ۱}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۲}{۵}$

مشقیں

۱۸ - اُس مکافی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (ا، ۰) ہو اور مرتب لا + ا = ۰

۱۹ - اس مکافی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱، ۲) ہو اور مرتب لا + ما − ۲ = ۰

۲۰ - اوپر کی مشقوں ۱۸ اور ۱۹ میں جو مکافی ہیں اُن کے وترِ خاص معلوم کرو۔

۴۷ - خطِ مستقیم مکافی سے دو نقاط پر ملتا ہے -

فرض کرو کہ خط مستقیم ما = م لا + ج ہے اور مکافی کی مساوات ما^{2} = ۴ ا لا ہے، ان دونوں کے نقاطِ تقاطع معلوم کرنے کی غرض سے ہمیں ان دو مساواتوں کو ایک ساتھ لا، ما کے لئے حل کرنا چاہیے۔

ما کے لئے لا کی رقوم میں مندرج کرنے سے

(م لا + ج)^{2} = ۴ ا لا .... (ا)

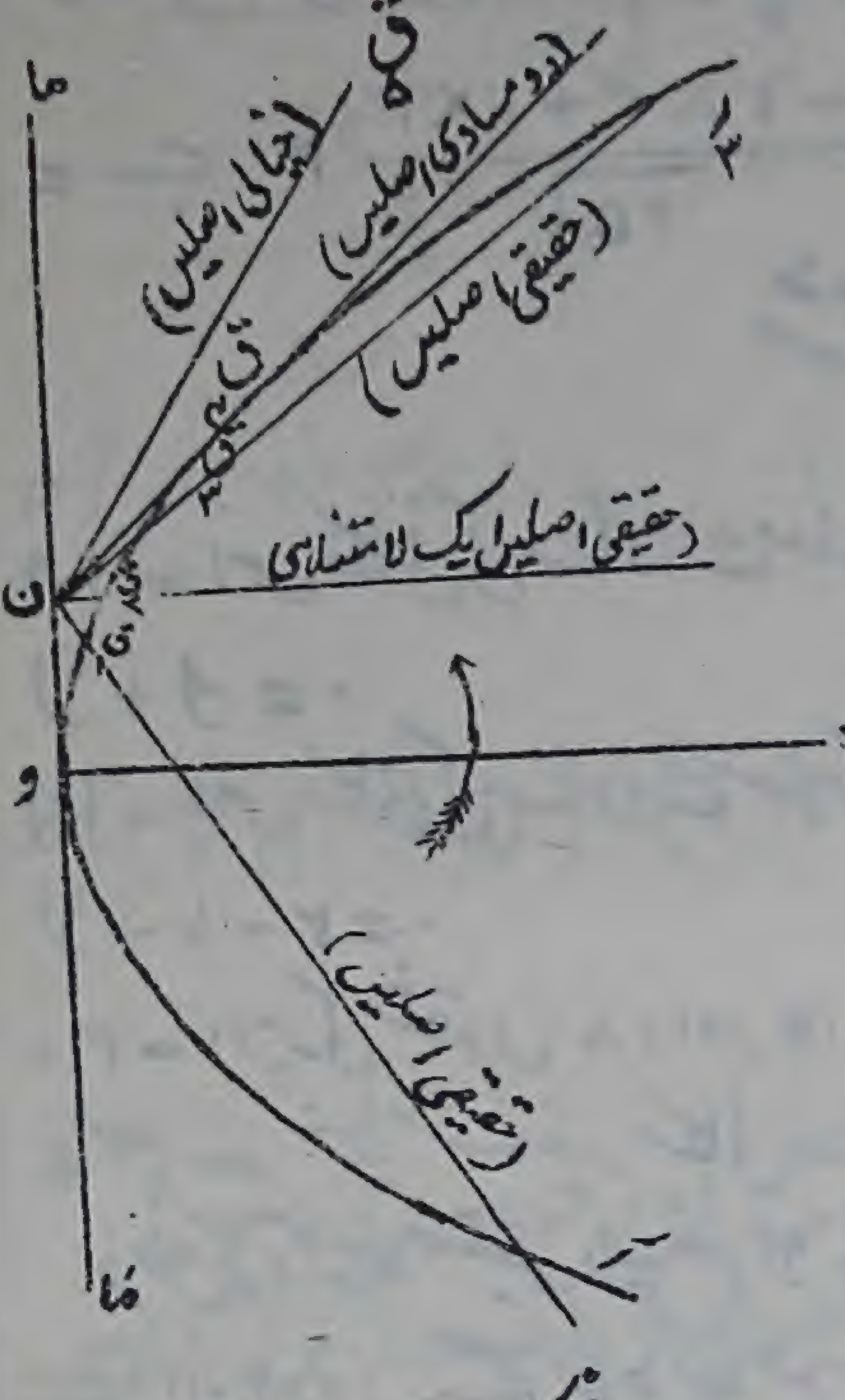
یعنی م^{2} لا^{2} + ۲ لا (م ج − ۲ ا) + ج^{2} = ۰

جو لا میں مساوات درجہ دوم ہے اس لئے اس کی دو اصلیں ہیں۔ اگر یہ اصلیں لا$_{1}$، لا$_{2}$ ہوں تو یہ نقاطِ تقاطع کے فصلے ہوں گے اور ان کے جواب میں معین ہوں گے ما$_{1}$ = م لا$_{1}$ + ج، ما$_{2}$ = م لا$_{2}$ + ج، اس طرح سے دو نقاطِ تقاطع (لا$_{1}$، ما$_{1}$) اور (لا$_{2}$، ما$_{2}$) حاصل ہوتے ہیں۔

اگر م = ۰ تو مساوات درجہ دوم کی ایک اصل لامتناہی ہوگی، اس صورت میں بھی

نقاط تقاطع دو ہیں مگر ایک لامتناہی فاصلہ پر ہے۔

نوٹ۔ جب (ا) کی اصلیں خیالی ہوں تو خط مستقیم منحنی سے دو خیالی نقطوں پر ملے گا۔



شکل ۳۰

اس مسئلہ کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے، فرض کرو کہ و ما پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن میں سے ایک خط ن ق ل کھینچا گیا ہے، نیز فرض کرو کہ یہ خط مقام ن ما سے مقابل سمت ساعت حرکت کر کے مقام ن ما پر پہنچتا ہے یعنی اس خط کا "م" ایسا کرنے میں -∞ سے (صفر میں سے گذر کر) +∞ تک بدلتا ہے، یہ خط ابتدا میں مکافی سے دو نقاط ق، ل پر ملے گا اور م کی اس قیمت کے لئے جو مقام ن ق ل کے جواب میں حاصل ہوتی ہے مساوات (ا) کی دونوں اصلیں حقیقی ہونگی۔ جب یہ خط مقام ن ق پر ہوگا یعنی و لا کے متوازی تو م = ۰ اور ایک اصل لامتناہی ہوگی۔ اس کے بعد دونوں اصلیں حقیقی اور محدود ہوں گی جیسے ن ق۲ ل۲ کی صورت میں اور یہ حقیقی اور محدود رہیں گی جب تک کہ خط منحنی کو مس نہیں کرے گا جیسے مقام ن ق۳ پر۔ اس کے بعد دونوں اصلیں خیالی ہو جائینگی اور خط منحنی سے حقیقی نقاط پر اس وقت تک نہیں ملے گا جبتک کہ یہ پھر مقام ن ما پر نہ آجائے۔

۴۸۔ اس کی شرط معلوم کرو کہ خط ما = م لا + ج مکافی ما^2 = ۴ ا لا کو مس کرے۔

اگر خط ما = م لا + ج منحنی کو مس کرے تو دونوں نقاط تقاطع ایک دوسرے

منطبق ہوں گے اور لا میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے اسکی اصلیں مساوی ہوں گی۔ مساوات مذکورہ یہ ہے

(م لا + ج)^{2} - ۴ ا لا = ۰

یا لا^{2} × م^{2} + ۲ لا (ج م - ۲ ا) + ج^{2} = ۰

اس لئے مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

(ج م - ۲ ا)^{2} = ج^{2} م^{2}

یا - ۴ ا ج م + ۴ ا^{2} = ۰

∴ ج م = ا یا ج = ا/م

اس لئے خط ما = م لا + ا/م ...... (۲)

م کی تمام قیمتوں کے لئے مکافی کو مس کرتا ہے۔

انتباہ۔ جب م = ∞ یعنی جب خط محور ما کے متوازی ہو تو ثبوت بالا ناکام رہتا ہے کیونکہ مساوات کی شکل اس صورت میں لا = ج ہو جاتی ہے اور اس کے ذریعہ ہم ما کو ساقط نہیں کر سکتے، اس صورت میں ہمیں لا کی ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں اور خط لا = ج منحنی کا مماس نہیں ہو سکتا جبتک کہ ج صفر کے مساوی نہ ہو۔

۴۹ ـ چونکہ مکافی بند منحنی نہیں ہے اس لئے بعض خط اس کو ایسے نقاط پر ملیں گے جو مبدأ سے لا انتہا فاصلے پر ہوں۔

اس صورت میں لا کے لئے جو مساوات درجہ دوم ہے اس کی اصلوں میں سے ایک یا دونوں غیر متناہی ہوں گی، یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

لا^{2} × م^{2} + ۲ لا (م ج - ۲ ا) + ج^{2} = ۰

اور اس مساوات کی ایک اصل لاتناہی ہوگی اگر

م^{2} = ۰ یعنی اگر م = ۰ [ٹیوٹوریل الجبرا حصۂ دوم دفعہ ۱۶۶]

پس ایک ایسا خط مستقیم جو مکافی کے محور کے متوازی ہو منحنی سے دو نقاط پر ملتا ہے جن میں سے ایک لاتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

اگر مساوات درجہ دوم کی دونوں اصلیں غیر متناہی ہوں

تو م^{2} = ۰ اور م ج − ۲ ا = ۰

جس سے یا ا = ۰ جو مفروضات کے خلاف ہے

یا ج = ∞ ، اگر یہ درست ہو تو خط لاتناہی پر ہوگا۔

اس لئے کوئی ایسا خط جو محدود فاصلے پر ہو منحنی سے ایسے دو نقاط پر نہیں ملتا جو غیر متناہی فاصلہ پر ہوں۔

۵۰ — اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ اس شکل ما^{2} = ا لا + ب ما کی مساوات ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

ما^{2} − ب ما = ا لا

یا بلحاظ ما کے مربع کامل بنانے سے

$$\left(\text{ما} - \frac{\text{ب}}{۲}\right)^{2} = \text{ا لا} + \frac{\text{ب}^{2}}{۴} = \text{ا}\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}^{2}}{۴\,\text{ا}}\right)$$

اور $\left(-\frac{\text{ب}^{2}}{۴\,\text{ا}} ، \frac{\text{ب}}{۲}\right)$ کو نیا مبدأ مقرر کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

ما^{2} = ا لا [حصہ اول دفعہ ۳۱]

جو اسی قسم کی مساوات ہے جو دفعہ ۴۱ میں حاصل کی گئی، اس لئے یہ مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔

۵۱ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک خط مستقیم پر اس کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے اس کا عمود ایک اور خط پر، ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق مکافی ہے۔

خطوط کے نقطۂ تقاطع کو مبدأ اور پہلے خط کو محور لا مانو، تو دوسرے خط کی مساوات
اس شکل کی ہوگی ما ـ م لا = ۰

اس لئے مساوات ہے ما² = ک (ما ـ م لا) / √(۱ + م²) [حصہ اول، دفعہ ۷۱]

جہاں ک مستقل ہے، لیکن یہ مساوات صریحاً ما² = ن لا + ق ما کی
شکل کی ہے، اس لئے یہ ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔

۵۳ ـ اگر مساوات ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ میں درجۂ دوم کی حدیں (یعنی ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما²) مربع کامل بنائیں تو مساوات ایک مکافی کو تعبیر کرے گی۔

فرض کرو کہ ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = (عہ لا + بہ ما)²

تب (عہ لا + بہ ما)² = − (۲ گ لا + ۲ ف ما + ج)

اب نقطہ (لا، ما) سے خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر جو عمود کھینچ سکتا ہے

اس کا مربع = (عہ لا + بہ ما)² / (عہ² + بہ²)

اور خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کا عمود اسی نقطہ سے

= (۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) / ۲ √(گ² + ف²)

اس لئے منحنی کے نقاط کے لئے پہلے عمود کے مربع کی نسبت دوسرے عمود کے ساتھ

= [(عہ لا + بہ ما)² / (عہ² + بہ²)] / [(۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) / ۲ √(گ² + ف²)]

= ۲ √(گ² + ف²) / (عہ² + بہ²) جو مستقل ہے۔

اس لئے دفعہ ۱۵ کی رو سے مساوات سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے وہ مکافی ہے۔

مشقیں

۲۱- ثابت کرو کہ مساوات ما^2 = لا + ما ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے، اس کے راٗس کے محدد معلوم کرو۔

۲۲- ثابت کرو کہ مساوات ما^2 = ۲ لا + ۴ ما + ۱ ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے، اس کے راٗس کے محدد معلوم کرو، نیز اس کے محور اور راٗس پر کے مماس کی مساواتیں معلوم کرو۔

[مبدا کو بدلنے سے ہم مساوات کو شکل ما^2 = ۲ لا میں لا سکتے ہیں، اب لا = ۰ اور ما = ۰ بالترتیب راٗس پر کے مماس اور محور کی مساواتیں ہیں، پس مساوات کو پرانے مبدأ کے لحاظ سے بدلو]

۲۳- ثابت کرو کہ لا^2 = ا لا + ب ما کی شکل کی مساوات ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور و ما کے متوازی ہے۔

۲۴- ثابت کرو کہ مثال ۲۳ میں مکافی کا راٗس نقطہ $\left(\frac{ا}{۲}\ ,\ -\frac{ا^2}{۴ب}\right)$ پر ہے۔

۲۵- مکافی لا^2 = ۲ لا + ما کا راٗس، ماسکہ، مرتب معلوم کرو۔

[سب سے پہلے راٗس اور وتر خاص کا طول معلوم کرو، پھر شکل کو استعمال کرو]

۲۶- ثابت کرو کہ مکافی (عہ لا + بہ ما)^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ۱ = ۰ کا محور خط مستقیم عہ لا + بہ ما = ۰ کے متوازی ہے۔

باب سوم پر متفرق مشقیں

۲۷- اس مکافی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (- ۱ ، ۱) ہو اور مرتب لا + ما + ۲ = ۰۔

۲۸- مشق ۲۷ کے مکافی کا وتر خاص معلوم کرو۔

۲۹- مکافی ما^2 = ۵ لا اور خط مستقیم لا + ما = ۳ کے نقاط تقاطع کے

محدد معلوم کرو۔

۳۰۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خط ما = م لا + ج مکافی ما^{2} = ۴ ا (لا + ب) کو مس کرے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ خط ما = ص لا + ج مکافی ما^{2} = ا لا + ب ما + ج کو مس کریگا اگر ج = $\frac{1}{\text{۴ ص ا}}$ (ا + ب ص)^{2} + $\frac{\text{ج ص}}{\text{ا}}$

[لا کو ساقط کرو اور ما کے لئے مساوات درجہ دوم معلوم کرو]

۳۲۔ مکافی ما^{2} = ۲ لا + ۱ اور خط مستقیم ۳ لا ـ ما + ۲ = ۰ کے نقاط تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۳۳۔ اگر مشق ۲۹ میں نقاطِ تقاطع ن اور ق ہوں تو ن ق کے وسطی نقطہ ر کے محدد معلوم کرو۔

[ملاحظہ ہو کہ اگر ر کے محدد ہوں (س، ص) ن کے (لا$_{1}$، ما$_{1}$) اور ق کے (لا$_{2}$، ما$_{2}$) تو س = $\frac{1}{2}$ (لا$_{1}$ + لا$_{2}$) مسائل مساوات درجۂ دوم استعمال کرو]

۳۴۔ اس مثلث متساوی الاضلاع کا ضلع معلوم کرو جو مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کے اندر بنایا جائے اور اس کا ایک راس مکافی کے راس پر واقع ہو۔

۳۵۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کے اندر بنایا گیا ہے اور اس کا ایک راس ماسکہ پر ہے، اس کے ضلع کا طول معلوم کرو۔

۳۶۔ ایک خط مستقیم مکافی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور منحنی سے ن اور نَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن اور نَ کے معینوں کا حاصل ضرب نصف وتر خاص کے مربع کے مساوی ہے۔

۳۷۔ اوپر کی مشق میں ثابت کرو کہ فصلوں کا حاصل ضرب ایک چوتھائی وتر خاص کے مربع کے مساوی ہے۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ اگر ایک خط لا + ما = ۰ کے متوازی ہو تو مکافی لا^{2} + ۲ لا ما + ما^{2} + ۲ لا + ۴ ما + ۱ = ۰ کے ساتھ اس کے نقاطِ

تقاطع میں سے ایک لاتناہی پر ہوگا، اس لئے لا + ما = ۰ محور کے متوازی ہے۔

۳۹۔ مکافی کا محور لا جم عہ + ما جب عہ – ع = ۰ ہے، راس پر کا مماس لا جب عہ – ما جم عہ = ۰ اور وتر خاص ۴ ل، ثابت کرو کہ مکافی کی مساوات

(لا جم عہ + ما جب عہ – ع)² = ± ۴ ل (لا جب عہ – ما جم عہ)

ہے جہاں علامت اس امر پر منحصر ہے کہ مکافی راس پر کے مماس کے ایک طرف واقع ہے یا دوسری طرف۔

[ضابطہ ن م² = ۴ ا س × ا م استعمال کرو جہاں ن م محور پر عمود ہے اور ا م اس عمود کے مساوی ہے جو راس پر کے مماس پر کھینچا جائے]

۴۰۔ اس مکافی کی مساوات معلوم کرو جس کا محور لا + ما – ۲ = ۰ ہے راس پر کا مماس لا – ما = ۰ اور وتر خاص ۴√۲، مکافی راس پر کے مماس کے اس طرف واقع ہے جس طرف نقطہ (۲، ۱) ہے۔

۴۱۔ اس مکافی کی مساوات معلوم کرو جس کے محور، راس، اور وتر خاص سب وہی ہوں جو اوپر کی مشق میں لیکن یہ راس پر کے مماس کی دوسری جانب واقع ہو۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ اگر خط مستقیم لہ لا + مہ ما + نہ = ۰ مکافی ما² – ۴ ن لا + ۴ ن ق = ۰ کو مس کرے تو لازماً

لہ² ق + لہ نہ – ن مہ² = ۰

آزمائشی پرچہ ۱

۱۔ جو خطوط مبدا کو ا لا² + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما = ۰ اور ما = م لا + ج کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں ان کی مشترک مساوات معلوم کرو اور اسلئے اس کی شرط معلوم کرو کہ ما = ج، ا لا² + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما = ۰ کا مماس ہو۔

۲- اب ج ایک مثلث ہے، د ع ایک متغیر خط ہے جو ب ج کے متوازی ہے اور اب کو د پر اج کو ع پر قطع کرتا ہے، ب ع اور ج د کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۳- اگر محور قائم ہوں تو بتاؤ کہ ان کو کس زاویہ میں سے پھرایا جائے، کہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 جملہ اَ لا^2 + بَ ما^2 میں تحویل ہو جائے ایک سادہ ربط اَ، بَ، ا، ب میں حاصل کرو۔

۴- ثابت کرو کہ محوروں کی کسی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

۵- مثال دفعہ ۴۳ کی مانند (۱) مکافی لا^2 = ۳ ما + ۷
(۲) منحنی ۱۰۰ ما = ۴ لا^3 + لا کو مرتسم کرو۔

۶- منحنی لا^2 - ۲ ا لا + ۳ ا ما + ا^2 = ۰ کو کھینچو اور (۱) مرتب کی مساوات (۲) وتر خاص کے سروں کے محدد، معلوم کرو نیز محور ما پر کا مقطوعہ معلوم کرتے سے اپنے کام کی تصدیق کرو۔

۷- ایک مکافی کا ماسکہ (-۱، ۰) ہے اور مرتب لا + ما + ۲ ا = ۰، اسکے وتر خاص کا طول اور اسکی مساوات معلوم کرو۔

۸- ثابت کرو کہ خط مستقیم لا + ن ما + ا ن^2 = ۰ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کو مس کرتا ہے، اس کا نقطۂ تماس معلوم کرو۔

۹- ثابت کرو کہ مساوات

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے اگر ھ^2 = ا ب

۱۰- ثابت کرو کہ ایک مثلث کا رقبہ جو مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے اندر بنایا جائے ہے

$\frac{1}{8\text{ا}}$ (ل ~ م)(م ~ ن)(ن ~ ل)

جہاں ل، م، ن راسوں کے معین ہیں۔

باب چہارم

قطع ناقص

۵۳- قطع ناقص، تعریفات - جب ایک نقطہ اسطرح حرکت کرے کہ اس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ مستقل نسبت رکھتا ہو (جو ایک سے کم ہو) اُس عمودی فاصلہ کے ساتھ جو متحرک نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم کے درمیان ہے تو اس نقطہ کے طریق کو **قطع ناقص** کہتے ہیں۔

ثابت نقطہ کو **ماسکہ** اور ثابت خط مستقیم کو **مرتب** کہتے ہیں اور مستقل نسبت **خروج المرکز** کہلاتی ہے۔



شکل ۲۱

خروج المرکز کو بالعموم حرف "ز" سے تعبیر کرتے ہیں قطع ناقص کی صورت میں نسبت ز ایک سے کم ہوتی ہے۔ مثلاً اگر ن کوئی نقطہ منحنی پر ہو اور ن ک عمود ہو مرتب پر تو

س ن = ز × ن ک . . . . . . (۱)

۵۴- قطع ناقص کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ س ماسکہ ہے، لا ک مرتب اور س لا اُس پر عمود ہے (دیکھو شکل ۲۱)

لا کو مبدأ اور لا س، لا ک کو محور مانو

فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے اور س لا = د

تب اگر نقطہ ن (جس کے محدد لا، ما ہیں) منحنی پر ہو تو

س ن = ز × ن ک

$$\therefore \quad س ن^{۲} = ز^{۲} \times ن ک^{۲}$$

یعنی $(لا - د)^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲} لا^{۲}$

$$\therefore \quad لا^{۲} (۱ - ز^{۲}) + ما^{۲} - ۲ د لا + د^{۲} = ۰$$

جو ناقص کی مساوات مطلوبہ ہے۔

۵۵۔ ناقص کی مساوات کی تحویل شکل $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ میں۔

مبداء کو بدلنے سے ہم مساوات دفعہ ۵۴ کو سادہ شکل میں لا سکتے ہیں جو عام طور پر استعمال ہوتی ہے، مساوات مذکورہ اسطرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۱ - ز^{۲}) \left\{ لا^{۲} - ۲ لا \frac{د}{۱ - ز^{۲}} \right\} + ما^{۲} + د^{۲} = ۰$$

لا کے لحاظ سے مربع کامل بنانے سے

$$(۱ - ز^{۲}) \left\{ لا - \frac{د}{۱ - ز^{۲}} \right\}^{۲} + ما^{۲} + د^{۲} = \frac{د^{۲}}{۱ - ز^{۲}}$$

اب اگر ہم نیا مبداء س لا پر کے ایک ایسے نقطہ پر لیں جو لا سے فاصلہ $\frac{د}{۱ - ز^{۲}}$ پر ہو اور نئے محور پرانے محوروں کے متوازی ہوں تو حصہ اول دفعہ ۲۱ کی رو سے اوپر کی مساوات ہوجائیگی

$$(۱ - ز^{۲}) لا^{۲} + ما^{۲} = \frac{د^{۲}}{۱ - ز^{۲}} - د^{۲} = \frac{د^{۲} ز^{۲}}{۱ - ز^{۲}}$$

یا $لا^{۲} + \frac{ما^{۲}}{۱ - ز^{۲}} = \frac{د^{۲} ز^{۲}}{(۱ - ز^{۲})^{۲}}$

اب $\frac{د^{۲} ز^{۲}}{(۱ - ز^{۲})^{۲}}$ کو $ا^{۲}$ کے مساوی رکھو

تو $ا^{۲}$ پر دونوں جانب تقسیم کرنے سے اوپر کی مساوات ہوگی

$$\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ا^{۲} (۱ - ز^{۲})} = ۱$$

اور $ا^{۲} (۱ - ز^{۲})$ کو $ب^{۲}$ کے مساوی رکھنے سے یہ مساوات ہوگی

$$\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

نتیجہ صحیح $ز^{۲} = ۱ - \frac{ب^{۲}}{ا^{۲}}$

مثال۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱، ۱) ہو، متناظر مرتب $۲ لا - ما + ۱ = ۰$ اور خروج المرکز $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۔

یہاں اگر ن کے محددات لا، ما ہوں تو

$\text{س ن}^2 = (\text{لا} - 1)^2 + (\text{ما} - 1)^2$ ، ن ک نقطہ ن سے مرتب پر عمود ہے $= \frac{2\,\text{لا} - \text{ما} + 1}{\sqrt{5}}$

لیکن $\text{س ن}^2 = \text{ذ}^2 \times \text{ن ک}^2 = \frac{1}{4}\,\text{ن ک}^2$

اسلئے $(\text{لا} - 1)^2 + (\text{ما} - 1)^2 = \frac{1}{20}(2\,\text{لا} - \text{ما} + 1)^2$

مطلوبہ مساوات ہے، مختصر کرنے اور رقموں کو ایک طرف لیجانے سے

$$6\,\text{لا}^2 + 4\,\text{لا}\,\text{ما} + 9\,\text{ما}^2 - 42\,\text{لا} - 18\,\text{ما} + 19 = 0$$

مشقیں

۱۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۰، ۱) ہو، مرتب $\text{لا} + \text{ما} = 0$ اور خروج المرکز $\frac{1}{2}$

۲۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}, 0)$ ہو، مرتب $\text{لا} = \frac{\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}$ ہو اور خروج المرکز $\frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\text{ا}}$۔

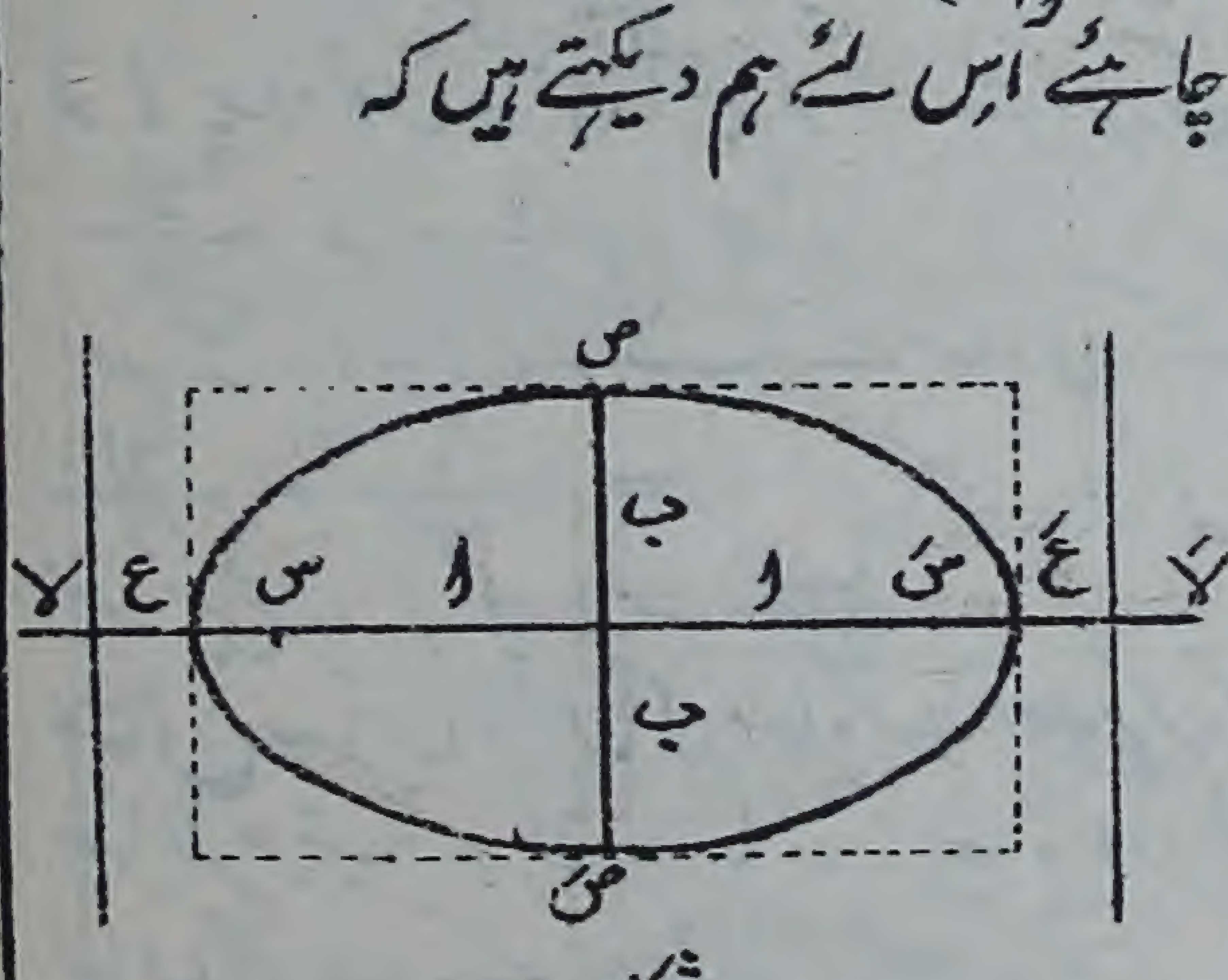
۵۶۔ قطع ناقص کی شکل

ناقص کی مساوات کی سادہ ترین صورت $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ سے اس کی شکل بآسانی حاصل ہوسکتی ہے۔

مساوات سے $\text{ما}^2 = \text{ب}^2 \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)$

اور چونکہ ما^2 کو لازماً مثبت ہونا چاہئے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} \ngtr 1$$



شکل ۲۲

یعنی لا کی عددی قیمت ا سے بڑی نہیں ہے اسطرح ما کی قیمت ب سے زیادہ نہیں ہوسکتی۔

اوپر کی مساوات سے

$$\text{ما} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$$

اس لئے (۱) لا تعداداً ا سے بڑا نہیں ہوسکتا۔

(۲) لا = ±ا سے حاصل ہوتا ہے ما = ۰ اب چونکہ خطوط لا = ± ا سے ما کی دونوں قیمتیں صفر کے مساوی حاصل ہوتی ہیں اس لئے یہ دونوں خط مماس ہیں۔

(۳) لا کی کسی ایسی قیمت کے جواب میں جو ا سے کم ہو ما کی دو مساوی اور مخلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

پس منحنی بالتمام خطوط لا = + ا اور لا = - ا کے درمیان واقع ہے اور اگر اس کا کوئی وتر محور ما کے متوازی کھینچا جائے تو محور لا پر اس کی تنصیف ہوتی ہے یعنی منحنی محور لا کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

اسی طرح مساوات $لا = \pm \frac{ا}{ب} \sqrt{ب^۲ - ما^۲}$ سے ہم حاصل کرتے ہیں کہ منحنی بالتمام خطوط ما = + ب اور ما = - ب کے درمیان واقع ہے اور محور ما کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک محدد تعداداً بڑھتا ہے تو دوسرا تعداداً کم ہوتا ہے' لہٰذا منحنی بیضوی شکل کا ہے ملاحظہ ہو شکل بالا۔

اگر محور لا پر نقطے ع اور عَ ایسے لئے جائیں کہ ج ع = ج عَ = ا جہاں ج مبدأ ہے' اور محور ما پر نقطے ص اور صَ لئے جائیں جہاں

ج ص = ج صَ = ب

تو ع عَ اور ص صَ کو بالترتیب ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کہتے ہیں' نقطہ ج مرکز کہلاتا ہے۔

نتیجہ صریح منحنی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ میں اگر ب > ا تو صریحاً ناقص کا محور اعظم جب محور ما پر واقع ہوتا ہے اور محور اصغر ا محور لا پر' اس صورت میں ناقص کے ماسکے محور ما پر واقع ہیں' دونوں مرتب محور لا کے متوازی ہیں اور خروج المرکز مساوات $ا^۲ = ب^۲ (۱ - ر^۲)$ سے حاصل ہوتا ہے۔

مشقیں

۳۔ ذیل کے منحنیات کو ایک ہی شکل میں کھینچو۔

(۱) $\frac{لا^۲}{۹} + \frac{ما^۲}{۴} = ۱$ (۲) $لا^۲ + ۴ ما^۲ = ۱$ (۳) $۴ لا^۲ + ما^۲ = ۱$

۴۔ مشق ۳ میں جو منحنی دئے گئے ہیں اُن میں سے ہر ایک کی صورت میں نیم محور اعظم (ج ع) کے نقطۂ تنصیف پر جو منحنی کا معین ہے اس کا طول معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ نقطہ (ھ، ک) ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے باہر اوپر یا اندر واقع ہوگا اگر بالترتیب

$$\frac{ھ^2}{ا^2} + \frac{ک^2}{ب^2} \;>=<\; ۱$$

۶۔ معلوم کرو کہ نقطہ $\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۰}} ، \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)$ منحنیات (۱) $\frac{لا^2}{۴} + ما^2 = ۱$ (۲) $لا^2 + \frac{ما^2}{۴} = ۱$ کے باہر یا اندر واقع ہے اور شکل کے ذریعہ اپنے جواب کی توضیح کرو۔

۵۷۔ ناقص کی مساوات ایسے محوروں کے لحاظ سے جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$

میں ناقص کا مرکز مبدأ ہے اور منحنی کے محور حوالہ کے محور ہیں۔

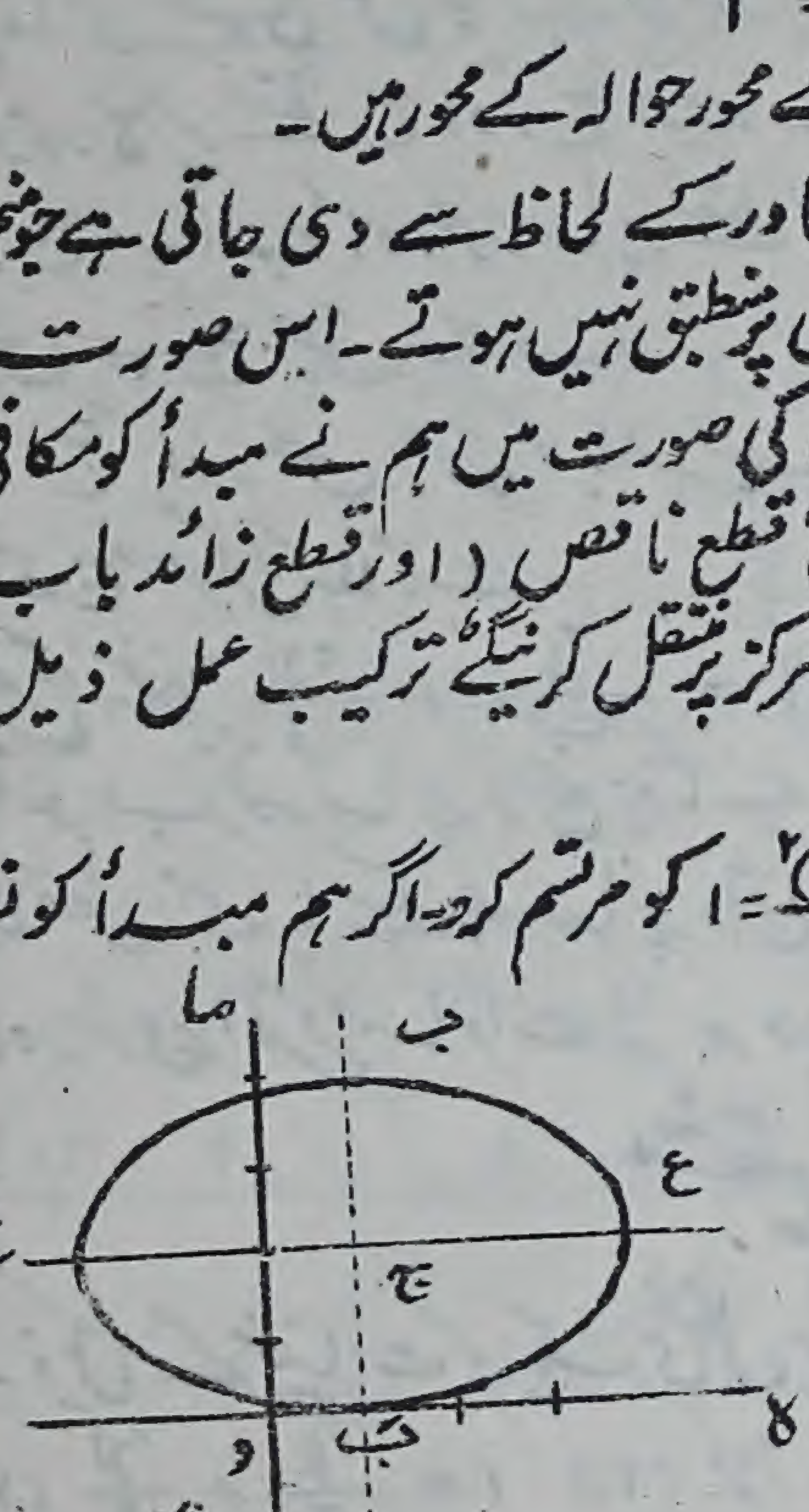
اکثر اوقات منحنی کی مساوات ایسے محاور کے لحاظ سے دی جاتی ہے جو منحنی کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں لیکن اُن پر منطبق نہیں ہوتے۔ اس صورت میں منحنی کا مرتسم کرنا ایسا مشکل نہیں ہوتا۔ مکافی کی صورت میں ہم نے مبدأ کو مکافی کے راس پر منتقل کرنے سے ترسیم حاصل کی۔ قطع ناقص (اور قطع زائد باب پنجم) کو مرتسم کرنے کے لئے ہم مبدأ کو منحنی کے مرکز پر منتقل کرینگے ترکیب عمل ذیل کی مثالوں سے بخوبی واضح ہوگی۔

مثال ۱۔ منحنی $\frac{(لا-۱)^2}{۹} + \frac{(ما-۲)^2}{۴} = ۱$ کو مرتسم کرو۔ اگر ہم مبدأ کو نقطہ ج (۱، ۲) پر منتقل کریں تو مساوات ہو جائیگی

$$\frac{لا'^2}{۹} + \frac{ما'^2}{۴} = ۱$$ [حصہ اول دفعہ ۳۱]

یہ صریحاً قطع ناقص ہے جسکے محور ۳ اور ۲ ہیں۔

ابتدائی محوروں پر مقطوعات کا طول



شکل ۲۳

معلوم کرنے سے شکل کی تصدیق کرو۔

لا = ۰ سے حاصل ہوتا ہے $\frac{(ما - ۲)^2}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹}$

یا ما = ۲ ± $\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}$ = ۳٫۸۸ یا ۰٫۱۲

اگر ما = ۰ تو $\frac{(لا - ۱)^2}{۹} = ۱ - ۱$ یا لا = ۱

مثال ۲۔ منحنی $لا^2 + ۴ ما^2 - ۲ لا - ۱۶ ما + ۸ = ۰$ کو مرتسم کرو۔

یہاں $لا^2$ اور لا کی رقوم میں کوئی عددی مقدار جمع کرنے سے انہیں مربع کامل بناؤ، اسطرح $ما^2$ اور ما کی رقوم کو بھی مربع کامل بناؤ

تب $(لا^2 - ۲ لا + ۱) + ۴ (ما^2 - ۴ ما + ۴) - ۹ = ۰$

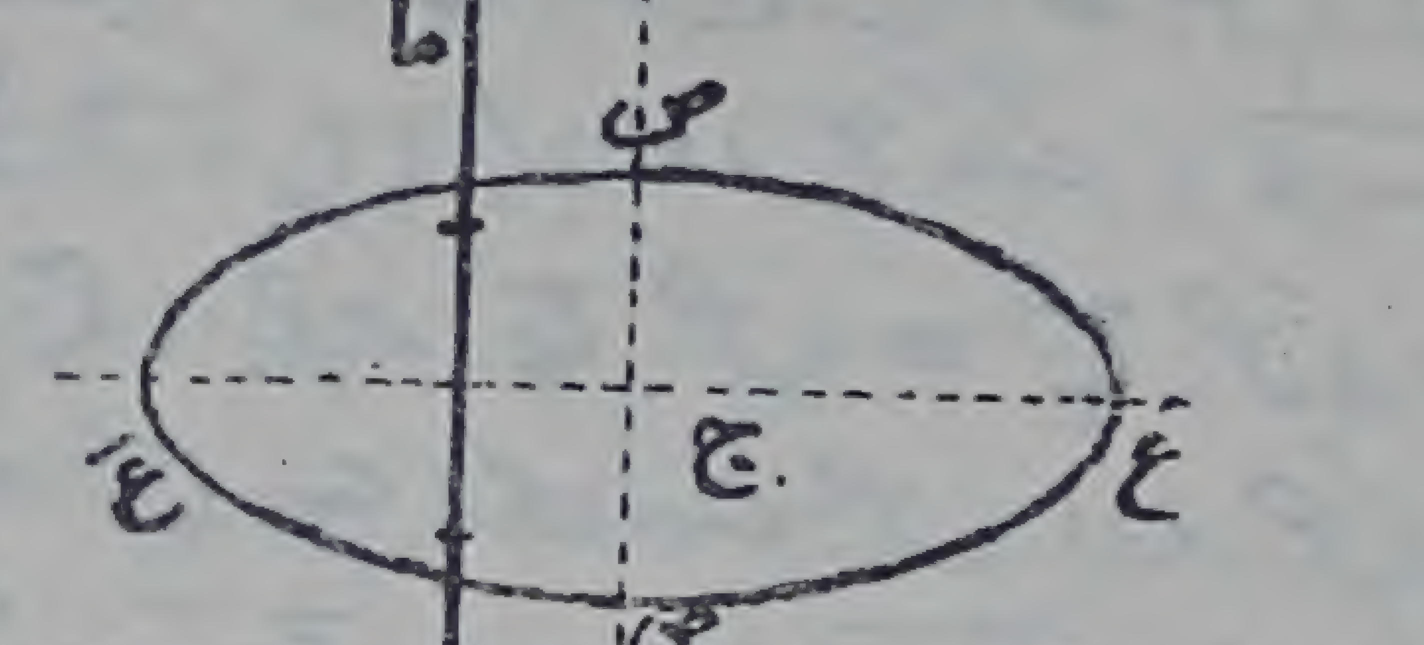
یا $(لا - ۱)^2 + ۴ (ما - ۲)^2 = ۹$

یا $\frac{(لا - ۱)^2}{۹} + \frac{(ما - ۲)^2}{\frac{۹}{۴}} = ۱$

مبدأ کو نقطہ (۱، ۲) پر منتقل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$\frac{لا^2}{۹} + \frac{ما^2}{\frac{۹}{۴}} = ۱$

جو صریحاً قطع ناقص ہے جس کے نصف محور ۳ اور $\frac{۳}{۲}$ ہیں ملاحظہ ہو شکل۔



شکل ۲۴

یہ ابتدائی محور لا = ۰ کو کاٹتا ہے

جہاں $۴ ما^2 - ۱۶ ما + ۸ = ۰$

یا ما = ۲ ± $\sqrt{۲}$ = ۳٫۴ یا ۰٫۶

اور یہ محور ما = ۰ کو کاٹتا ہے

جہاں $لا^2 - ۲ لا + ۸ = ۰$ یعنی خیالی نقاط پر۔

مثال ۳۔ منحنی $۲ لا^2 + ما^2 - ۲ ما - ۳ = ۰$ کو مرتسم کرو۔

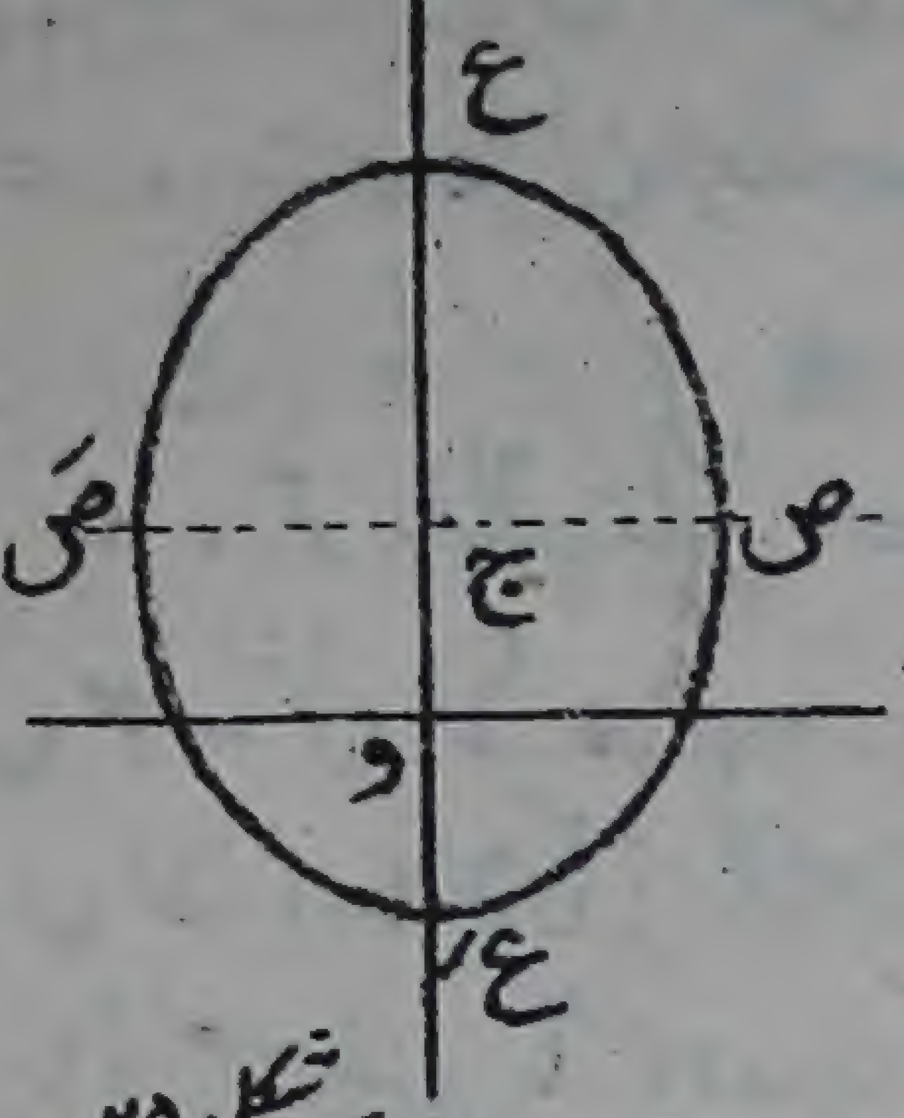
مثال ۲ کیطرح ہم رقوم کو اسطرح اکٹھا کرتے ہیں

$۲ لا^2 + (ما^2 - ۲ ما + ۱) - ۴ = ۰$

یا $۲ لا^2 + (ما - ۱)^2 = ۴$

یا $\frac{لا^2}{۲} + \frac{(ما - ۱)^2}{۴} = ۱$

مبدأ کو نقطہ (۰، ۱) پر منتقل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے



شکل ۲۵

$$\frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{ما^{۲}}{۴} = ۱$$

یہ قطع ناقص ہے جس کے نصف محور √۲ اور ۲ ہیں لیکن محور اعظم نئے محور ما پر واقع ہوتا ہے، منحنی شکل منسلکہ میں دیا گیا ہے۔

ابتدائی محوروں پر مقطوعے حاصل ہوتے ہیں

لا = ۰ تو ما² - ۲ما - ۳ = ۰ یا ما = ۳، یا -۱

اور ما = ۰، لا = ± √(۳/۲) = ± ۱٫۲

مثال ۴۔ مثال ۲ میں جو منحنی دیا گیا ہے اُس کے لئے ابتدائی محوروں کے لحاظ سے (ا) خروج المرکز (ب) محور اعظم کے سروں کے محدد (ج) محور اصغر کے سروں کے محدد معلوم کرو۔

(ا) اس منحنی میں ا = ۳ اور ب = ۳/۲

∴ ز² = ۱ - ب²/ا² = ۱ - (۳/۲ ÷ ۳)² = ۱ - ۱/۴ = ۳/۴ ∴ ز = √۳/۲

(ب) ج کے محدد ہیں (۱، ۲) اور ع ج عَ محور لا کے متوازی ہے، نیز چونکہ ج ع = ج عَ = ۳ اس لئے ع کے محدد (۱ + ۳، ۲) یا (۴، ۲) ہیں اور عَ کے (۱ - ۳، ۲) یا (-۲، ۲)

(ج) چونکہ ج ص = ج صَ = ۳/۲ اور ص ج صَ محور ما کے متوازی ہے اس لئے ص اور صَ کے محدد بالترتیب (۱، ۲ + ۳/۲) اور (۱، ۲ - ۳/۲) یا (۱، ۷/۲) اور (۱، ۱/۲) ہیں۔

مشقیں

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو

۷- (لا - ۲)²/۴ + (ما - ۱)² = ۱ ۸- (لا - ۱)²/۹ + (ما - ۲)² = ۴

۹- لا² + ۴ما² - ۸ما = ۰ ۱۰- ۴لا² + ما² - ۲ما - ۳ = ۰

۱۱- لا² + ۲ما² + ۲لا - ۴ما - ۱ = ۰ ۱۲- ۱۵لا² + ۴ما² - ۹۰لا + ۳۲ما - ۱۴ = ۰

۱۳ تا ۱۸- امثلہ (۷ - ۱۲) میں جو منحنی دئے گئے ہیں اِن میں سے ہر ایک کیلئے

(۱) خروج المرکز (۲) محور اعظم کے سروں کے محدد (۳) محور اصغر کے سروں کے محدد معلوم کرو۔

۵۸۔ ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز قطب ہو۔

قطبی مساوات حاصل کرنے کیلئے ہمیں (حصہ اول دفعہ ۶) کی رو سے مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{یا}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

میں $\text{لا} = \text{ر جم ط}$، $\text{یا} = \text{ر جب ط}$ مندرج کرنا چاہئے۔

اسطرح حاصل ہوتا ہے $\text{ر}^2 \left(\frac{\text{جم}^2 \text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{ب}^2} \right) = 1$

یا $\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2 \text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{ب}^2}$ ...... (۳)

جو قطبی مساوات مطلوبہ ہے۔

۵۹۔ قطبی مساوات سے منحنی کی شکل کا حاصل کرنا۔

مساوات (۳) کو ہم اسطرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} + \text{جب}^2 \text{ط} \left(\frac{1}{\text{ب}^2} - \frac{1}{\text{ا}^2} \right)$$

اب چونکہ ا > ب اس لئے $\frac{1}{\text{ب}} > \frac{1}{\text{ا}}$

اس لئے جب زاویہ ط صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے تو بائیں طرف کا جملہ بھی بڑھتا ہے، اس لئے $\frac{1}{\text{ر}}$ بڑھتا ہے یعنی ر کم ہوتا ہے، پس جیسے زاویہ ط صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے ر بالتسلسل کم ہوتا ہے اور ہر ربع میں بھی واقع ہوتا ہے یعنی محور اعظم کے ایک سرے سے محور اصغر کے سرے تک پہنچنے میں ر مسلسل کم ہوتا جاتا ہے۔

اس سے ہمیں منحنی کو مرتسم کرنے کی ایک آسان ترکیب حاصل ہوتی ہے کیونکہ جہاں مرکز میں سے گزرنیوالا کوئی خط منحنی کو کاٹتا ہے اُن نقاط کا فاصلہ مرکز سے ہم باسانی معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک ناقص کے نیم محور ۲ اور ۱ ہیں، اُس سمتی قطر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم سے °۴۵ کا زاویہ بنائے۔

منحنی کی کارتیزی مساوات جبکہ محور اعظم اور اصغر حوالہ کے محور مانے جائیں

$$\frac{\text{لا}^2}{2^2} + \frac{\text{یا}^2}{1^2} = 1$$ ہے

اس لئے اگر مرکز قطب ہو تو قطبی مساوات سے

$$\frac{1}{ر^2} = \frac{جم^2 ط}{۴} + \frac{جب^2 ط}{۱} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۴} + \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۵}{۸}$$

اس لئے $ر = \sqrt{\frac{۸}{۵}}$

مثال ۲۔ قطع ناقص میں جو سمتی نیم قطر علی القوائم ہوں اُن کے مربعوں کے متکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سمتی نیم قطر یہ ہیں $ر$ ، $ر'$ جو ج ع سے زاویہ ط بناتا ہے اور $ر'$ جو ج ع سے زاویہ $(ط + \frac{\pi}{2})$ بناتا ہے، تب

$$\frac{1}{ر^2} = \frac{جم^2 ط}{ا^2} + \frac{جب^2 ط}{ب^2}$$

$$\frac{1}{ر'^2} = \frac{جم^2 (ط + \frac{\pi}{2})}{ا^2} + \frac{جب^2 (ط + \frac{\pi}{2})}{ب^2} = \frac{جب^2 ط}{ا^2} + \frac{جم^2 ط}{ب^2}$$

جمع کرنے سے

$$\frac{1}{ر^2} + \frac{1}{ر'^2} = \frac{جب^2 ط + جم^2 ط}{ا^2} + \frac{جب^2 ط + جم^2 ط}{ب^2}$$

$$= \frac{1}{ا^2} + \frac{1}{ب^2}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مشقیں

۱۹۔ مشق ۳ دفعہ ۵۶ کے منحنیات میں اُن سمتی نیم قطروں کا طول مرکز سے دریافت کرو جو محور اعظم سے (۱) ۴۵° (۲) ۶۰° کے زاویے بنائیں۔

۲۰۔ ایک ہی شکل میں منحنیات $\frac{لا^2}{۴} + ما^2 = ۱$ اور $\frac{لا^2}{۹} + ۴\, ما^2 = ۱$ کو کھینچو۔ اُس زاویہ کا مماس معلوم کرو جو مشترک سمتی نیم قطر محور لا کے ساتھ بناتا ہے اور اس نیم قطر کا طول معلوم کرو۔

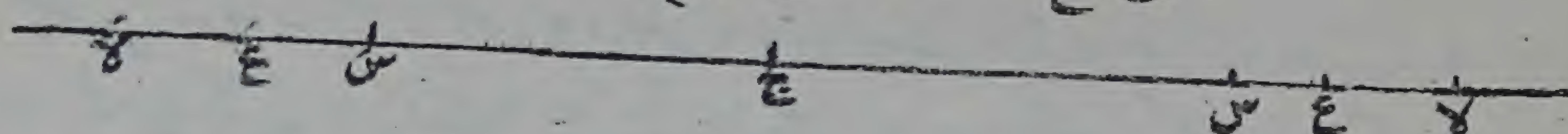
۶۰۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص ایک دوسرا ماسکہ اور ایک دوسرا مرتب رکھتا ہے۔

چونکہ منحنی بلحاظ ع ج عَ اور ص ج صَ کے متشاکل ہے اس لئے اگر
ہم ع ج عَ پر نقاط سَ اور لاَ ایسے لیں کہ ج سَ = ج س اور
ج لاَ = ج لا اور لاَ کَ، ج لاَ پر عمود کھینچیں تو ظاہر ہے کہ سَ
دوسرا ماسکہ ہے اور لاَ کَ دوسرا مرتب ہے اور ان کی مدد سے تمام
قطع ناقص بعینہٖ اسی طرح مرتسم ہو سکتا ہے جس طرح کہ س اور لاک کی مدد سے۔

۶۱۔ ثابت کرو کہ ج لا = ا/ز اور ج س = ا ز

(۱) چونکہ ع اور عَ منحنی پر واقع ہیں اس لئے

س عَ = ز × ع لا
س ع = ز × عَ لا } شکل ۲۶ .... (۱)



شکل ۲۶

ان دو نتائج کو جمع کرنے سے

س ع + س عَ = ز (ع لا + عَ لا)

لیکن س ع + س عَ = ع عَ = ۲ ا

اور ع لا + عَ لا = ع لا + عَ لاَ + لاَ لا = لا لاَ = ۲ ج لا

∴ ۲ ا = ۲ ز × ج لا

∴ ج لا = ا/ز .... (۴)

(۲) نیز (۱) سے بعمل تفریق

س عَ ـ س ع = ز (عَ لا ـ ع لا)

∴ س ع ـ سَ عَ = ز (عَ لا ـ ع لا)

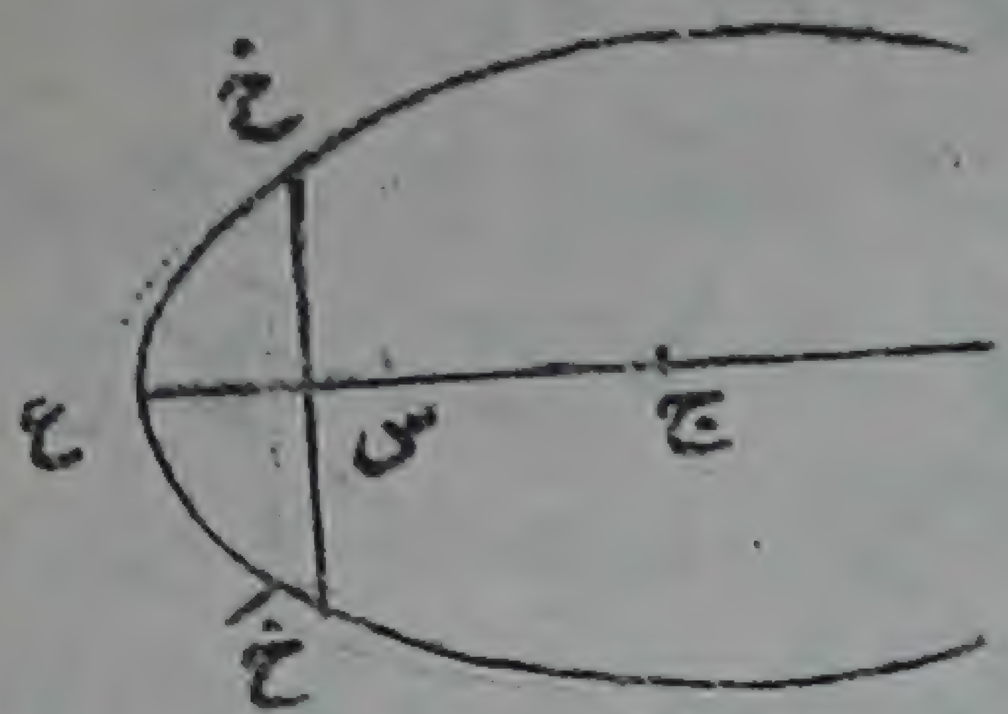
یعنی س سَ = ز × ع عَ یا ۲ ج س = ۲ ا ز

∴ ج س = ا ز .... (۵)

نتیجہ صریح۔ ج لا × ج س = ا/ز × ا ز = ا² = ج ع²

۶۲۔ وتر خاص **تعریف**۔ وتر خ سَ خَ جو ماسکہ میں سے
محور پر عمود وار کھینچا جائے ناقص کا وتر خاص کہلاتا ہے اس کو بالعموم

۲ ل سے تعبیر کرتے ہیں۔



شکل ۳۷

نیم وترخاص $\text{ل} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$

وترخاص خ س خَ کی تنصیف س پر ہوتی ہے اور چونکہ ج س = ا ز اس لئے خ کے محدد (ا ز، ل) ہیں

اس لئے $\frac{\text{ا}^2\text{ز}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ل}^2}{\text{ب}^2} = 1$

$$\therefore \frac{\text{ل}^2}{\text{ب}^2} = 1 - \text{ز}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

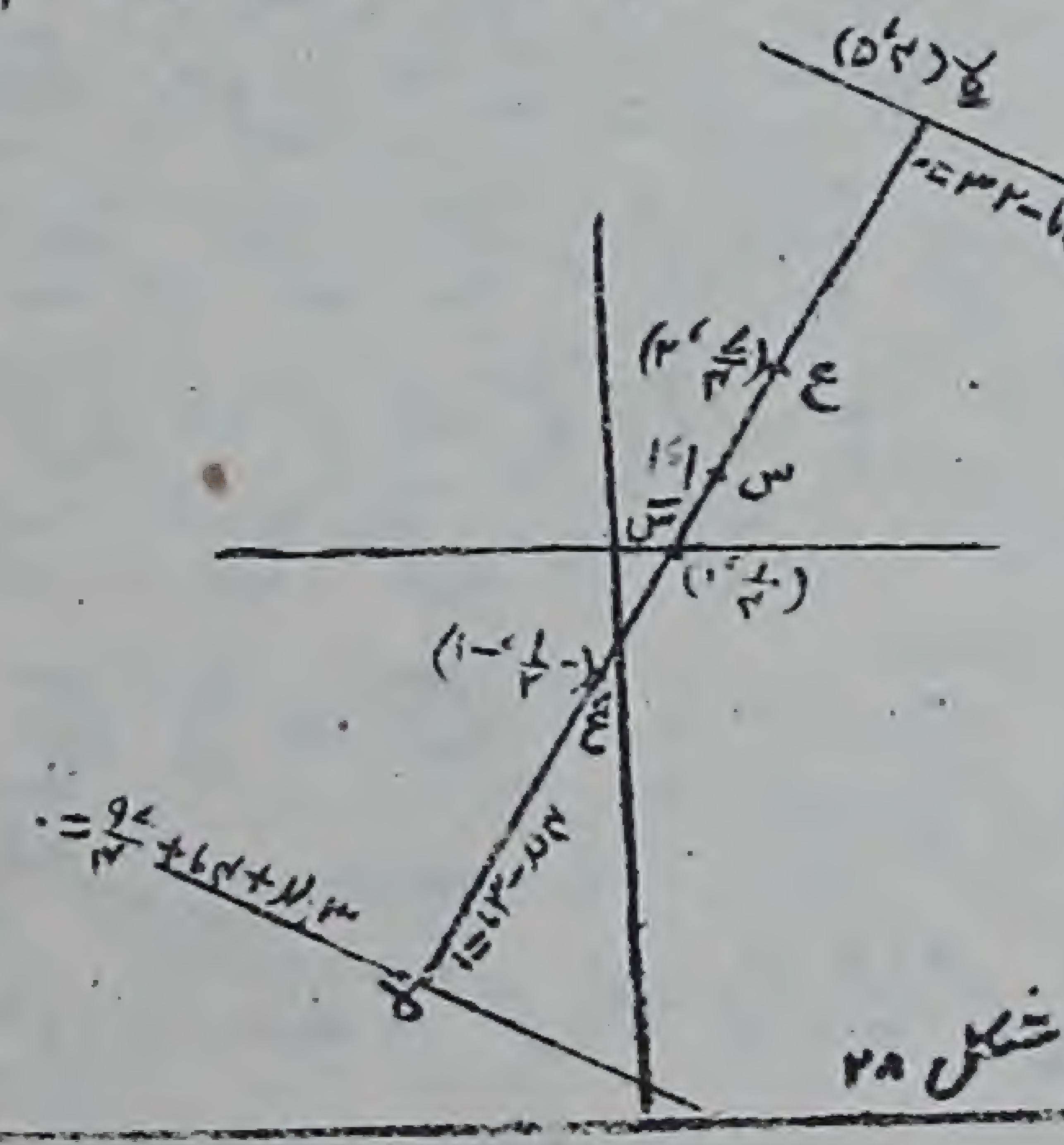
مثال ۔ ایک قطع ناقص کا ماسکہ (۱، ۱) ہے، مرتب ۳ لا + ۴ ما − ۳۲ = ۰ اور خروج المرکز ½ ہیں، نقاط ع، عَ اور ج کے محدد، اس کے محاور کے طول اور دوسرے ماسکہ اور مرتب کے مقام معلوم کرو، نیز ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

سب سے پہلے ناقص کی مساوات صریحاً

$$\left[(\text{لا}-1)^2 + (\text{ما}-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{3\,\text{لا} + 4\,\text{ما} - 32}{\sqrt{25}} \text{ ہے۔}$$

پس $225\left\{(\text{لا}-1)^2 + (\text{ما}-1)^2\right\} = (3\,\text{لا} + 4\,\text{ما} - 32)^2$

یعنی $216\,\text{لا}^2 - 24\,\text{لا}\,\text{ما} + 209\,\text{ما}^2 - 258\,\text{لا} - 194\,\text{ما} - 574 = 0$



شکل ۳۸

نیز ع اور عَ خط س لا کو داخلاً اور خارجاً نسبت ۱ : ۳ سے تقسیم کرتے ہیں، اس لئے ہمیں لا کا مقام معلوم کرنا چاہئے۔

اب چونکہ س لا خط ۳ لا + ۴ ما - ۳۲ = ۰ پر عمود ہے اس کی مساوات اس شکل ۴ لا - ۳ ما + ک = ۰ کی ہے اور چونکہ یہ (۱، ۱) میں سے گذرتا ہے اس لئے یہ ۴ لا - ۳ ما = ۱ ہے، اب نقطہ لا، اس خط اور ۳ لا + ۴ ما - ۳۲ = ۰ کا نقطۂ تقاطع ہے اسلئے اس کے محدد (۴، ۵) ہیں۔

اس لئے ع کے لئے لا = (۴×۱+۱×۳)/۴ = ۷/۴، ما = (۵×۱+۱×۳)/۴ = ۲

[حصہ اول دفعہ ۳]

اسیطرح عَ کے محدد ہیں (-۱/۲، -۱)

نیز ج خط ع عَ کا نقطۂ تنصیف ہے اور اس لئے یہ ہے (۵/۸، ۱/۲)

محوروں کے طول معلوم کرنے کے لئے ج ع = √((۷/۴ - ۵/۸)² + (۲ - ۱/۲)²)

∴ ا = ۱۵/۸ اور ب = ا √(۱ - ذ²) = ۱۵/۸ √(۱ - (۱/۳)²) = ۵/۴ √۲

اگر دوسرا ماسکہ (لا۱، ما۱) ہو تو ج نقطہ (۱، ۱) اور (لا۱، ما۱) کا نقطہ تنصیف ہوگا پس

لا۱ + ۱ = ۲ × ۵/۸ = ۵/۴ ∴ لا۱ = ۱/۴

ما۱ + ۱ = ۲ × ۱/۲ = ۱ ∴ ما۱ = ۰

اس لئے دوسرا ماسکہ (۱/۴، ۰) ہے

دوسرا مرتب پہلے مرتب کے متوازی ہے اور اس کا فاصلہ مرکز سے پہلے مرتب کے فاصلے کے مساوی ہے لیکن علامت میں مختلف ہے۔ پس اسکی مساوات ۳ لا + ۴ ما = کَ ہے اور

(۳ لا + ۴ ما - کَ)/۵ = - (۳ لا + ۴ ما - ۳۲)/۵ جہاں لا = ۵/۸ اور ما = ۱/۲

اس لئے کَ = - ۹۷/۴ اور دوسرا مرتب ہے ۳ لا + ۴ ما + ۹۷/۴ = ۰

مشقیں

۲۱- دفعہ ۵۶ کی شکل سے ثابت کرو کہ

س ص = ع ج، ج س = √(ا^۲ − ب^۲)

۲۲- ایک ناقص کے نیم قطر ۴ اور ۳ ہیں، اُن سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو محور اعظم سے بالترتیب زاویے ۳۰°، ۴۵° اور ۹۰° بنائیں۔

۲۳- اسی ناقص کا خروج المرکز اور وتر خاص معلوم کرو۔

۲۴- اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱، ۲) ہے، مرتب لا + ما + ۱ = ۰ اور خروج المرکز ½ ہے، اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو

[ل = ز × ماسکہ سے مرتب پر کے عمود کا طول]

۲۵- مشق ۲۴ میں جو قطع ناقص حاصل ہوتا ہے اس کے محور اعظم اور محور اصغر کے طول معلوم کرو۔

۲۶- اسی ناقص کے محور اعظم کے سروں کے محددوں کے طول معلوم کرو۔

۲۷- اوپر کے ناقص کا دوسرا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

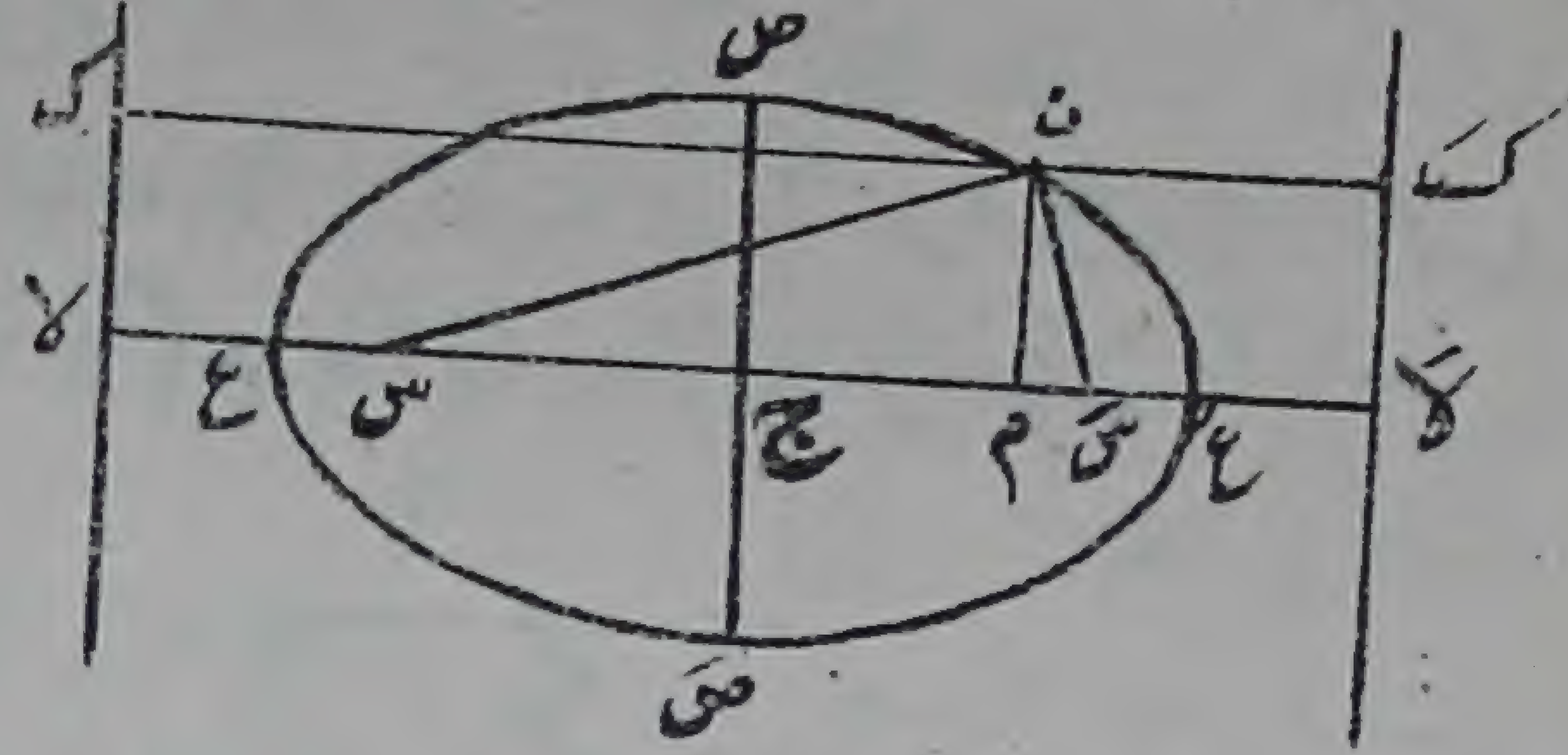
۲۸- اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (¼، ۰) ہے، مرتب ۳ لا + ۴ ما + ۲۴/۴ = ۰ اور خروج المرکز ½ ہے۔

۲۹- اگر ایک ناقص کے نیم محوروں کے طول اور ان کے مقام دیئے ہوئے ہوں تو بتاؤ کہ ماسکے اور مرتب کسطرح معلوم ہو سکتے ہیں۔

۶۳- ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ محور اعظم کے مساوی ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں، ن م معین ہے اور ن ک، ن کَ مرتبوں پر عمود ہیں، تب

س ن = ز × ن ک = ز × م لا = ز (ج لا + لا)

= ز (ا/ز + لا) چونکہ ج لا = ا/ز



شکل ۲۹

∴ س ن = ا + ز لا

اسیطرح سَ ن = ز × ن کَ = ز × م لاَ = ز (ج لاَ - ج م)

= ز (ا/ز - لا) = ا - ز لا

اور اس لئے س ن + سَ ن = ا + ز لا + ا - ز لا

∴ س ن + سَ ن = ۲ ا . . . . . . (۷)

۴۶- برعکس اس کے اگر ایک نقطہ ایک معلومہ سطح مستوی میں اسطرح حرکت کرے کہ اس سطح پر کے دو ثابت نقاط سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو یہ نقطہ ایک ناقص مرتسم کریگا۔

نقاط س اور سَ کو ملانے والے خط کو محور لا اور س سَ کے نقطۂ تنصیف کو مبدأ مانو، اسطرح س اور سَ کے محدد بالترتیب (ج، ۰) اور (- ج، ۰) سے تعبیر ہوسکتے ہیں۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہو تو

س ن + سَ ن = مستقل = ۲ ا (فرض کرو)

√((لا - ج)² + ما²) + √((لا + ج)² + ما²) = ۲ ا

اور س ن + سَ ن > س سَ یا ا > ج

ترتیب بدلنے سے

√((لا - ج)² + ما²) - ۲ ا = - √((لا + ج)² + ما²)

مربع (لا - ج)² + ما² - ۴ ا √((لا - ج)² + ما²) + ۴ ا² = (لا + ج)² + ما²

ترتیب بدلنے اور ۲ پر تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}\sqrt{(\text{لا}-\text{ج})^2+\text{ما}^2}=\text{ا}^2-\text{ج}\ \text{لا}$$

دوبارہ مربع لینے سے $\text{ا}^2(\text{لا}-\text{ج})^2+\text{ما}^2\text{ا}^2=\text{ا}^4-2\text{ا}^2\text{ج}\ \text{لا}+\text{ج}^2\text{لا}^2$

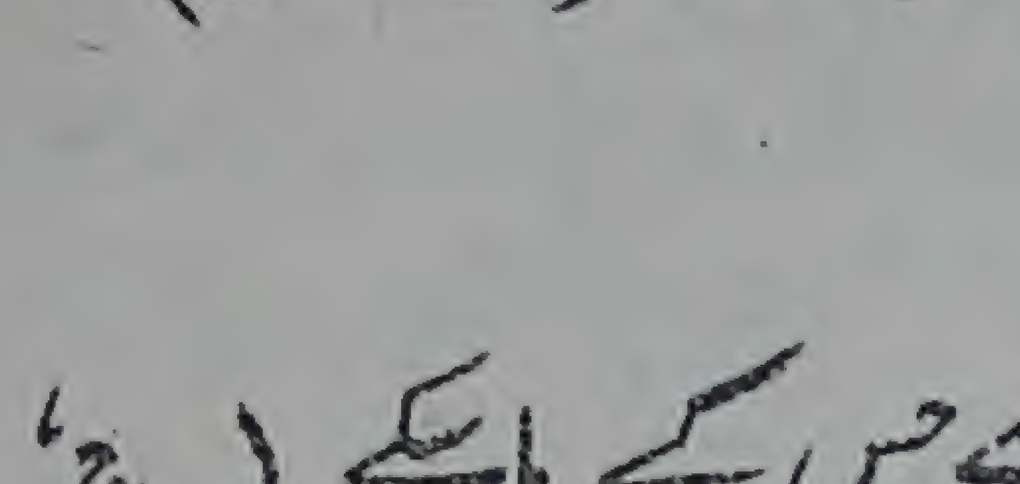
یعنی $\text{لا}^2(\text{ا}^2-\text{ج}^2)+\text{ما}^2\text{ا}^2=\text{ا}^4-\text{ا}^2\text{ج}^2=\text{ا}^2(\text{ا}^2-\text{ج}^2)$

یا $$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2-\text{ج}^2}=1$$

چونکہ ا > ج اس لئے یہ ایک ناقص ہے جس کے ماسکے (ج، ۰) اور (−ج، ۰) ہیں
(دیکھو دفعہ ۶۱)

۶۵۔ ناقص کی آلی ترسیم۔ دفعہ ۶۴ سے ہمیں ناقص کے مرتسم کرنے کی آلی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

ایک تاگہ س ن سَ لو اور اسکے سروں س، سَ کو دو کیلوں کیساتھ جو ایک کاغذ پر ثابت کر دئے گئے ہیں مضبوطی سے باندھ دو۔ پھر ایک انتصابی پنسل کے ذریعہ تاگے کو تانے رکھو پنسل کو حرکت دینے سے ایک ناقص مرتسم ہوگا جس کے ماسکے س اور سَ ہیں اور جس کا محور اعظم



شکل ۳۰

س ن + سَ ن = تاگے کا طول

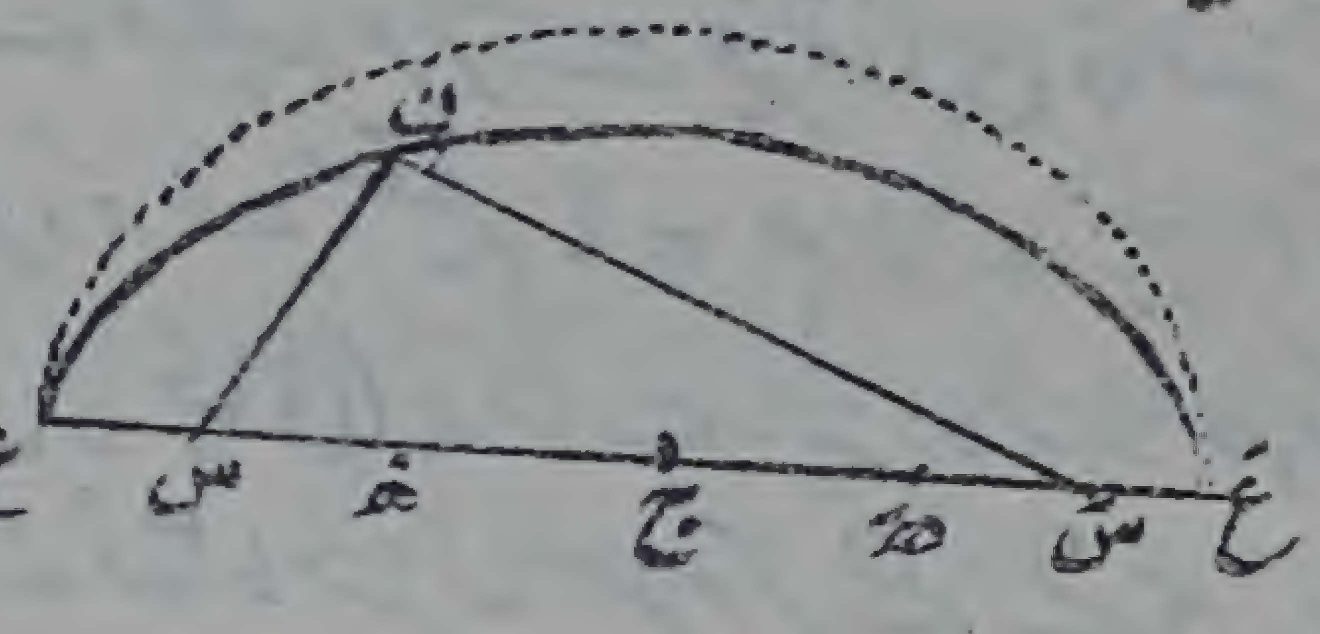
نوٹ ناقص کے نچلے حصہ کو مرتسم کرنے کے لئے تمام تاگے کو س سَ کے نیچے لانا پڑیگا اور پنسل اس صورت میں تاگے کے اوپر رہیگی۔

مشقیں

۳۰۔ ایک نقطہ اسطرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقاط س اور سَ سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ ہمیشہ ۱۰ رہتا ہے اور س سَ = ۸، اس نقطہ کے طریق کی سادہ سے سادہ مساوات معلوم کرو۔

۳۱۔ مثال ۳۰ میں جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کا خروج المرکز اور اسکے نیم وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۶۶- سب قطع ناقص ایک ہی شکل کے نہیں ہوتے (مقابلہ کرو نتیجہ صریح دفعہ ۳۹ کے ساتھ)
فرض کرو کہ تاگے س ن سَ کے ذریعہ اور ماسکوں س، سَ کے
لحاظ سے ہم نے ناقص ع ن عَ کو مرتسم کرلیا ہے اور اب ہم تاگے کے
سروں کو س سَ پر کے دو نقاط ھ اور ھَ پر باندھتے ہیں جہاں
س ھ = سَ ھَ
تب ظاہر ہے کہ ھ ن + ھَ ن بالعموم س ن + سَ ن کے
مساوی نہیں ہے اور اس لئے ھ، ھَ کو ماسکے مان کر جو منحنی کھینچا جائیگا وہ
بالعموم ن میں سے نہیں گذریگا۔



شکل ۱۳۱

اسیطرح یہ ناقص ع ن عَ کے کسی اور نقطہ میں سے نہیں گذریگا سوائے
ع اور عَ کے [اس لئے وہ منحنی ایکدوسرے کو قطع نہیں کرینگے]
اسلئے نیا منحنی ایک اور قطع ناقص ہوگا جس کا محور اعظم ع عَ ہوگا اور جو
ناقص ع ن عَ کے بالتمام اندر یا باہر واقع ہوگا سوائے نقاط ع اور عَ پر
جہاں یہ منحنی ایکدوسرے کو مس کرینگے، اس سے معلوم ہوا کہ یہ ناقص ایک ہی
شکل کے نہیں ہیں۔
نوٹ نیا منحنی اندر واقع ہوگا اگر ھ، ھَ خط س سَ محدودہ پر واقع ہوں اور باہر ہوگا اگر
ھ، ھَ خط س سَ کے اندر ہوں۔ یہ امر ن کے اُس مقام پر غور کرنے سے ثابت ہو سکتا
ہے جبکہ ن محور اصغر پر واقع ہو یعنی رسی کے دونوں حصے س سَ کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔
۶۷- دائرہ ناقص کی انتہائی صورت ہے۔
اگر دفعہ ۶۴ کے دو ثابت نقطے ایکدوسرے پر منطبق ہوجائیں تو طریق صریحاً ر کے
نصف قطر کا ایک دائرہ ہے، اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ
اگر ایک ناقص کے ماسکے ایکدوسرے پر منطبق ہوجائیں تو ناقص ایک ایسا دائرہ

بن جاتا ہے جس کا مرکز نقطۂ انطباق پر ہوتا ہے۔

دفعہ ۶۴ کی مساوات سے بھی یہ ظاہر ہے کیونکہ اگر ثابت نقطے منطبق ہو جائیں تو ج = ۰ اور مساوات ہو جاتی ہے $لا^2 + ما^2 = ا^2$ جو نصف قطر ا کا ایک دائرہ ہے اور جس کا مرکز مبدأ پر ہے۔

نیز چونکہ ج س = ا ز اور دائرہ کی صورت میں ج س = ۰۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

دائرہ کی صورت میں خروج المرکز صفر ہوتا ہے

نیز دائرہ کیلئے $ج لا = \frac{ا}{ز} = \infty$ اور اس لئے

دائرہ کے مرتب مرکز سے غیر متناہی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۹۸۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم $ما = م لا + ج$ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ سے دو نقاط (حقیقی یا خیالی) پر ملتا ہے۔ نیز وہ شرط معلوم کرو کہ خط مذکور ناقص کو مس کرے

ان طریقوں کے نقاط مشترک معلوم کرنیکے لئے ہمیں مساواتوں

$$ما = م لا + ج \quad \text{اور} \quad \frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$$

کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

دوسری مساوات میں ما کو م لا + ج کے مساوی رکھنے سے ہمیں ذیل کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{(م لا + ج)^2}{ب^2} = ۱$

$$\text{یا} \quad لا^2 \left(\frac{۱}{ا^2} + \frac{م^2}{ب^2}\right) + \frac{۲ م ج}{ب^2} لا + \frac{ج^2}{ب^2} - ۱ = ۰$$

اس مساوات سے لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور لا کی ہر قیمت کے جواب میں مساوات $ما = م لا + ج$ سے ما کی ایک قیمت نکلتی ہے

پس خط مستقیم $ما = م لا + ج$ اور ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے دو نقاط تقاطع ہوئے۔

لا کی قیمتیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگی اگر بالترتیب

$$\frac{م^2 ج^2}{ب^4} - \left(\frac{۱}{ا^2} + \frac{م^2}{ب^2}\right)\left(\frac{ج^2}{ب^2} - ۱\right) \gtreqless ۰ \, .$$

[ٹوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۵۹]

یعنی اگر $\frac{م^2}{ب^2} + \frac{1}{ا^2} - \frac{ج^2}{ا^2 ب^2} \lesseqgtr 0$

یا اگر $ا^2 م^2 + ب^2 - ج^2 \lesseqgtr 0$

اس لئے اگر $ج = \pm \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2}$

تو یہ نقاط تقاطع ایکدوسرے پر منطبق ہونگے اس لئے خطوط

$$ما = م لا \pm \sqrt{ا^2 م^2 + ب^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

م کی تمام قیمتوں کے لئے ناقص کو مس کرتے ہیں۔ دوہری علامت یہ تعبیر کرتی ہے کہ ما = م لا کے متوازی دو مماس ہیں۔

چونکہ ناقص ایک بند منحنی ہے اسلئے ظاہر ہے کہ کوئی حقیقی خط اسکو غیر متناہی فاصلہ پر قطع نہیں کر سکتا۔ یہ امر اوپر کی مساوات درجہ دوم سے بھی ظاہر ہے کیونکہ لا میں اگر اس کی ایک اصل لا متناہی ہو تو

$$\frac{1}{ا^2} + \frac{م^2}{ب^2} = 0$$ [ٹیوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۶]

جس سے $م = \pm \frac{ب}{ا}\sqrt{-1}$ جو خیالی ہے۔

مشقیں

۳۲۔ ابتدائی اصولوں سے وہ شرط معلوم کرو کہ $ما = ۳ لا + ج$ ناقص $لا^2 + ۴ ما^2 = ۱$ کو مس کرے اور نقطہ تماس کے محدد معلوم کرو۔

۳۳۔ $لا^2 + ۴ ما^2 = ۱$ کے اُن مماسات کی مساواتیں معلوم کرو جو محور اعظم سے ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۳۴۔ $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے اُن مماسات کے نقاط تماس کے محدد معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والا خط مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۶۹۔ ثابت کرو کہ ناقص کی مساوات درجہ دوم کی مساوات ہے خواہ حوالہ کے محور کچھہ ہی ہوں اور اگر درجہ دوم کی قیمتیں حسب معمول

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2$$

ہوں تو $\text{ا}\,\text{ب} > \text{ھ}^2$

مساوات کی سادہ سے سادہ شکل $\frac{\text{لا}^2}{\text{ع}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہے اب کسی نئے محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تحویل کرنے کے لئے ہیں لا، ما کی بجائے نئے محددوں کے خطی تفاعل مندرج کرنے چاہئیں، اس لئے نئی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{ع}^2} + \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2)^2}{\text{ب}^2} = 1$$

درجہ دوم کی رقمیں $\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما})^2}{\text{ع}^2} + \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما})^2}{\text{ب}^2}$ ہیں یعنی دو مربعوں کا مجموعہ، پس جملہ $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2$ کے اجزائے ضربی خیالی ہیں اور اس لئے $\text{ا}\,\text{ب} > \text{ھ}^2$

ان دو مساواتوں کا مقابلہ کرنے سے ا، ھ، ب کی جو قیمتیں فی الحقیقت معلوم ہوں ہم ان کے لئے اس کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ $\text{ا}\,\text{ب} > \text{ھ}^2$

$$\text{ا} = \frac{\text{ل}_1^2}{\text{ع}^2} + \frac{\text{ل}_2^2}{\text{ب}^2}،\quad \text{ب} = \frac{\text{م}_1^2}{\text{ع}^2} + \frac{\text{م}_2^2}{\text{ب}^2}،\quad \text{ھ} = \frac{\text{ل}_1\text{م}_1}{\text{ع}^2} + \frac{\text{ل}_2\text{م}_2}{\text{ب}^2}$$

اسلئے $\text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^2 = \left(\frac{\text{ل}_1^2}{\text{ع}^2} + \frac{\text{ل}_2^2}{\text{ب}^2}\right)\left(\frac{\text{م}_1^2}{\text{ع}^2} + \frac{\text{م}_2^2}{\text{ب}^2}\right) - \left(\frac{\text{ل}_1\text{م}_1}{\text{ع}^2} + \frac{\text{ل}_2\text{م}_2}{\text{ب}^2}\right)^2$

$= \left(\frac{\text{ل}_1\text{م}_2 - \text{ل}_2\text{م}_1}{\text{ع}\,\text{ب}}\right)^2$ جو مربع کامل ہونیکی وجہ سے صریحاً مثبت ہے۔

۷۰۔ اگر محور قائم ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو ہم اسطرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ (لاَ، ماَ) ماسکہ ہے اور $\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} - \text{ع} = 0$ متناظر مرتب ہے۔ اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

$$\sqrt{(\text{لا} - \text{لاَ})^2 + (\text{ما} - \text{ماَ})^2} = \text{ز}\,(\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} - \text{ع})$$

یا مربع لینے سے

$$(\text{لا} - \text{لاَ})^2 + (\text{ما} - \text{ماَ})^2 = \text{ز}^2\,(\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} - \text{ع})^2$$

درجہ دوم کی رقمیں ہیں

$\text{لا}^{2}\,(\text{۱} - \text{ز}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}) - \text{۲}\,\text{لا ما ز}^{2}\,\text{جب عہ جم عہ} + \text{ما}^{2}\,(\text{۱} - \text{ز}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ})$

اسلئے حسب معمول طریق کتابت کے موافق

$\text{ا} = \text{۱} - \text{ز}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}$، $\text{ب} = \text{۱} - \text{ز}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}$، $\text{ھ} = -\,\text{ز}^{2}\,\text{جب عہ جم عہ}$

جس سے $\text{ا ب} - \text{ھ}^{2} = \text{۱} - \text{ز}^{2}$

جو ضرورتاً مثبت ہے کیونکہ ز ایک سے کم ہے۔
اسکے بعد (باب ششم میں) ہم دیکھینگے کہ اگر $\text{ا ب} > \text{ھ}^{2}$
تو مساوات $\text{ا لا}^{2} + \text{۲ ھ لا ما} + \text{ب ما}^{2} + \text{۲ گ لا} + \text{۲ ف ما} + \text{ج} = \text{۰}$
ہمیشہ ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے۔ اس جگہ ہم نے اس مسئلہ کا صرف عکس ثابت کیا ہے۔

مشق ۳۵- منحنی $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۹}} + \text{ما}^{2} = \text{۱}$ کو لو (محور قائم فرض کئے گئے ہیں) اس کی مساوات معلوم کرو جب مبدأ کو نقطہ ۱، ۱ پر منتقل کیا جائے۔ پھر دیکھو کہ جب اس کے محوروں کو °۳۰ میں سے گھمایا جائے تو اس کی مساوات کیا ہو جاتی ہے۔ اس طرح بتاؤ کہ تینوں صورتوں میں $\text{ا ب} > \text{ھ}^{2}$ اور اس سے دفعہ ۶۹ کی تصدیق کرو۔

باب چہارم پر متفرق مشقیں

۳۶- ایک ناقص کا ماسکہ س اور متناظر راس دونوں معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ محور اصغر کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے جس کا ماسکہ س پر ہے۔
[استعمال کرو ربط س ص = ع ج]

۳۷- ثابت کرو کہ خط مستقیم $\text{ل لا} + \text{م ما} = \text{۱}$ ناقص کو مس کرتا ہے بشرطیکہ $\text{ا}^{2}\,\text{ل}^{2} + \text{ب}^{2}\,\text{م}^{2} = \text{۱}$

۳۸- خط مستقیم $\text{لا} + \text{ما} = \text{۲}$ سے قطع ناقص کا جو حصہ کٹتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کے محدد معلوم کرو۔

۳۹- اگر $\text{ل لا} + \text{م ما} = \text{۱}$ قطع ناقص کو حقیقی نقاط پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ مقطوعہ کے نقطۂ تنصیف کے محدد ہیں

$$\frac{\text{ا}^{2}\,\text{ل}}{\text{ا}^{2}\,\text{ل}^{2} + \text{ب}^{2}\,\text{م}^{2}} \quad ، \quad \frac{\text{ب}^{2}\,\text{م}}{\text{ا}^{2}\,\text{ل}^{2} + \text{ب}^{2}\,\text{م}^{2}}$$

۴۰ ۔ دو دائرے ہیں جن میں سے ایک دوسرے کے بالکل اندر واقع ہے اگر ایک اور دائرہ اندرونی دائرہ کو خارجاً اور بیرونی دائرہ کو داخلاً مس کرے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک قطع ناقص ہے جس کے ماسکے دو مفروضہ دائروں کے مرکزوں پر واقع ہیں ۔ [دیکھو کہ فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہے]

۴۱ ۔ ناقص $۴\,(\text{لا} - ۱)^{۲} + ۳\,\text{ما}^{۲} = ۴$ کا خروج المرکز، اسکے وتر خاص کا طول اور اسکے ماسکوں کے محدد معلوم کرو اور ایک شکل میں منحنی کو کھینچو ۔

۴۲ ۔ اُن خطوط کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ کو خط مستقیم $\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} - \text{ع} = ۰$ اور ناقص $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کے نقاط تقاطع سے ملائیں اور اس سے دکھاؤ کہ اگر اس وتر کے مقطوعہ کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنے تو وتر ایک ایسے دائرہ کو مس کریگا جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہوگا اور جس کا نصف قطر $\frac{\text{ا ب}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}$ ہوگا ۔

۴۳ ۔ خطوط $۳\,\text{لا} + ۴\,\text{ما} + ۵ = ۰$ اور $۸\,\text{لا} + ۹\,\text{ما} - ۱۲ = ۰$ میں سے کونسا خط مبدأ کے زیادہ قریب ہے، کیا ان میں سے کوئی خط منحنی $۲\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{ما}^{۲} = ۳$ سے ملتا ہے ؟

۴۴ ۔ ایک رسی کا حلقہ اسطوانہ کی شکل کے دو کیلوں اور ایک پنسل کے گرد ہو کر گزرتا ہے، اسطوانوں کے ابعاد کو ملحوظ رکھکر اور یہ فرض کرکے کہ ان کے نصف قطر مساوی ہیں ثابت کرو کہ اگر رسی کو تانے رکھا جائے اور پنسل کو حرکت، دی جائے تو اس کا سرا ایک ناقص کو مرتسم کریگا بشرطیکہ یہ عین پنسل کے مرکز پر ہو ۔

۴۵ ۔ ناقص کے ایک وتر ن نَ کا نقطہ تنصیف ص ہے، ص ک مرتب پر عمود ہے اور س متناظر ماسکہ ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{س ن} + \text{س نَ} = ۲\,\text{ز} \times \text{ص ک}$$

اس سے حاصل کرو کہ ایک ایسے وتر کے نقطہ تنصیف کا طریق جس کے سروں کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو ایک ایسا خط ہے جو محور اصغر کے متوازی ہے ۔

۴۶ ۔ اگر س، سَ ایک ناقص کے ماسکے ہوں اور ن کوئی نقطہ منحنی پر ہو تو ثابت کرو کہ $\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ن س سَ}\;\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ن سَ س} = \frac{۱ - \text{ز}}{۱ + \text{ز}}$

برعکس اسکے اگر ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کے نیم زاویوں کے مماسوں کا حاصلضرب دونوں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا راُس ایک ایسے ناقص پر واقع ہوتا ہے جس کے ماسکے قاعدہ کے سرے ہیں۔

[ربط مس $\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ن}\,(\text{ن} - \text{ا})}}$ کو استعمال کرو]

۴۷۔ ذیل کے ناقصوں کے خروج المرکز، ماسکے اور مرتب معلوم کرو

(۱) $\text{لا}^2 + ۴\,\text{ما}^2 = ۶\,\text{لا}$ (۲) $۴\,\text{لا}^2 + ۴\,\text{ما}^2 = ۵\,\text{لا}$

۴۸۔ اگر مستقل طول کی ایک سلاخ اسطرح حرکت کرے کہ اس کے سرے ہمیشہ دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم پر رہیں تو اس پر کا کوئی نقطہ ایک ناقص مرتسم کریگا۔

۴۹۔ مخروطی تراش $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ز}^2\,(\text{لا جم ع} + \text{ما جب ع} - \text{ع})^2$ کے ماسکوں کے محدد اور اس کے مرتبوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۵۰۔ قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے ناقص کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گذرے جس کا خروج المرکز $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ہو اور جس کا ماسکہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۱\,\text{لا} = ۰$ پر کے کسی نقطہ پر ہو جہاں متناظر مرتب کی مساوات $\text{لا} + \text{ما} - ۱ = ۰$ ہے

۵۱۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کی مساوات معلوم کرو جبکہ نقطہ $(-\text{ا}، ۰)$ کو مبدأ قرار دیا جائے اور محوروں کی سمتیں نہ بدلیں۔

اس سے حاصل کرو کہ مساوات $\text{ما}^2 = ۲\,\text{ف لا} + \text{ق لا}^2$ ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر ق منفی ہو نیز ثابت کرو کہ وترخاص کا طول ۲ ف ہے اور خروج المرکز $\sqrt{۱ - \text{ق}}$ ہے اگر ق = ۰ تو مساوات کیا تعبیر کرتی ہے۔

۵۲۔ اگر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ پر کے دو نقاط ن اور ق کے فصلے لا_1، لا_2 ہوں اور محور اعظم پر دو نقطے ن_1، ق_1 ایسے لئے جائیں کہ ان کے فصلے ز لا_1، ز لا_2 ہوں تو ثابت کرو کہ $\text{ن ق}_1 = \text{ن}_1\,\text{ق}$

باب پنجم

قطع زائد

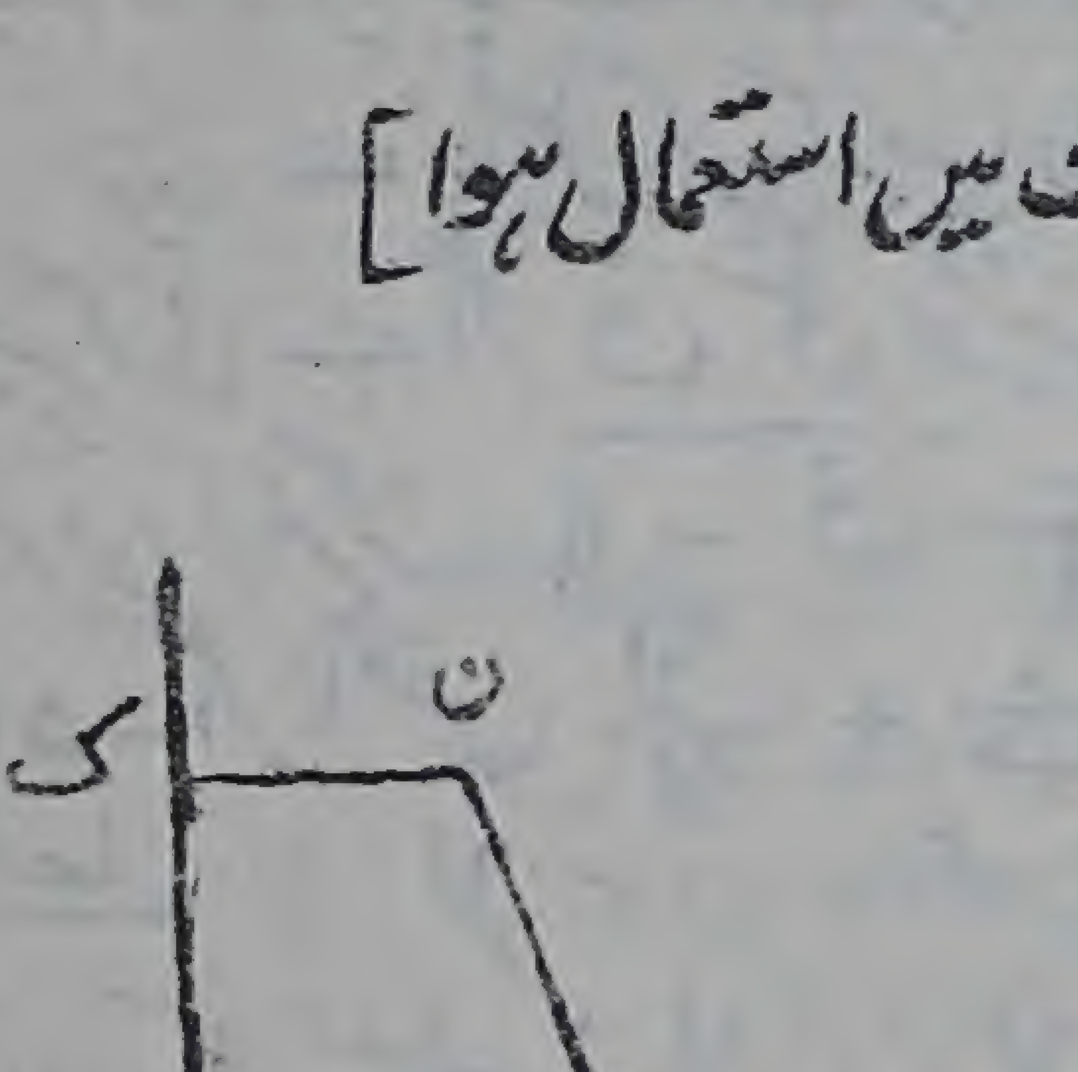
۷۱ — قطع زائد — تعریفات — قطع زائد ایک ایسے متحرک نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے (جو ایک سے بڑی ہوتی ہے) اُس عمودی فاصلہ کے ساتھ جو نقطہ مذکورہ اور ایک ثابت خط مستقیم کے درمیان ہے۔

ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں اور ثابت خط مستقیم کو مرتب اور مستقل نسبت **خروج المرکز** کہلاتی ہے، قطع زائد کی صورت میں یہ مستقل نسبت یعنی خروج المرکز ز ایک سے بڑی ہوتی ہے۔

۷۲ — قطع زائد کی مساوات

[طریقہ بالکل وہی ہے جو ناقص کی صورت میں استعمال ہوا]

فرض کرو کہ س ماسکہ ہے اور لا ک متناظر مرتب ہے، س سے س لا مرتب پر عمود نکالو۔
لا کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ س کے محدود (د، ۰) ہیں، تب جیسا قطع ناقص کی صورت (دفعہ ۵۴) میں عمل ہوا۔



شکل ۳۲

س ن = ز × ن ک

∴ س $ن^{2}$ = $ز^{2}$ × ن $ک^{2}$

$$\therefore (لا - د)^۲ + ما^۲ = ز^۲ لا^۲$$

$$یا\ لا^۲ (۱ - ز^۲) + ما^۲ - ۲ د لا + د^۲ = ۰$$

فرق صرف یہ ہے کہ اس جگہ $ز > ۱$

۷۳ — قطع زائد کی مساوات کی تحویل شکل $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ میں

[طرز عمل وہی ہے جو ناقص کے لئے]

جو مساوات دفعہ ۷۲ میں معلوم ہوئی اُسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(۱ - ز^۲)\left\{لا^۲ - ۲ لا \times \frac{د}{۱ - ز^۲}\right\} + ما^۲ + د^۲ = ۰$$

یا بلحاظ لا کے مربع کامل بنانے سے

$$(۱ - ز^۲)\left\{لا - \frac{د}{۱ - ز^۲}\right\}^۲ + ما^۲ + د^۲ = \frac{د^۲}{۱ - ز^۲}$$

لیکن چونکہ $ز > ۱$ اس لئے ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں

$$(ز^۲ - ۱)\left\{لا + \frac{د}{ز^۲ - ۱}\right\}^۲ - ما^۲ - د^۲ = \frac{د^۲}{ز^۲ - ۱}$$

اگر نقطہ $\left(-\frac{د}{ز^۲ - ۱} ، ۰\right)$ کو نیا مبدأ قرار دیا جائے تو

$$(ز^۲ - ۱) لا^۲ - ما^۲ = \frac{د^۲}{ز^۲ - ۱} + د^۲ = \frac{د^۲ ز^۲}{ز^۲ - ۱}$$ [حصہ اول دفعہ ۳۱]

$$یا\ لا^۲ - \frac{ما^۲}{ز^۲ - ۱} = \frac{د^۲ ز^۲}{(ز^۲ - ۱)^۲}$$

اب رکھو $\frac{د^۲ ز^۲}{(ز^۲ - ۱)^۲} = ا^۲$

طرفین مساوات کو $ا^۲$ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ا}^{۲}(\text{ز}^{۲} - ۱)} = ۱$$

اور $\text{ا}^{۲}(\text{ز}^{۲} - ۱)$ کو $\text{ب}^{۲}$ کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

نتیجہ صریح ۔ $\text{ز}^{۲} = ۱ + \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$

مثال ۔ اُس قطع زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا مرتب $۲\text{لا} + \text{ما} = ۱$ ہو، ماسکہ $(۱، ۲)$ اور خروج المرکز $\sqrt{۳}$

اگر نقطہ ن $(\text{لا}، \text{ما})$ منحنی پر واقع ہو تو

$$\text{س ن}^{۲} = (\text{لا} - ۱)^{۲} + (\text{ما} - ۲)^{۲}$$

ن ک = اُس عمود کا طول جو $(\text{لا}، \text{ما})$ سے خط $۲\text{لا} + \text{ما} - ۱ = ۰$ پر کھینچا جائے

$$= \frac{۲\text{لا} + \text{ما} - ۱}{\sqrt{۵}}$$

اس لئے مساوات مطلوبہ ہے $(\text{لا} - ۱)^{۲} + (\text{ما} - ۲)^{۲} = \frac{۳}{۵}(۲\text{لا} + \text{ما} - ۱)^{۲}$ چونکہ $\text{ز}^{۲} = ۳$

یا تحویل کے بعد $۷\text{لا}^{۲} + ۱۲\,\text{لا ما} - ۲\text{ما}^{۲} - ۲\text{لا} + ۱۴\text{ما} - ۲۲ = ۰$

مشقیں

۱۔ اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(۰، ۲)$ ہو، مرتب $\text{لا} + \text{ما} = ۱$ اور خروج المرکز $\sqrt{۲}$ ۔

۲۔ اگر زائد کا ماسکہ $(\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}، ۰)$ ہو، مرتب $\text{لا} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}$ اور خروج المرکز $\frac{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}{\text{ا}}$ تو ثابت کرو کہ

اس کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہے۔

۳۔ اگر ایک زائد کا ماسکہ مبدأ پر ہو، مرتب $\text{لا} + 2 = 0$ اور خروج المرکز 2 ہو تو اسکی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ ذیل کی ہر ایک مساوات قطع زائد کو تعبیر کرتی ہے ان کے نصف محوروں کے طول معلوم کرو

$$\text{لا}^2 - \frac{\text{ما}^2}{2} = 1 ، \quad \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{ما}^2}{3} = 2$$

$3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{ما}^2 = 5$ ، $\text{ا}\,\text{لا}^2 - \text{ب}\,\text{ما}^2 = \text{ج}$ (جہاں ا، ب، ج مثبت ہیں)

[ہر مساوات کو شکل $\frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}^2} = 1$ میں تحویل کرنا چاہئے۔ یعنی

اگر $2\,\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = 3$ تو $\frac{2}{3}\text{لا}^2 - \frac{\text{ما}^2}{3} = 1$ یا $\frac{\text{لا}^2}{\frac{3}{2}} - \frac{\text{ما}^2}{3} = 1$ یہ مساوات ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے جس کے نصف محور $\sqrt{\frac{3}{2}}$ اور $\sqrt{3}$ ہیں]

۵۔ مشق ۴ میں جو زائد دئے گئے ہیں ان کے خروج المرکز معلوم کرو

[استعمال کرو $\text{ژ}^2 = 1 + \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$]

۴۷۔ **منحنی کی شکل**۔ جیسا دفعہ ۵۶ قطع ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ سے ہمیں منحنی کی شکل کا اچھا اندازہ ہوسکتا ہے۔

مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^2 = \text{ب}^2\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - 1\right)$$

چونکہ ما^2 لازماً مثبت ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}$ ایک سے کم نہیں

ہوسکتا یعنی لا تعداداً ا سے کم نہیں ہوسکتا۔

نیز $لا^2 = ا^2 \left(1 + \frac{ما^2}{ب^2}\right)$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی قیمت پر کوئی قید نہیں، فی الحقیقت ما کی قیمت کچھ ہی ہوسکتی ہے، نیز مساواتوں

$$ما = \pm \frac{ب}{ا} \sqrt{لا^2 - ا^2} \quad \text{اور} \quad لا = \pm \frac{ا}{ب} \sqrt{ما^2 + ب^2}$$

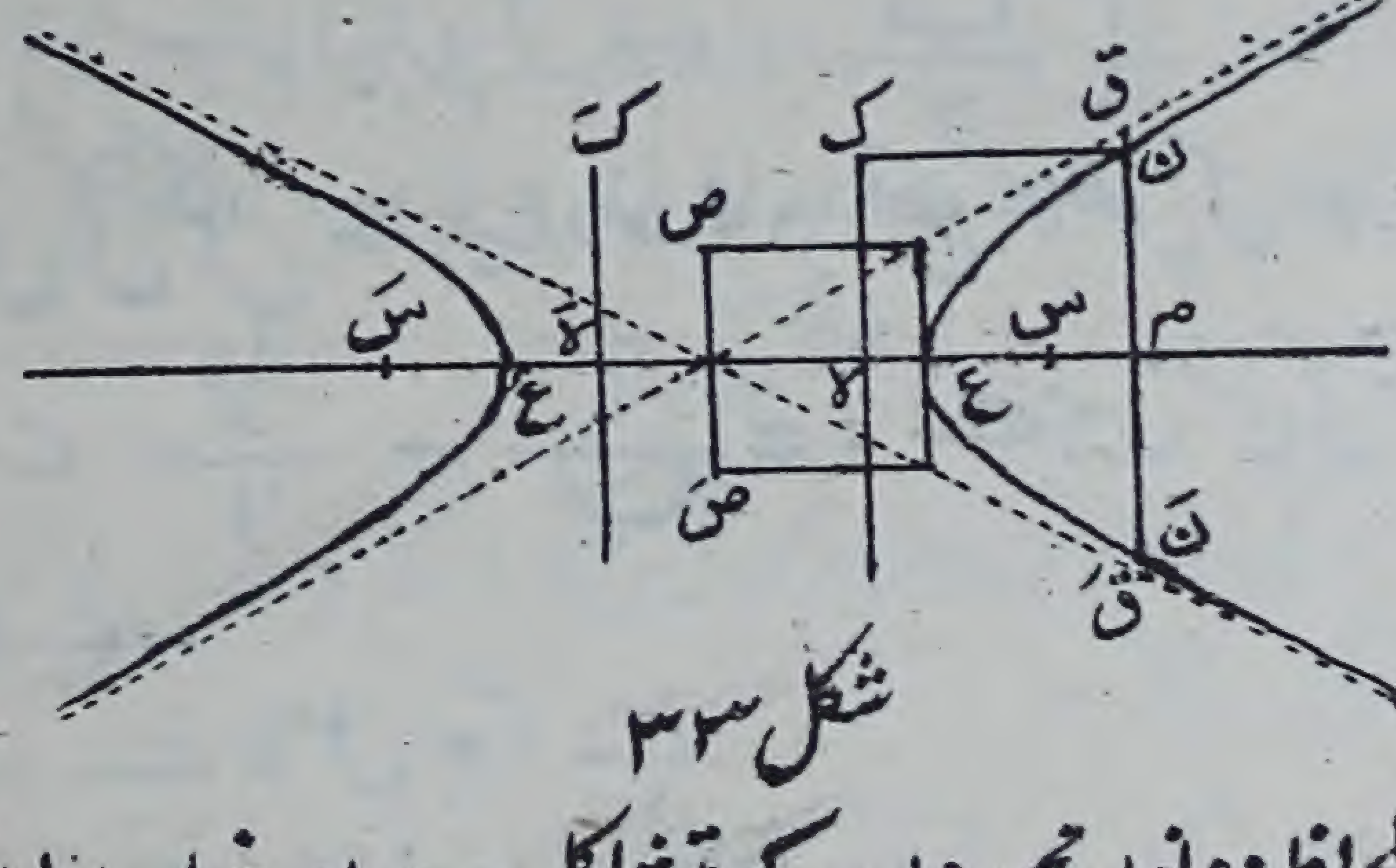
سے ہم یہ نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(۱) لا تعداداً ا سے کم نہیں ہوسکتا

(۲) لا = ± ا سے حاصل ہوتا ہے ما = ۔

(۳) لا کی کسی ایسی قیمت کے جواب میں جو ا سے بڑی ہو ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۴) ما کی کسی قیمت کے جواب میں لا کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ۔



شکل ۳۲

اس لئے منحنی بلحاظ دونوں محوروں کے متشاکل ہے اور خطوط لا = + ا اور لا = - ا کے بالتمام باہر واقع ہے۔

ہر ایک ایسے وتر کی تنصیف جو ایک محور کے متوازی ہو دوسرے محور پر ہوتی ہے ۔

اگر نقاط ع اور عَ محور لا پر ایسے لئے جائیں کہ

ج ع = ج عَ = ا

اور ص، صَ محور ما پر ایسے لئے جائیں کہ

ج ص = ج صَ = ب

تو ع عَ اور ص صَ کو محاور کہتے ہیں ۔ بعض اوقات انہیں بالترتیب محور اعظم اور محاور اصغر کہتے ہیں جیسا ناقص کی صورت میں، لیکن یہ ضروری فرق ملحوظ رکھنا چاہئے کہ ناقص میں ص اور صَ منحنی پر واقع ہوتے ہیں لیکن زائد کی صورت میں یہ منحنی پر واقع نہیں ہوتے ۔ اس لئے ع عَ کو عام طور پر قاطع محور کہتے ہیں اور ص صَ کو مزدوج محور ۔

علاوہ اس کے چونکہ ب^2 = ا^2 (ز^2 − ۱) اس لئے جب ز > $\sqrt{۲}$ تو ب > ا اس لحاظ سے محور ص صَ کے لئے محور اصغر کا نام موزوں نہیں ۔

ج کو حسب سابق مرکز کہتے ہیں ۔

زائد کی شکل ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس کی قطبی مساوات استعمال کرنی چاہئے، اگلی دفعہ میں ہم یہ مساوات معلوم کرینگے ۔

۷۵ ۔ زائد کی قطبی مساوات جبکہ مرکز قطب ہو ۔

اگر مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ میں لا = ر جم طہ اور ما = ر جب طہ لکھا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$= \frac{۱}{\text{ا}^2} - \text{جب}^2\,\text{طہ}\left(\frac{۱}{\text{ا}^2} + \frac{۱}{\text{ب}^2}\right)$$

اور یہ مطلوبہ قطبی مساوات کی دو مختلف شکلیں ہیں ۔

۷۶ ۔ منحنی کی شکل کا اس کی قطبی مساوات سے حاصل کرنا ۔

اگر زاویہ طہ = ۰ تو ر = ± ا، جیسے طہ بڑھتا ہے $\frac{۱}{ر}$ تعداداً کم ہوتا ہے یعنی منحنی مرکز ج سے لگاتار دور ہوتا جاتا ہے، ر غیر متناہی ہوتا ہے

جب $\frac{۱}{ر} = ۰$ یعنی جب $\frac{\text{جم}^۲ \text{طہ}}{ا^۲} = \frac{\text{جب}^۲ \text{طہ}}{ب^۲}$ یا مس طہ = $\frac{ب}{ا}$

پس وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{ب}{ا}$ بناتا ہے وہ منحنی سے لاانتہا فاصلے پر ملتا ہے۔

اس لئے منحنی کے اُس حصہ کی شکل جو مثبت ربع میں واقع ہے ایسی ہے جیسی شکل میں دکھائی گئی ہے۔ سمتی نیم قطر طول میں بڑھتا ہے جیسے اسکی سمت خط طہ = مس$^{-۱}$ $\frac{ب}{ا}$ کے قریب پہنچتی جاتی ہے، نیز چونکہ منحنی باقی ربعات میں بھی متشاکل ہے اُس لئے اسے ہم مکمل طور پر کھینچ سکتے ہیں۔

یہ غور سے دیکھا جائے کہ $\frac{۱}{ر^۲}$ زاویہ طہ کی اُن قیمتوں کے لئے منفی ہے جن کے لئے مس طہ تعداداً $\frac{ب}{ا}$ سے بڑا ہے یعنی $\frac{۱}{ر^۲}$، طہ کی اُن قیمتوں کے لئے منفی ہے جو مس$^{-۱}$ $\frac{ب}{ا}$ اور اس کے تکمل کے درمیان واقع ہوتی ہیں پس طہ کی اُن قیمتوں کے جواب میں جو دو خط حاصل ہوتے ہیں اُن کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ واقع نہیں ہوتا کیونکہ اِن حدود کے اندر ر کی قیمتیں خیالی ہیں [ملاحظہ ہو شکل ۳۳]

طہ کی وہ قیمتیں جن میں سے ہر ایک کے لئے ر کی قیمت غیر متناہی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$\text{مس طہ} = \pm \frac{ب}{ا}$$

مرکز میں سے گذرنے والے اُن خطوط کو جو منحنی سے غیر متناہی فاصلہ پر ملتے ہیں متقارب کہتے ہیں، یاد رہے کہ یہ متقارب کی باقاعدہ تعریف نہیں ہے، ہم اسے آگے چلکر بیان کرینگے۔

۷۷۔ ناقص اور زائد کی خاصیتوں کا مقابلہ۔

اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں خاص مشابہت پائی جاتی ہے

تاہم طالب علم کو چاہئے کہ ان کے امتیازی فرق کو بھی پیش نظر رکھے۔
(۱) ناقص بند منحنی ہے اور زائد دونوں طرف لاانتہا فاصلہ تک پھیلتا ہے -
(۲) ناقص ہر دو محاور سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے لیکن زائد صرف ایک محور سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے -
(۳) ناقص کی صورت میں مرکز اور ماسکہ متناظر مرتب کے ایک ہی جانب واقع ہوتے ہیں لیکن زائد میں متقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں -

مثال ۱ — ایک قطع زائد کے قاطع اور فزدوج محور بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، ان سمتی قطروں کے طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ زاویے ۳۰° اور ۶۰° بناتے ہیں -

قطبی مساوات ہے $\frac{1}{ر^2} = \frac{\text{جم}^2 طہ}{ا^2} - \frac{\text{جب}^2 طہ}{ب^2}$ ، جب زاویہ طہ = ۳۰° تو

$$\frac{1}{ر^2} = \frac{\frac{3}{4}}{9} - \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48} \quad \text{یا} \quad ر = 4\sqrt{3}$$

جب زاویہ طہ = ۶۰° تو $\frac{1}{ر^2} = \frac{\frac{1}{4}}{9} - \frac{\frac{3}{4}}{4} = -\frac{23}{144}$ یا $ر = \sqrt{-\frac{144}{23}}$

موخرالذکر صورت میں ر خیالی ہے اور یہ ہونا بھی چاہئے کیونکہ متقارب محور اعظم کے ساتھ زاویہ مسق$^{-1}\frac{2}{3}$ بناتا ہے اور یہ ۶۰° سے کم ہے اسلئے دوسرا خط منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا -

مثال ۲ — قطع زائد میں اگر کوئی دو سمتی نیم قطر علی القوائم لئے جائیں تو انکے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے -

یہاں بھی جیسے ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا اگر نیم قطروں کے سرے (ر، طہ)

اور $(ر', طہ + \frac{\pi}{2})$ ہوں تو

$$\frac{1}{\text{ر}_1^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2}$$

اور
$$\frac{1}{\text{ر}_2^2} = \frac{\text{جم}^2\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{2}\right)}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{2}\right)}{\text{ب}^2} = \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ر}_1^2} + \frac{1}{\text{ر}_2^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{1}{\text{ب}^2}$$

لیکن یاد رہے کہ ر_1 اور ر_2 میں سے کوئی ایک یا دونوں خیالی ہو سکتے ہیں۔

مشقیں

۶- ایک ہی شکل میں ذیل کے منحنیات کو کھینچو (۱) $\frac{\text{لا}^2}{9} - \text{ما}^2 = 1$
(۲) $4\,\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = 1$ (۳) $4\,\text{لا}^2 - 9\,\text{ما}^2 = 1$

۷- مشق ۶ کے منحنیات میں سے ہر ایک کے اُن سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو قاطع محور کے ساتھ زاویے ۳۰° اور ۴۵° بنائیں۔

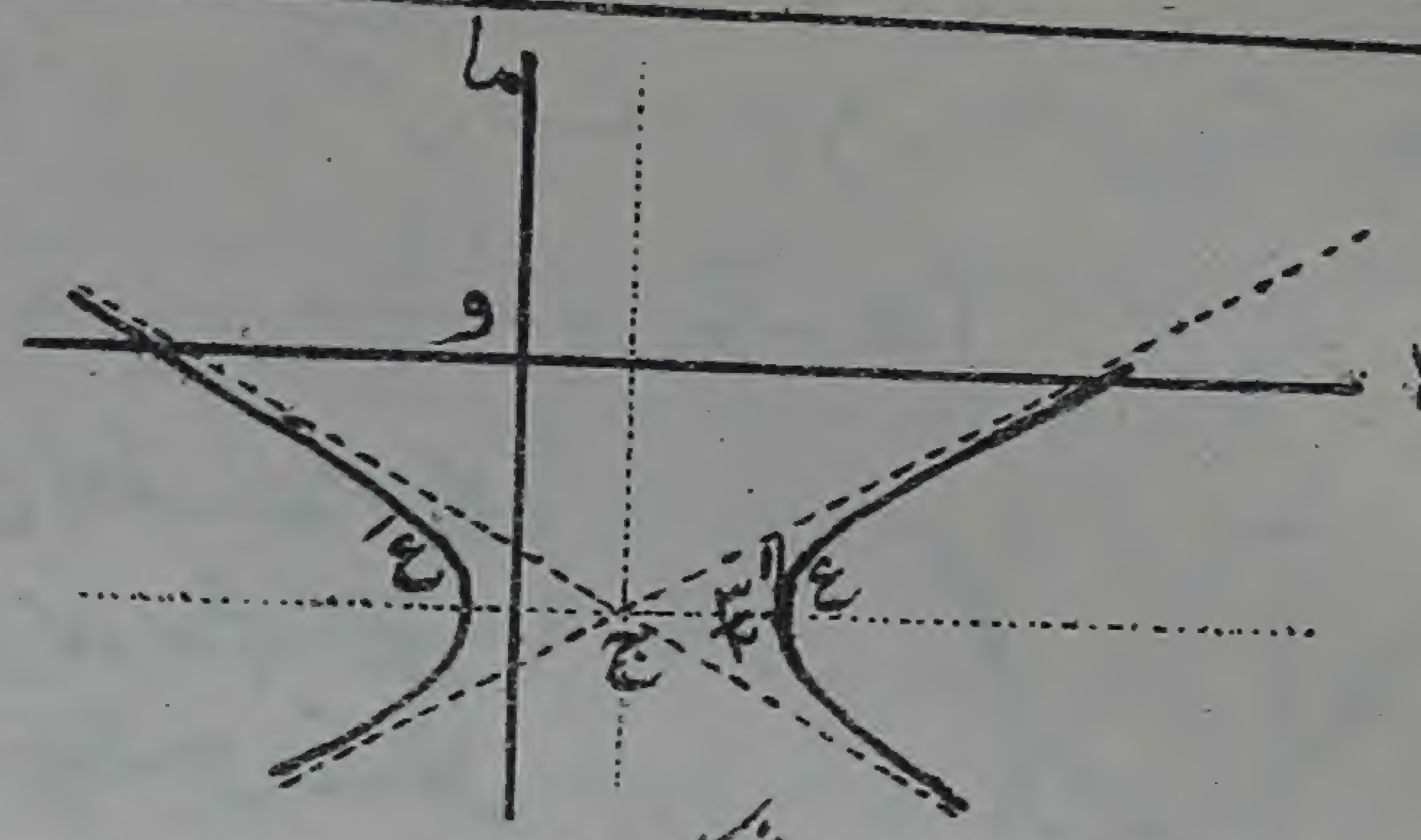
۸- ایک ہی شکل میں $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = 9$ ، $\text{لا}^2 - 4\,\text{ما}^2 = 1$ کو مرتسم کرو، انکا مشترک سمتی نیم قطر محور لا سے جو زاویہ بناتا ہے اس کا مماس اور نیز اس مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔

۸۷- زائد کی مساوات بلحاظ اُن محوروں کے جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

اب ہم زائدوں کے کھینچنے کی چند توضیحی مثالیں حل کرینگے جبکہ حوالہ کے محور منحنی کے محوروں کے متوازی ہوں لیکن ان پر منطبق نہ ہوں (مقابلہ کرو دفعہ ۵۷)

مثال ۱- زائد $4(\text{لا} - 1)^2 - 9(\text{ما} + 3)^2 = 9$ کو مرتسم کرو۔
یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{(\text{لا} - 1)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(\text{ما} + 3)^2}{1} = 1$$



شکل ۳۴

مبدأ کو نقطہ (۱، -۳) پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{(\frac{3}{2})^2} - \frac{\text{ما}^2}{1} = 1$$

اور یہ قطع زائد کی مساوات ہے جس کے نیم محوروں کے طول ۳/۲ اور ۱ ہیں منحنی کو شکل ۳۴ میں مرتسم کیا گیا ہے۔
منحنی ابتدائی محور لا سے ملتا ہے جہاں ما = ۰ اور ۴(لا - ۱)² = ۹ + ۱ یا لا = ۱ ± ۳/۴ ۴ تقریباً

منحنی ابتدائی محور ما سے ملتا ہے جہاں لا = ۰ اور ۹(ما + ۳)² = ۴ - ۹ = -۵ (خیالی نقاط پر)

طالب علم کو چاہئے کہ لا یا ما کو اور قیمتیں دینے سے منحنی پر اور نقاط معلوم کرے جیسے دفعہ ۳۴ میں۔

مثال ۲۔ منحنی ۹ لا² - ۲ ما² - ۱۸ لا - ۴ ما + ۲۵ = ۰ کو مرتسم کرو۔
(دفعہ ۵۷ مثال ۲ کی مانند) رقموں کو اس طرح اکٹھا کرنے سے کہ لا² اور لا والی رقمیں ایک مربع کامل بنائیں اور ما² اور ما والی رقمیں ایک الگ مربع کامل بنائیں ہمیں حاصل ہو گا

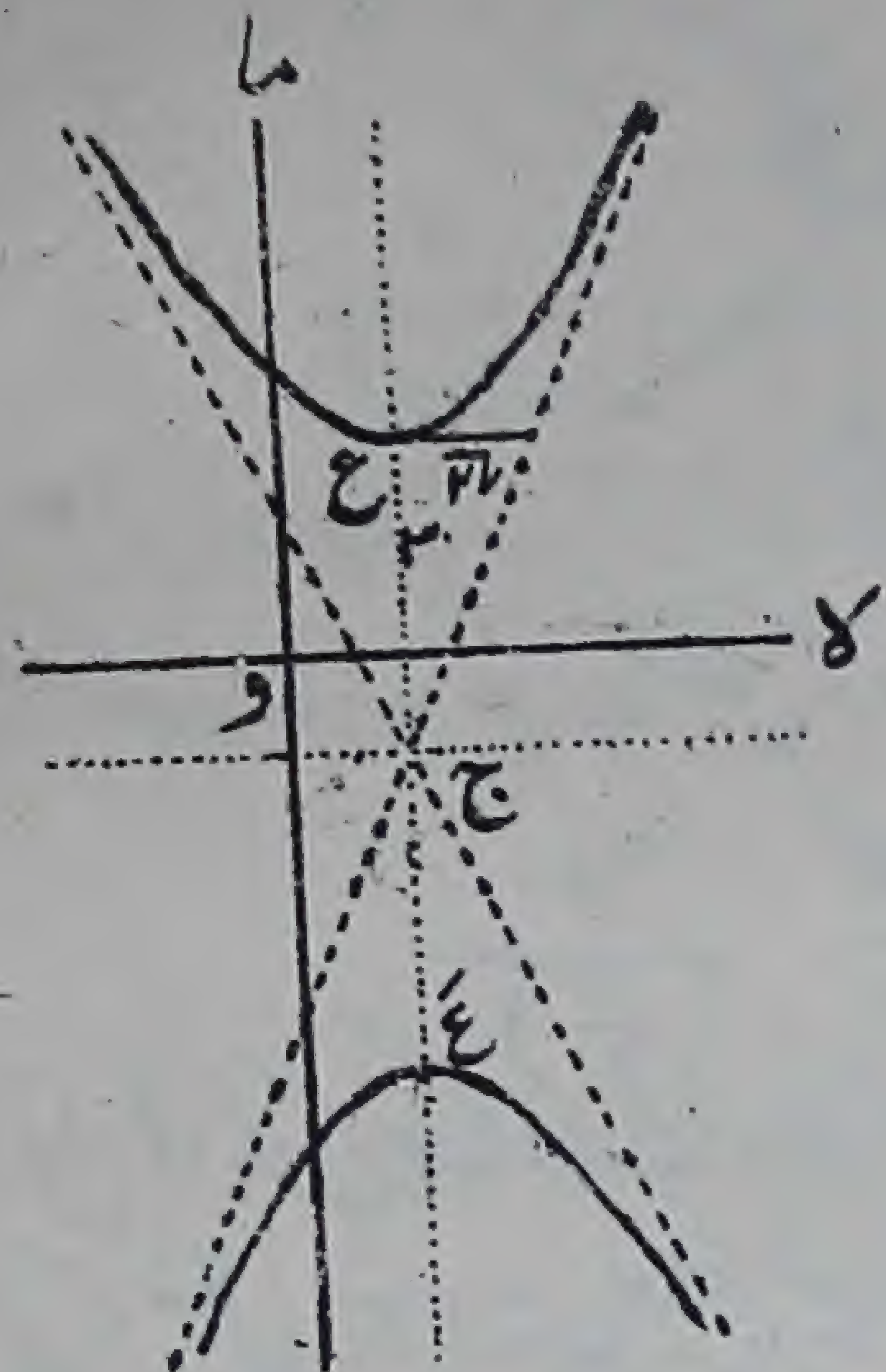
$$9(\text{لا}^2 - 2\,\text{لا} + 1) - 2(\text{ما}^2 + 2\,\text{ما} + 1) + 18 = 0$$

$$\text{یا}\quad 9(\text{لا} - 1)^2 - 2(\text{ما} + 1)^2 = -18$$

$$\text{یا}\quad \frac{(\text{ما}+1)^2}{9} - \frac{(\text{لا}-1)^2}{2} = 1$$

مبدا کو نقطہ (۱، −۱) پر منتقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ما^{۲}}{۹} - \frac{لا^{۲}}{۲} = ۱$$



شکل ۳۵

اس لئے منحنی قطع زائد ہے جس کا قاطع محور نئے محور ما پر منطبق ہوتا ہے اور جس کے نیم محوروں کے طول ۳، $\sqrt{۲}$ ہیں۔

ابتدائی محوروں پر مقطوعے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$۹ لا^{۲} - ۱۸ لا + ۲۵ = ۰ ، \quad -۲ ما^{۲} - ۴ ما + ۲۵ = ۰$$

اول الذکر خیالی ہیں اور موخر الذکر $-۱ \pm \sqrt{\frac{۲۷}{۲}}$

یا $-۱ \pm ۳٫۷$ ہیں تقریباً

مشقیں

منحنیات ذیل کو مرتسم کرو

۹۔ $$\frac{(لا - ۱)^{۲}}{۹} - \frac{(ما + \frac{۱}{۲})^{۲}}{۴} = ۱$$

۱۰۔ $$(لا + ۱)^{۲} - ۴ (ما - ۳)^{۲} = ۸$$

۱۱۔ $$۴ لا^{۲} - ما^{۲} + ۱۶ لا + ۲ ما - ۱۳ = ۰$$

۱۲۔ $$۹ لا^{۲} - ما^{۲} - ۱۸ \sqrt{۳} لا + ۳۶ = ۰$$

۱۳ – ۱۶ مشق ۹ تا ۱۲ میں جتنے منحنی دئے گئے ہیں ان کے خروج المرکز معلوم کرو، نیز ابتدائی محوروں کے لحاظ سے قاطع محوروں کے سروں کے

محدد معلوم کرو۔

۷۹۔ قطع زائد ایک دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب رکھتا ہے۔
چونکہ منحنی بلحاظ محوروں کے متشاکل ہے اس لئے اگر ہم قطع کریں ج سَ = ج س (شکل ۳۳) اور ج لَا = ج لا اور لَا کَ کو ع ج عَ پر عمود وار کھینچیں تو جیسا ہم نے ناقص کی صورت میں دیکھا سَ زائد کا دوسرا ماسکہ ہے اور لَا کَ متناظر مرتب۔ خروج المرکز دونوں ماسکوں کے لئے ایک ہی ہے۔

انتباہ۔ یہ غور سے دیکھا جاوے کہ زائد کی دو مختلف شاخیں دو مختلف منحنی نہیں ہیں، بلکہ دونوں شاخیں ایک اور صرف ایک ہی منحنی بناتی ہیں، کسی ماسکہ اور اس کے متناظر مرتب کی مدد سے ہم صرف وہی شاخ نہیں حاصل کرسکتے جو اس ماسکہ کے گرد واقع ہے بلکہ ان کی مدد سے ہم دونوں شاخیں حاصل کرسکتے ہیں۔

۸۰۔ ثابت کرو کہ ج س = ز ا، ج لا = ا/ز

چونکہ ع اور عَ منحنی پر واقع ہیں اس لئے

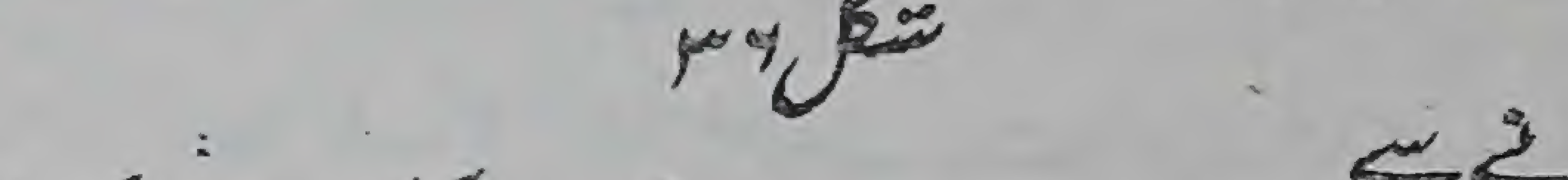
س ع = ز × ع لا، س عَ = ز × عَ لا

جمع کرنے سے س ع + س عَ = ز (ع لا + عَ لا) یا سَ عَ + س عَ = ز (ع لا + عَ لا)

∴ س سَ = ز × ع عَ

اب چونکہ س سَ = ۲ ج س اور ع عَ = ۲ ج ع

اس لئے ج س = ز × ج ع .... (۴)



شکل ۳۶

نیز تفریق کرنے سے

س عَ - س ع = ز (عَ لا - ع لا) = ز (عَ لَا - عَ لَا) یا ع عَ = ز × لا لَا

یعنی ج ع = ز × ج لا .... (۵)

نتیجہ صریح۔ ج س × ج لا = ا² .... (۶)

۸۱ – وتر خاص۔ تعریف وتر خ س خَ جو ماسکہ میں سے محور پر عمود وار کھینچا جائے وتر خاص کہلاتا ہے۔

نیم وتر خاص = ب²/ا .... (۷)

ثبوت بالکل ویسا ہے جو ناقص کی صورت میں دیا گیا (دفعہ ۶۴)

مثال۔ ایک زائد کا ماسکہ (۱، ۱) ہے، مرتب ۳ لا + ۴ ما – ۳۲ = ۰ اور خروج المرکز ۳، اس کی مساوات معلوم کرو، نیز قاطع محور کے سروں کے محدد، مرکز اور دوسرے ماسکہ کے محدد معلوم کرو نیم محوروں کے طول بھی معلوم کرو۔

مربع لینے سے مساوات بآسانی شکل ذیل میں آجاتی ہے

۲۵ {(لا – ۱)² + (ما – ۱)²} = ۹ (۳ لا + ۴ ما – ۳۲)²

تحویل کے بعد ۵۶ لا² + ۲۱۶ لا ما + ۱۱۹ ما² – ۱۶۷۸ لا – ۲۲۵۴ ما + ۹۱۶۶ = ۰

جیسا ہم نے مثال دفعہ ۶۲ میں دیکھا س لا کی مساوات ہے (معیاری صورت میں)

۴ لا – ۳ ما – ۱ = ۰

اور اس لئے نقطہ لا ہے (۴، ۵)، اب ع اور عَ خط س لا کو داخلاً اور خارجاً نسبت ۳ : ۱ سے تقسیم کرتے ہیں، اس لئے ضابطہ کی مدد سے

ع ہے (۱۳/۴، ۴) اور عَ ہے (۱۱/۲، ۷)

مرکز ع عَ کا نقطہ تنصیف ہے اس لئے اس کے محدد ہیں (۳۵/۸، ۱۱/۲)

نیز چونکہ مرکز س سَ کا نقطہ تنصیف ہے اس لئے ہم بآسانی سَ کے محدد (۳۱/۴، ۱۰) حاصل کر سکتے ہیں۔

نیز $۴ اُ^۲ = ع ع'^۲ = \left(\frac{۱۱}{۲} - \frac{۱۳}{۴}\right)^۲ + (۷ - ۴)^۲ = \left(\frac{۱۵}{۴}\right)^۲$

اس لئے $ا = \frac{۱۵}{۸}$ اور $ب = ا\sqrt{ز^۲ - ۱} = \frac{۱۵}{۸} \times ۲\sqrt{۲} = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۲}$

مشقیں

۱۷- ایک قطع زائد کے نیم محور ۴ اور ۷ ہیں، موخرالذکر مزدوج نیم محور ہے۔ اس کا وتر خاص، خروج المرکز، ماسکوں کا فاصلہ مرکز سے اور مرتبوں کا فاصلہ مرکز سے دریافت کرو۔

۱۸- اگر س لا = د تو ثابت کرو کہ نیم وتر خاص یعنی ل = د ز

اگر ماسکہ (۱، ۱) ہو، مرتب $۵ لا + ۱۲ ما + ۹ = ۰$ اور خروج المرکز ۲ تو وتر خاص معلوم کرو۔

۱۹- مشق ۱۸ کے زائد کے نیم محور معلوم کرو۔

۲۰- زائد $\frac{لا^۲}{۳} - \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ میں اُن سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو قاطع محور کے ساتھ ۳۰° اور ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں۔

۲۱- اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (−۱، ۱) ہے، متناظر مرتب $لا + ما - ۲ = ۰$ اور خروج المرکز $\sqrt{۵}$ ہے

نیز اس زائد کا وتر خاص معلوم کرو۔

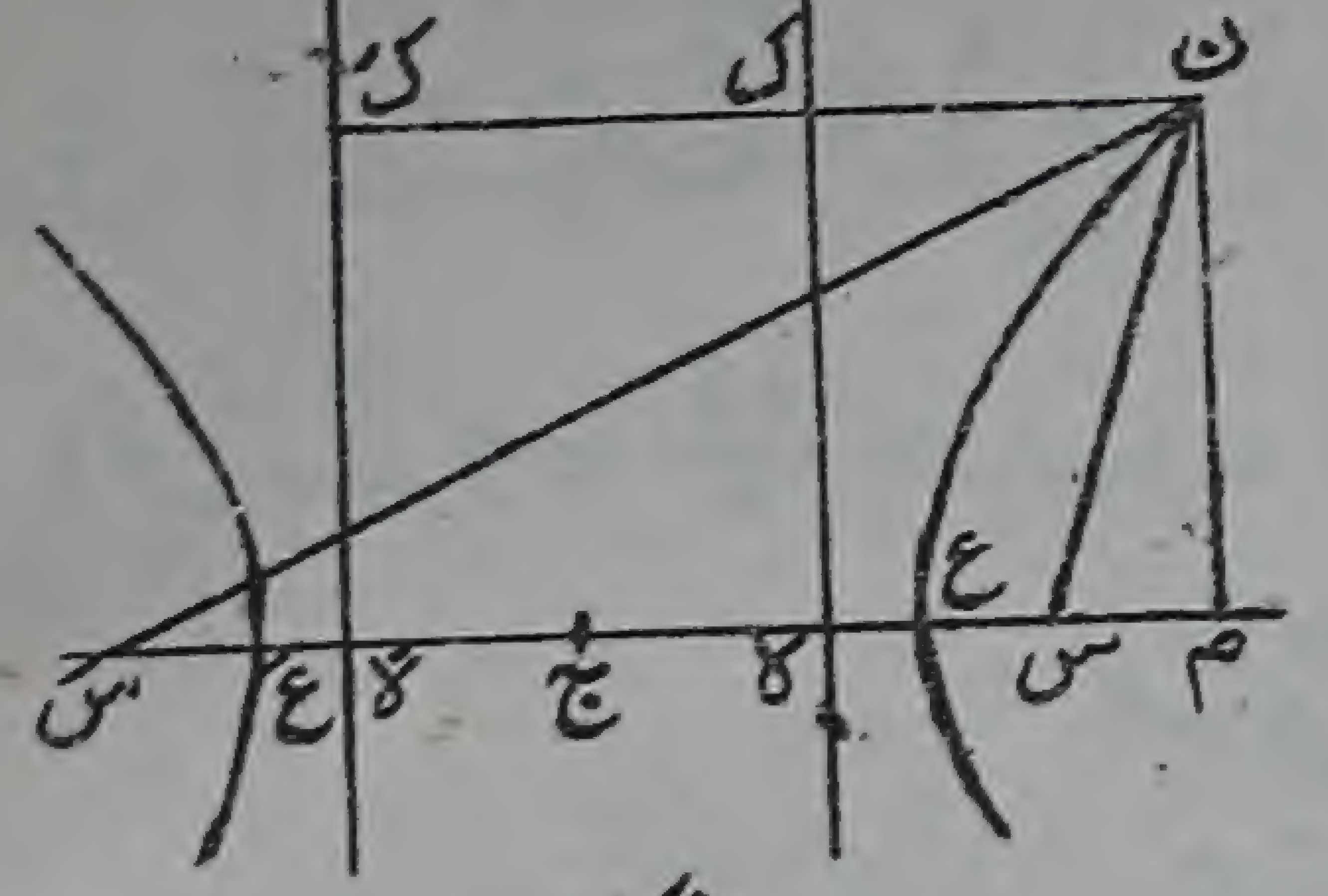
۲۲- ثابت کرو کہ $ل = ا(ز^۲ - ۱)$

۲۳- وہ منحنی کھینچو جس کی مساوات $۲ لا^۲ - ۳ ما^۲ = ۵$ ہے۔

۲۴- منحنی پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا فرق قاطع محور کے مساوی ہوتا ہے

اگر ن (لا، ما) ہو اور ن ص محور پر عمود ہو تو

$$س ن = ز \times ن ک$$
$$= ز(لا - ج لا)$$



شکل ۳۷

= زٗ (لا - ۱/زٗ)

= زٗ لا - ا

اسی طرح سَ ن = زٗ (لا + ۱/زٗ) = زٗ لا + ا

∴ سَ ن - س ن = ۲ ا ..... (۸)

اس لئے دائیں طرف کی شاخ کیلئے

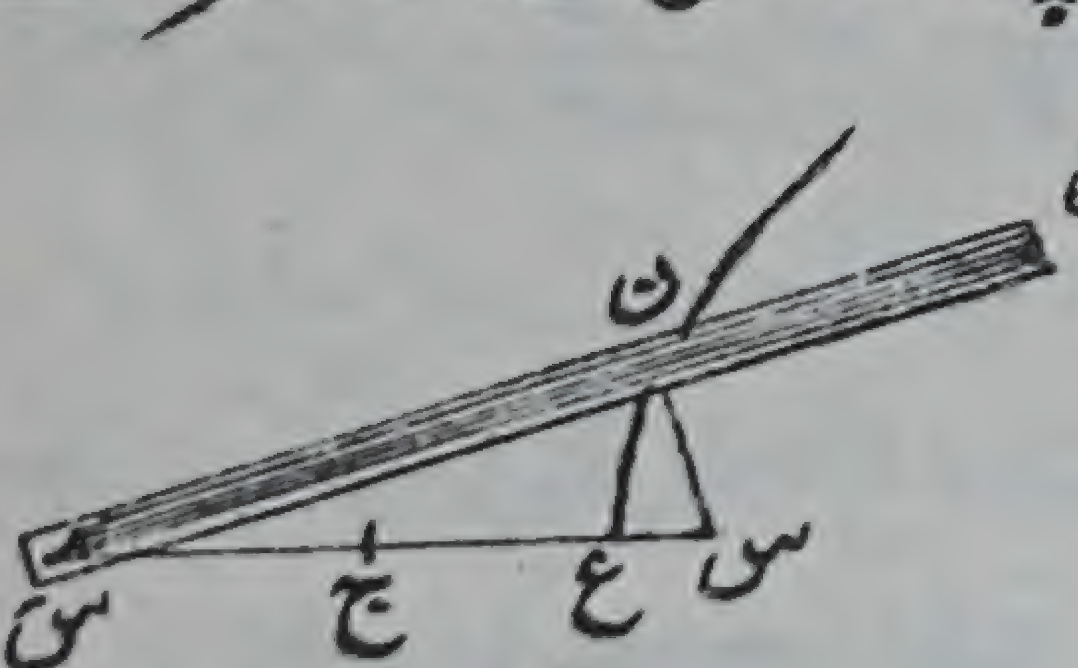
سَ ن - س ن = ۲ ا

اور بائیں طرف کی شاخ کے لئے

س ن - سَ ن = ۲ ا

۸۳ — زائد کی آلی ترسیم — دفعہ ۸۲ سے ہمیں زائد مرتسم کرنے کی ایک آلی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

چپٹی پٹڑی کے ایک سرے کو نقطہ سَ پر اس طرح نصب کرو کہ یہ سَ کے گرد کاغذ کی سطح میں پھر سکے۔ ایک تاگا لو جس کا طول پٹڑی کے طول سے کم ہو اور اس کے ایک سرے کو س پر اور اس کے دوسرے سرے کو پٹڑی کے آزاد سرے ت پر باندھو۔ اب اگر ایک پنسل ن تاگے کو پٹڑی کے ساتھ ساتھ اس طرح تانے رکھے جیسا کہ شکل ۳۸ میں دکھایا گیا ہے تو



شکل ۳۸

یہ زائد کی دائیں شاخ کے اوپر کے کچھ حصہ کو مرتسم کرے گی یعنی یہ منحنی کے اُس حصہ کو مرتسم کرے گی جو ع اور نَ کے درمیان ہے جہاں س نَ رسّی کا طول ہے۔

کیونکہ سَ ن - س ن = (سَ ن + ن ت) - (س ن + ن ت)

= سَ ت - (س ن + ن ت)

= پٹڑی کا طول - رسی کا طول

= مستقل مقدار۔
نیز اُس شاخ کے نچلے متناظر حصہ کو مرتسم کرنے کے لئے پٹری کو س سَ کے نیچے رکھنا پڑیگا۔ بائیں طرف کے متناظر حصوں کو مرتسم کرنے کے لئے پٹری کے ایک سرے کو سَ کی بجائے س پر ثابت کرو اور تاگے کے ایک سرے کو س پر باندھنے کی بجائے سَ پر باندھو۔

مشقیں

۲۴۔ دفعہ ۶۴ کی طرح ثابت کرو کہ اگر س ن - سَ ن مستقل ہو جہاں س، سَ ثابت نقطے ہیں تو ن کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۲۵۔ اُس نقطہ کے طریق کی سادہ سے سادہ مساوات معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرے کہ دو ثابت نقاط س اور سَ سے اس کے فاصلوں کا فرق ۳ ہو جہاں س سَ = ۸

۲۶۔ مشق ۲۵ کے منحنی کا خروج المرکز اور اس کے نیم وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۸۴ ۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = م لا + ج زائد

$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ سے دو نقاط حقیقی یا خیالی پر ملتا ہے، اگر خط مذکور منحنی کا مماس ہو تو اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے۔

اُسی طرح کے عمل سے جو ناقص کی صورت میں کیا گیا تھا ہمیں فصلوں کے لئے مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{(م لا + ج)^2}{ب^2} = ۱$$

$$یا\ لا^2\left(\frac{۱}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right) - \frac{۲ م ج}{ب^2} لا - \frac{ج^2}{ب^2} - ۱ = ۰$$

نیز چونکہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ایک اور صرف ایک قیمت مساوات ما = م لا + ج سے حاصل ہوتی ہے اس لئے معلوم ہوا کہ

نقاط تقاطع دو ہیں۔

لا کی قیمتیں حقیقی، ایک دوسرے پر منطبق یا خیالی ہونگی

اگر بالترتیب $\frac{م^2 ج^2}{ب^4} + \left(\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right)\left(\frac{ج^2}{ب^2} + 1\right) \gtreqless 0$

یعنی اگر $\frac{1}{ا^2} + \frac{ج^2}{ا^2 ب^2} - \frac{م^2}{ب^2} \gtreqless 0$ ۔ یا اگر $ب^2 + ج^2 - ا^2 م^2 \gtreqless 0$

اگر $ج = \pm \sqrt{ا^2 م^2 - ب^2}$

تو دونوں نقطے ایکدوسرے پر منطبق ہوں گے، اس لئے خطوط

$$ما = م\,لا \pm \sqrt{ا^2 م^2 - ب^2} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

م کی تمام قیمتوں کے لئے زائد کو مس کرتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر $م < \frac{ب}{ا}$ تو ج کی قیمت خیالی ہے یعنی زائد کا کوئی مماس محور کے ساتھ ایسا زاویہ نہیں بنا سکتا جو متقارب اور محور کے درمیانی زاویہ سے کم ہو

اگر $م = \pm \frac{ب}{ا}$ تو $ج = 0$ اور اس صورت میں مماس ہونگے

$$ما = \pm \frac{ب}{ا}\,لا$$

اور یہ فی الحقیقت متقارب ہیں جو دفعہ ۷۶ میں معلوم کئے جا چکے ہیں کیونکہ یہ خط منحنی سے صرف لا انتہا فاصلے پر ملتے ہیں اسلئے معلوم ہوا کہ متقارب کو ہم ایک ایسا مماس خیال کر سکتے ہیں جس کا نقطہ تماس لا انتہا ہی پر ہے۔

۸۵ - متقارب - تعریف، ایک ایسا خط مستقیم جو ایک منحنی سے لاانتہا فاصلے پر دو منطبق نقطوں پر ملے **متقارب** کہلاتا ہے۔
اس سے قبل ہم نے متقارب کی باضابطہ تعریف نہیں کی تاہم جو متقارب ہم نے اس سے پہلے معلوم کئے ہیں ان میں اوپر کی خاصیت ضرور پائی جاتی ہے۔

۸۶ - زائد $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے متقارب معلوم کرو۔

اگر $ما = م\,لا + ج$ متقارب ہو تو جس مساوات درجہ دوم سے نقاط تقاطع کے فصلے معلوم ہوتے ہیں اس کی دونوں اصلیں لاانتناہی ہونی چاہئیں۔ مساوات مذکورۂ ذیل کی مساوات درجہ دوم ہے

$$لا^{۲}\left(\frac{۱}{ا^{۲}} - \frac{م^{۲}}{ب^{۲}}\right) - ۲\,لا\,\frac{م\,ج}{ب^{۲}} - \frac{ج^{۲}}{ب^{۲}} - ۱ = ۰$$

اس کی دو اصلیں ہیں اور ان دونوں کے غیر متناہی ہونے کی شرائط ہیں (ٹوڈہنٹر الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۷)

$$\frac{۱}{ا^{۲}} - \frac{م^{۲}}{ب^{۲}} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{۲\,م\,ج}{ب^{۲}} = ۰$$

اس سے حاصل ہوتا ہے $م = \pm \frac{ب}{ا}$، $ج = ۰$

پس مطلوبہ متقارب صرف وہی دو متقارب ہیں جن کا پہلے بیان ہوا یعنی

$$ما = \pm \frac{ب}{ا}\,لا \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱۰)$$

اور انکی مشترک مساوات ہے $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۰$

۸۷ - کوئی خط جو متقارب کے متوازی ہو وہ منحنی سے **ایک ایسے** نقطہ پر ملتا ہے جو غیر متناہی فاصلہ پر ہو۔
اوپر کی مساوات میں لا کی ایک قیمت لاانتناہی ہوگی اگر

$$\frac{۱}{ا^۲} - \frac{م^۲}{ب^۲} = ۰$$

یعنی اگر $م = ± \frac{ب}{ا}$

اور یہ صورت اُس وقت پیدا ہوگی جبکہ خط ما = م لا + ج ایک متقارب کے متوازی ہو۔

مثال۔ اگر متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہو تو ز = قط عہ

مس عہ = $\frac{ب}{ا}$ کیونکہ متقارب محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں، اُس لئے

$$قط عہ = \sqrt{۱ + مس^۲ عہ} = \sqrt{\frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲}} = ز$$

یاد رہے کہ ۲ عہ متقاربوں کے درمیان وہ زاویہ ہے جس کے اندر کل منحنی گھرا ہوا ہے، دوسرا زاویہ ان کے درمیان π - ۲ عہ ہے۔

۸۸ — قائم زائد۔ ایسے زائد کو جس میں ا = ب قائم زائد کہتے ہیں، اس کی مساوات $لا^۲ - ما^۲ = ا^۲$ ہوگی۔

اس نام کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ اس صورت میں متقارب علی القوائم ہوتے ہیں۔

یعنی $لا^۲ - ما^۲ = ۰$ یا لا - ما = ۰ اور لا + ما = ۰

نتیجہ صریح۔ قائم زائد بلحاظ رشتہ کے زائد کے ساتھ اسی طرح منسوب ہے جیسے دائرہ ناقص کے ساتھ کیونکہ یہ خاص صورتیں ناقص اور زائد دونوں میں محاور کو ایک دوسرے کے مساوی بنانے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مشقیں

۴۷ — ابتدائی اصولوں سے اس کی شرط معلوم کرو کہ ما = ن لا + ۳ زائد

لا^۲ − ۴ ما^۲ = ۹ کو مس کرے، نیز نقطہ تماس کے محدد معلوم کرو۔

۲۸۔ لا^۲ − ۴۰ ما^۲ = ۹ کے اُن مماسات کی مساواتیں معلوم کرو جو قاطع محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۲۹۔ معلوم کرو کہ خط مستقیم لا + ما = ۲ زائد لا^۲ − $\frac{۱}{۲}$ ما^۲ = ۱ سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے یا نہیں۔

۳۰۔ زائد ۲ لا^۲ − ۳ ما^۲ = ۵ کے نصف محور معلوم کرو اور ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = لا + $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ زائد کو مس کرتا ہے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ خط لا + ما = ۰ منحنی ۲ لا^۲ + ۳ لا ما + ما^۲ + ۳ لا + ۲ ما = ۰ سے لاتناہی پر کے ایک نقطہ پر اور خطوط لا + ما + ۱ = ۰ اور ۲ لا + ما + ۱ = ۰ دونوں منحنی مذکور سے لاتناہی پر کے دو نقطوں پر ملتے ہیں۔

۳۲۔ ج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ خط ما = لا + ج اُس زائد کو مس کرے جس کا ماسکہ (۲، ۰) ہو مرتب ۲ لا − ما + ۳ = ۰ اور خروج المرکز $\sqrt{۲}$۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ خطوط لا + ۱ = ۰، ما + ۳ = ۰ منحنی لا ما + ۳ لا + ما = ۰ کے متقارب ہیں۔

۳۴۔ ایک زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے، اسکا خروج المرکز معلوم کرو۔

[استعمال کرو ز = قط عـ]

۸۹۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ سے متقاربوں پر عمود نکالے جائیں تو انکا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے۔

متقارب ہیں $\frac{لا}{ا}$ − $\frac{ما}{ب}$ = ۰ اور $\frac{لا}{ا}$ + $\frac{ما}{ب}$ = ۰ [دفعہ ۸۶]

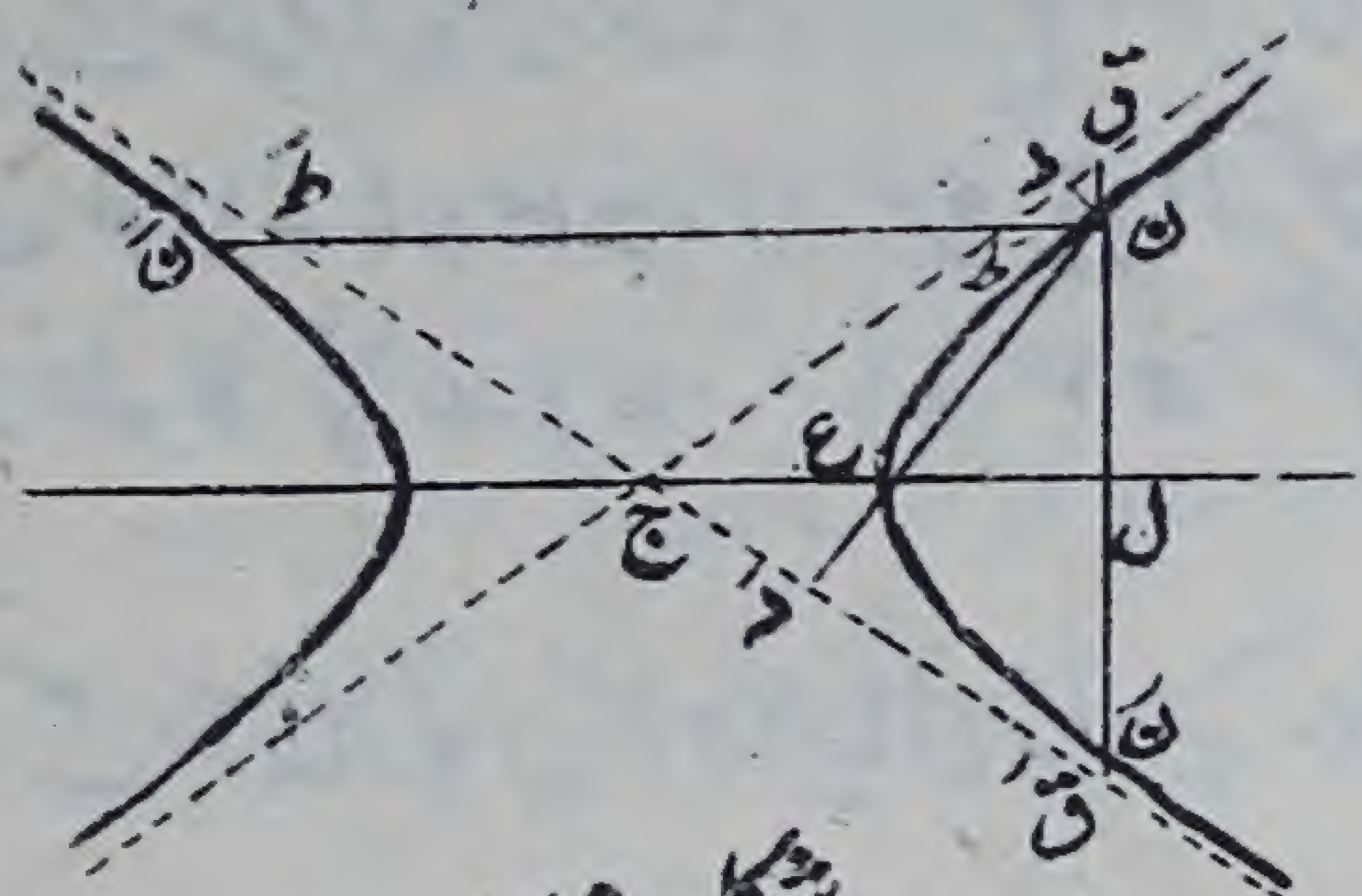
نقطہ (لا، ما) سے ان پر جو عمود کھینچے جا سکتے ہیں ان کا حاصل ضرب

$$= \frac{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}}}{\sqrt{\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}}} \times \frac{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}}}{\sqrt{\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}}} = \frac{\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}}{\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}} = \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$$

کیونکہ لا_1، ما_1 منحنی پر واقع ہے، پس عمودوں کا حاصل ضرب ہمیشہ $\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

مشقیں

۳۵۔ زائد کے نقطہ ن میں سے گزرنے والا معین متقاربوں سے ق اور قَ پر اور زائد سے دوبارہ نَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق × ن قَ = ب^2



شکل ۳۹

[اگر متقاربوں پر عمود ن د اور ن دَ کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ نسبتیں $\frac{\text{ن د}}{\text{ن ق}}$ اور $\frac{\text{ن دَ}}{\text{ن قَ}}$ مستقل ہیں، اس لئے چونکہ ن د × ن دَ مستقل ہیں اس لئے ن ق × ن قَ بھی مستقل ہے، مستقل قیمت معلوم کرنے کے لئے ن کو ع پر فرض کرو۔]

۳۶۔ ثابت کرو کہ ق ن × ق نَ = ب^2

۳۷- اگر قاطع محور کے متوازی خطوط ن ط طَ نً متقاربوں سے ط اور طَ پر اور منحنی سے نً پر ملے تو ثابت کرو کہ (۱) ن ط × طَ نً = ا^2
(۲) ن ط = طَ نً (۳) ن ط × ن طَ = ا^2

۳۸- ثابت کرو کہ جیسے ن شاخ ع ن پر حرکت کر کے دور جاتا ہے ن د اور ن ق طول میں نہایت چھوٹے ہوتے جاتے ہیں اور ن کو اس شاخ پر کافی دور لینے سے ہم ن د اور ن ق کے طولوں کو اتنا کم کر سکتے ہیں جتنا چاہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے بہت بڑے فاصلے پر منحنی اپنے متقارب کے لا انتہا قریب آجاتا ہے۔

۹۰- حوالہ کے محور کچھ ہی ہوں زائد کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوگی اور اس مساوات میں اور متقاربوں کی مساوات میں صرف فرق یہ ہوگا کہ دونوں میں مستقل رقمیں مختلف ہوں گی۔

ہم نے اوپر زائد اور متقاربوں کی مساواتیں صورت ذیل میں حاصل کی ہیں

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}^2} - 1 = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}^2} = 0$$

اور یہ صرف بلحاظ مستقل رقم کے ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔
اگر ان مساواتوں کو کسی اور محوروں کے لحاظ سے تبدیل کیا جائے تو ہمیں لا، ما کی بجائے اس شکل کے جملات $\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1$ اور $\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2$ مندرج کرنے ہوں گے (حصہ اول دفعہ ۳۵)
اس طرح نئی مساواتیں ہو جائیں گی

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{عہ}^2} - \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2)^2}{\text{بہ}^2} - 1 = 0$$

اور

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{عہ}^2} - \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2)^2}{\text{بہ}^2} = 0$$

یہ دونوں مساواتیں صریحاً ایک ہی ہیں سوائے بلحاظ اپنی مستقل رقموں کے

کیونکہ پہلی مساوات کی مستقل رقم میں ـ ۱ موجود ہے اور دوسری مساوات میں یہ نہیں ہے۔

پس مطلوب ثابت ہوتا ہے۔

اس سے یہ نہیں فرض کر لینا چاہئے کہ مستقل رقموں کا فرق ہمیشہ ایک ہوگا۔ کیونکہ اگر مساواتوں کو ایک ہی مستقل مقدار سے ضرب دیدیا جائے تو ان میں فرق نہیں آتا اس لئے ان مساواتوں کی ان رقموں کا فرق جن میں لا، ما شامل نہیں ہوتے کچھ ہی ہو سکتا ہے

۹۱ ـ اگر زائد کی مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں $\text{ا لا}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2$ ہوں تو $\text{اب} < \text{ھ}^2$

دفعہ ماقبل کی مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں ہیں

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما})^2}{\text{عہ}^2} - \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما})^2}{\text{بہ}^2}$$

اور یہ دو مربعوں کا فرق ہے، پس $\text{ا لا}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2$ کے دو اجزائے ضربی حقیقی ہونے چاہئیں اور اس کے لئے شرط یہ ہے

$$\text{اب} < \text{ھ}^2$$

سروں کا باہم مقابلہ کرنے سے ہم اسے بآسانی ثابت کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\text{ا} = \frac{\text{ل}_1^2}{\text{عہ}^2} - \frac{\text{ل}_2^2}{\text{بہ}^2}،\quad \text{ب} = \frac{\text{م}_1^2}{\text{عہ}^2} - \frac{\text{م}_2^2}{\text{بہ}^2}،\quad \text{ھ} = \frac{\text{ل}_1\text{م}_1}{\text{عہ}^2} - \frac{\text{ل}_2\text{م}_2}{\text{بہ}^2}$$

اس لئے $\text{اب} - \text{ھ}^2 = -\left(\frac{\text{ل}_1\text{م}_2 - \text{ل}_2\text{م}_1}{\text{عہ بہ}}\right)^2$

اور یہ منفی مقدار ہے کیونکہ مربع ہمیشہ مثبت ہوتا ہے ـ

ہم آگے چلکر دیکھینگے کہ جب $\text{اب} < \text{ھ}^2$ تو مساوات $\text{ا لا}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\,\text{گ لا} + 2\,\text{ف ما} + \text{ج} = 0$

ہمیشہ ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے، یہاں ہم نے صرف اس کے عکس کو ثابت کیا ہے۔

متبادل ثبوت۔ فرض کرو کہ $\text{ف}_1\text{لا}+\text{ق}_1\text{ما}+\text{ر}_1=0$ اور $\text{ف}_2\text{لا}+\text{ق}_2\text{ما}+\text{ر}_2=0$ متقارب ہیں، اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے ان پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا حاصل ضرب مستقل ہوگا اس لئے

$$\frac{\text{ف}_1\text{لا}+\text{ق}_1\text{ما}+\text{ر}_1}{\sqrt{\text{ف}_1^2+\text{ق}_1^2}}\times\frac{\text{ف}_2\text{لا}+\text{ق}_2\text{ما}+\text{ر}_2}{\sqrt{\text{ف}_2^2+\text{ق}_2^2}}=\text{ج}$$

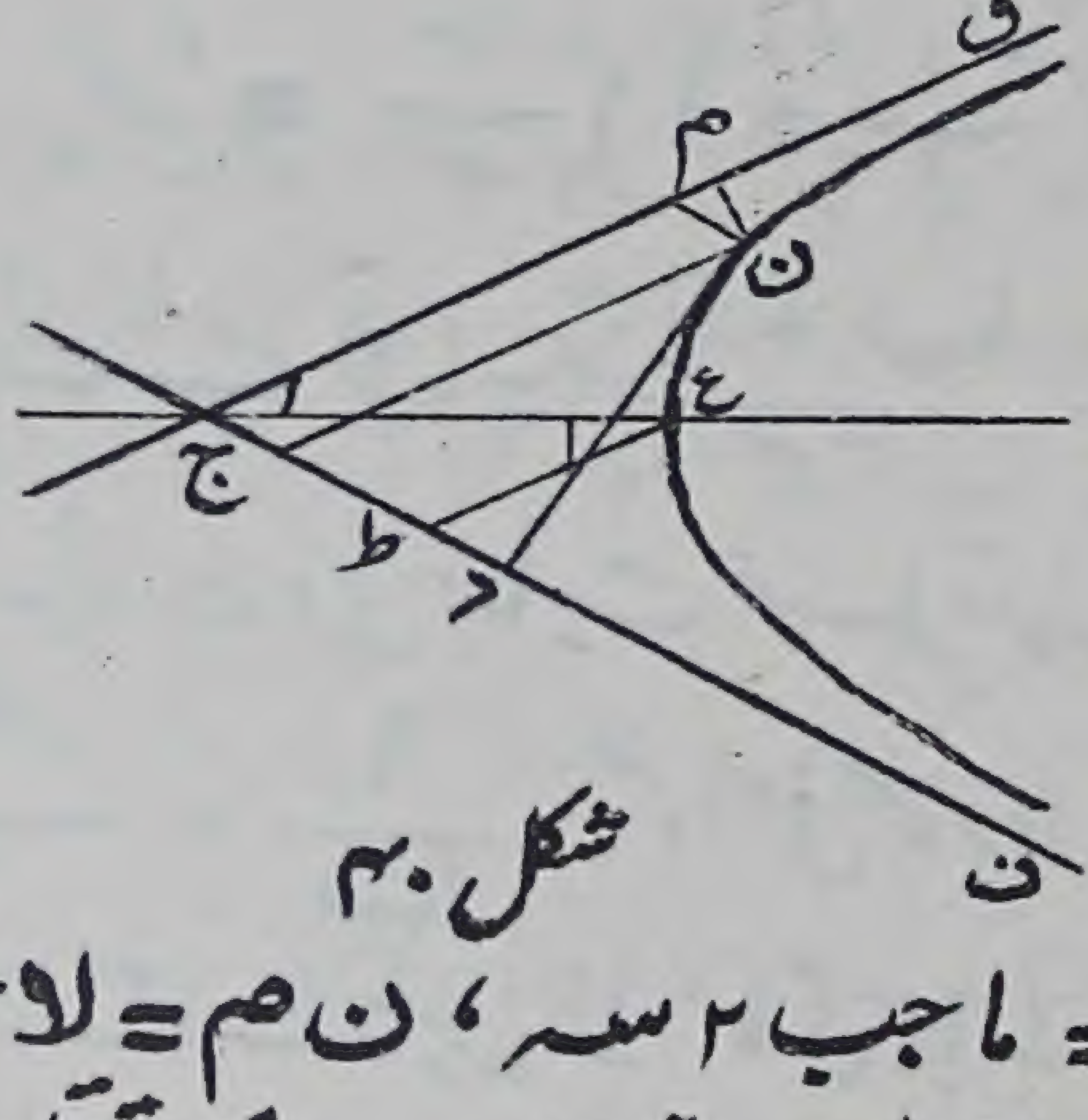
جہاں ج مستقل ہے منحنی کی مساوات ہے اور یہ مساوات صریحاً متقاربوں کی مساوات سے صرف بلحاظ مستقل رقم کے مختلف ہے۔

طالب علم اُس زائد کی مساوات معلوم کرے جس کا ماسکہ (لا_1، ما_1) ہو اور مرتب $\text{لا جم عہ}+\text{ما جب عہ}-\text{ع}=0$ اور اس سے دیکھے کہ اب $<\text{ھ}^2$ [دیکھو دفعہ]

۹۲۔ متقاربوں کو حوالہ کے محور مان کر زائد کی مساوات دریافت کرو۔

ج ف، ج ق (شکل ۴۰) متقارب ہیں اور منحنی کے کسی نقطہ ن سے ان پر ن د، ن م عمود نکالے گئے ہیں، ہم جانتے ہیں کہ حاصل ضرب ن د × ن م مستقل ہے۔

اگر ج ف کو محور لا اور ج ق کو محور ما مانا جائے اور ان کا درمیانی زاویہ ۲ سہ ہو تو



شکل ۴۰

$$\text{ن د}=\text{ما جب ۲ سہ}\text{،}\quad \text{ن م}=\text{لا جب ۲ سہ}$$

$$\therefore\ \text{لا ما جب}^2\ \text{۲ سہ}=\text{مستقل}=\text{ک}^2$$

$$\therefore \quad \text{لا ما} = \frac{\text{ک}^{۲}}{\text{جب}^{۲}\,\text{۲سہ}} = \text{س}^{۲} \quad \text{(فرض کرو)}$$

س² کی قیمت ا، ب کی رقوم میں معلوم کرنے کی غرض سے ہم لا ما کو ایک سادہ صورت میں محسوب کرتے ہیں یعنی جب نقطہ ن منحنی کے راس ع پر واقع ہو۔

ع ط کو ج ق کے متوازی کھینچو، تب

$$\text{ع ط} \times \text{ط ج} = \text{س}^{۲}$$

لیکن چونکہ $\angle\,\text{ط ع ج} = \angle\,\text{ق ج ع} = \angle\,\text{ط ج ع}$

$$\therefore \quad \text{ط ج} = \text{ط ع}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{ط ع}}{\text{ع ج}} = \frac{\text{جب ط ج ع}}{\text{جب ع ط ج}} = \frac{\text{جب سہ}}{\text{جب ۲سہ}} = \frac{۱}{\text{۲ جم سہ}}$$

$$\text{پس س}^{۲} = \text{ع ط} \times \text{ط ج} = \frac{\text{ع ج}^{۲}}{\text{۴ جم}^{۲}\,\text{سہ}} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{۴ جم}^{۲}\,\text{سہ}}$$

$$\text{لیکن مس سہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \text{یا جم}^{۲}\,\text{سہ} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$$

$$\therefore \quad \text{س}^{۲} = \frac{۱}{۴}\left(\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}\right)$$

اور مطلوبہ مساوات ہے $\text{لا ما} = \frac{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}{۴}$ .... (۱۱)

متبادل ثبوت۔ ثبوت ذیل نہایت علم آموز ہے۔

مساوات $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کو اصلی محوروں سے کسی اور محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرنے کے لئے ہمیں لا، ما کی بجائے محددوں کے لئے خطی جملے $\text{ل}_{۱}\text{لا} + \text{م}_{۱}\text{ما} + \text{ن}_{۱} = ۰$ اور $\text{ل}_{۲}\text{لا} + \text{م}_{۲}\text{ما} + \text{ن}_{۲} = ۰$ مندرج کرنے

ہوں گے۔
اگر نیا مبدأ وہی ہو جو پرانا مبدأ ہے تو $\text{ن}_1 = \text{ن}_2 = ۰$ کیونکہ نئے محدد صفر ہوتے ہیں جب پرانے محدد صفر ہوں۔ اس لئے اگر مبدأ مرکز پر ہو تو زائد کی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا}+\text{م}_1\,\text{ما})^2}{\text{ا}^2}-\frac{(\text{ل}_2\,\text{لا}+\text{م}_2\,\text{ما})^2}{\text{ب}^2}=1$$

یہ صریحاً اس شکل کی ہے $\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}_1\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}_1\,\text{ما}^2 = 1$
اب خط $\text{لا} = ۰$ کو متقارب ہونا چاہئے اسلئے مساوات درجہ دوم $\text{ب}_1\,\text{ما}^2 - 1 = ۰$ کی دونوں اصلیں لاانتہا بڑی ہیں، اس لئے $\text{ب}_1 = ۰$
اسی طرح $\text{ا}_1 = ۰$۔ اور مطلوبہ مساوات اس شکل کی ہے
$2\,\text{ھ}_1\,\text{لا}\,\text{ما} = 1$ یا $\text{لا}\,\text{ما} =$ مستقل حسب سابق۔
مستقل مقدار کی قیمت بعینہ ایسے محسوب ہوگی جیسے دفعہ آخر میں۔
مساوات کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں
$\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}^2$ . . . . . . (۱۲)

مشقیں

معلوم کرو کہ ذیل کے زائدوں کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی اگر ان کے متقاربوں کو حوالہ کے محور مانا جائے۔

۳۹ — $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ ۔ ۴۰ — $2\,\text{لا}^2 - 3\,\text{ما}^2 = 5$
۴۱ — $\text{ا}\,\text{لا}^2 - \text{ب}\,\text{ما}^2 = \text{ج}$ ۔ ۴۲ — $\text{ما}(\text{لا} - \text{ما}) = 2$
۴۳ — اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ک}$ زائد $\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}^2$ کو مس کرے۔
۴۴ — مشق ۴۳ کے نتیجہ سے حاصل کرو کہ زائد کا ہر مماس متقارب سے ایسا زاویہ بناتا ہے جو متقاربوں کے درمیانی زاویہ سے بڑا ہو۔

باب پنجم پر متفرق مشقیں

۴۵ - اگر مزدوج محور کا ایک سرا ص ہو تو ثابت کرو کہ

ج س^2 - ج ص^2 = ا^2

۴۶ - اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (-۱، ۱) ہو، مرتب لا + ما - ۲ = ۰ اور خروج المرکز $\sqrt{۳}$ -

۴۷ - مشق ۴۶ کے زائد کا وتر خاص معلوم کرو۔

۴۸ - ثابت کرو کہ محور لا زائد ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کا متقارب ہوگا اگر ا = گ = ۰۔

۴۹ - ثابت کرو کہ ماسکہ سے متقارب پر عمود س ق نیم مزدوج محور کے مساوی ہے اور ج ق نیم قاطع محور کے مساوی ہے۔

۵۰ - ثابت کرو کہ خط ما = لا + ج زائد لا^2 - ۲ لا ما - ما^2 = ۱ کو مس کریگا اگر ج = ± ۱

۵۱ - ایک زائد کے متقارب لا + ما = ۱ اور لا - ما = ۲ ہیں اور اس کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ ۵ ہے، اس کی مساوات معلوم کرو۔

[دیکھو کہ متقارب علی القوائم ہیں]

۵۲ - زائد کے لئے ثابت کرو کہ ن م^2 : ع م × عَ م = ص ج^2 : ع ج^2
جہاں ن م کوئی معین ہے۔

[ن م^2 = ما^2، ع م × عَ م = (لا - ا) (لا + ا)]

۵۳ - زائد کے کسی معیّن ن م پر ایک نقطہ ق ایسا لیا گیا ہے کہ ق م اور ن م کی باہمی نسبت مستقل ہے، ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک زائد ہے جس کا قاطع محور وہی ہے جو اصلی زائد کا۔

۵۴ - اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط مستقیم ما = م لا + ج زائد $\frac{لا^2}{ا^2}$ - $\frac{ما^2}{ب^2}$ = ۱ کو مس کرے اور اس سے حاصل کرو کہ ایک نقطہ

(لا، ما) سے دو حقیقی مماس صرف اُس صورت میں کھینچ سکتے ہیں جبکہ

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} > 1$$

[اگر مماس (لا، ما) میں سے گذرے تو ایک مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے]

۵۵ - منحنیات ذیل کے متقاربوں کی مساواتیں لکھو

لا (لا + ما) = ۱ ، لا (لا - ما) = ۱ ، ما (لا + ما) = ۲

اور عام صورت میں ثابت کرو کہ (ل لا + ص ما) (لَ لا + صَ ما) = ا^۲

کے متقارب ل لا + ص ما = ۰ اور لَ لا + صَ ما = ۰ ہیں -

آزمائشی پرچہ ۲

۱ - مفصلہ ذیل کی تعریف کرو ، قطع زائد ، خروج المرکز ، محور اصغر ، قاطع محور ، وتر خاص ، متقارب -

ثابت کرو کہ ناقص یا زائد میں محور اصغر ، محور اعظم اور وتر خاص کے درمیان وسط تناسب ہے -

۲ - منحنی ۴ لا^۲ + ۹ ما^۲ - ۴ لا - ۶ ما + ۱ = ۰ کو مرتسم کرو ، اس کا خروج المرکز اس کے محور اعظم اور اصغر کے سروں کے محدد ، نیز اس کے اوتار خاص کے طول اور مساواتیں معلوم کرو -

۳ - ابتدائی اصولوں کی بنا پر ایک ایسے متحرک نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے فاصلوں کا مجموعہ دو نقاط معلومہ سے مستقل ہو

۴ - مساوات $\frac{1}{ر^2} - \frac{1}{ا^2} =$ جب^۲ طہ $\left(\frac{1}{ب^2} - \frac{1}{ا^2}\right)$ کی تعبیر بیان کرو اور اس سے منحنی کی شکل حاصل کرو -

۵ - ثابت کرو کہ ب لا - ما $\sqrt{ج^2 - ا^2}$ = ب ج ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کا مماس ہے ، ج کے معنی بیان کرو -

۶۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات

$$ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

ایک ناقص کو تعبیر کرے تو ا ب ۔ ھ^{۲} لازماً مثبت ہوگا۔

۷۔ منحنی ۴ لا^{۲} ۔ ما^{۲} + ۴ لا + ۴ ما + ۱۳ = ۰ کو مرتسم کرو اور اس کے ماسکوں کے محدد معلوم کرو۔

۸۔ زائد $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے متقارب معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ (۲ قط$^{-۱}$ ز) ہے۔

۹۔ زائد کو آلی طریق پر مرتسم کرنے کی ترکیب بیان کرو اور اس کا ثبوت لکھو۔

۱۰۔ اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب لا + ما + ۱ = ۰ اور ۲ لا ۔ ما + ۲ = ۰ ہیں اور جو لا = ۲ کو مس کرتا ہے۔

باب ششم

درجہ دوم کی عام مساوات

۹۳ - اس باب میں ایک حد تک ہم اُن تمام منحنیات پر جن کی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں بحث کرینگے اور ان کو مختلف جماعتوں میں تقسیم کرنے کی کوشش کریں گے۔

حسب معمول ہم درجہ دوم کی مساوات عامہ کو اس شکل میں لکھتے ہیں

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

طالب علم دیکھے گا کہ گزشتہ تین بابوں میں ہم نے جن منحنیات پر بحث کی ہے ان کی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں اور اس لحاظ سے سب کی سب اوپر کی صورت عامہ میں شامل ہیں۔

نیز ناقص اور زائد کی صورت میں ہم نے دیکھا کہ منحنی ایک مرکز رکھتا ہے جس کو اگر مبداء قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات سادہ سے سادہ صورت اختیار کرلیتی ہے۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ جو منحنی درجہ دوم کی عام سے عام مساوات سے تعبیر ہوتا ہے اس کا بھی بالعموم ایک مرکز ہوتا ہے جس کو مبداء مان کر ہم مساوات مذکورہ کو نہایت سادہ شکل میں لا سکتے ہیں۔

۹۴ - اگر ایک منحنی ہیں جو مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہوتا ہو مبدأ میں سے گزرنے والے تمام وتروں کی تنصیف مبدأ پر ہوتی ہو تو مساوات میں لا اور ما کے سر لازماً صفر ہونگے۔

مبدا میں سے گزرنے والے کسی خط کی مساوات ما = م لا ہے اور یہ خط منحنی

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

سے دو نقاط پر ملتا ہے جنکے فصلے مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں
ا لا^2 + ۲ ھ م لا^2 + ب م^2 لا^2 + ۲ گ لا + ۲ ف م لا + ج = ۰
یا لا^2 (ا + ۲ ھ م + ب م^2) + ۲ لا (گ + ف م) + ج = ۰

اب اگر اس وتر کی تنصیف مبدا پر ہوتی ہو تو اس مساوات کی اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں یعنی اس میں لا کا سر صفر ہونا چاہئے
[ٹیوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۳]

اسلئے　گ + ف م = ۰

لیکن چونکہ مبدا میں سے گزرنے والے تمام وتروں کی مبدا پر تنصیف ہوتی ہے اس لئے اس مساوات کو م کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہونا چاہئے یعنی ضروری ہے کہ گ = ۰ اور ف = ۰ اور یہی ثابت کرنا تھا۔

برعکس اس کے اگر گ = ف = ۰ تو مبدا میں سے گزرنے والے سب وتروں کی مبدا پر تنصیف ہوگی کیونکہ فصلوں کی جو مساوات درجہ دوم ما کی بجائے م لا لکھنے سے حاصل ہوگی اس کی اصلیں م کی تمام قیمتوں کے لئے مساوی اور مختلف العلامت ہونگی۔

۹۵ — اگر ا ب، ھ^2 کے مساوی نہ ہو تو مبدا کی مناسب تبدیلی سے ہم درجہ دوم کے کسی منحنی کی مساوات کو ایسی شکل میں لا سکتے ہیں جس میں لا اور ما کے سر صفر ہوں۔

فرض کرو کہ ہم کوئی نیا مبدا (لاَ، ماَ) لیتے ہیں، اس نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تحویل کرنے کے لئے ہمیں اصلی مساوات میں لا کی بجائے لا + لاَ اور ما کی بجائے ما + ماَ لکھنا چاہیئے اس طرح نئی مساوات ہوگی

ا (لا + لاَ)^2 + ۲ ھ (لا + لاَ) (ما + ماَ) + ب (ما + ماَ)^2 + ۲ گ (لا + لاَ) + ۲ ف (ما + ماَ) + ج = ۰

یا ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ لا (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + ۲ ما (ھ لاَ + ب ماَ + ف)
+ ا لاَ^{2} + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^{2} + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج = ۰

اب اس مساوات میں لاؔ اور ماؔ کے سر صفر ہونگے اگر

ا لاؔ + ھ ماؔ + گ = ۰ اور ھ لاؔ + ب ماؔ + ف = ۰ .... (۱)

ضرب چلیپی کے قاعدہ کی مدد سے حل کرنے سے

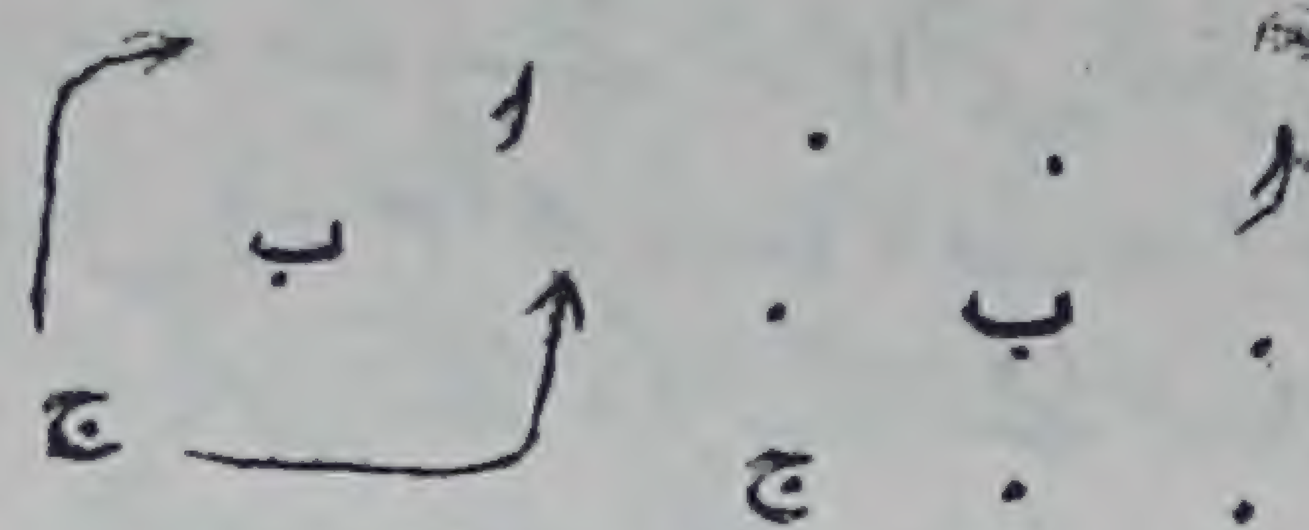
لاؔ / (ھ ف - ب گ) = ماؔ / (گ ھ - ا ف) = ۱ / (ا ب - ھ۲) [ٹیوٹوریل الجبرا حصّہ دوم دفعہ ۶۸]

یعنی لاؔ = (ھ ف - ب گ) / (ا ب - ھ۲) ، ماؔ = (گ ھ - ا ف) / (ا ب - ھ۲)

اسلیئے اگر ا ب ، ھ۲ کے مساوی نہ ہو تو ہم لاؔ، ماؔ کی ایسی محدود قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ نئی مساوات میں لاؔ، ما والی رقمیں موجود نہ ہوں۔

اوپر کی دو مساواتوں (۱) کو ہم ترکیب ذیل کی مدد سے بآسانی یاد رکھ سکتے ہیں۔

حرف ا ، ب ، ج کو مربع کے ایک قطر پر لکھو اور اس کے دونوں طرف تین نقطوں کے اس طرح نشان دو جیسے شکل میں۔ پھر ان خالی جگہوں کو حروف ف ، گ ، ھ سے پُر کرو جیسے تیروں کی سمتوں سے ظاہر ہے



اس طرح سے ہمیں حاصل ہوگا۔

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

اس مربع کی پہلی دو سطروں میں جو حروف ہیں وہ مساواتوں (۱) میں بالترتیب لاؔ، ماؔ کے سر اور مطلق رقمیں ہیں

اوپر کی تین دفعات کو اکٹھا ملانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

۹۶ — اگر ا ب ، ھ۲ کے مساوی نہ ہو تو درجہ دوم کے ہر منحنی کے ساتھ ایک ایسا نقطہ متعلق ہے جس میں سے گزرنے والے منحنی کے وتروں کی اس نقطہ پر تنصیف ہوتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں ہم نے دیکھا کہ اگر نقطہ (لاؔ ، ماؔ) کو نیا مبدأ قرار دیا جائے تو نئی مساوات میں لا ، ما کی رقمیں نہیں رہتیں اور اسلیئے دفعہ ۹۴ سے

ظاہر ہے کہ اس نئے مبدا میں سے گزرنے والے سب وتروں کی تنصیف اسی نقطہ پر ہونی چاہیئے ۔ اس نقطہ کو منحنی کا **مرکز** کہتے ہیں اور اس میں سے گزرنے والے ہر وتر کو منحنی کا **قطر** کہتے ہیں ۔

نوٹ ۔ طالب علم دیکھیگا کہ مرکز کے متعلق جو کچھ یہاں بیان ہوا وہ بالکل اسکے مطابق ہے جو ابواب چہارم و پنجم میں مرکزوں کے بارہ میں لکھا جا چکا ہے ۔

نتیجہ صریح ۔ منحنی نئے مرکز کے محدد ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

ا لاَ + ھ ماَ + گ = ۰ ، ھ لاَ + ب ماَ + ف = ۰ (۱)

اور اگر مرکز کو نیا مبدا مانا جائے تو مساوات ہو جاتی ہے

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ا لاَ² + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ² + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج =

مثال ۔ منحنی ۳ لا² - ۲ لا ما + ما² - لا - ۳ ما + ۱ = ۰ کے مرکز معلوم کرنے کے لئے مساواتیں لکھو اور مرکز کے محدد معلوم کرو ۔

یہاں ا = ۳ ، ھ = -۱ ، ب = ۱ ، گ = - ½ ، ف = - ۳/۲ ، ج = ۱

اس لئے مرکز کے لئے مساواتیں ہیں

ا لا + ھ ما + گ = ۰ ، ھ لا + ب ما + ف =

یعنی ۳ لا - ما - ½ = ۰ ، - لا + ما - ۳/۲ =

جس سے لا = ۱ ، ما = ۵/۲

مشقیں

ذیل کے منحنیات میں سے ہر ایک کے مرکز کے لئے مساواتیں لکھو اور ان سے مرکز کے محدد معلوم کرو ۔

۱ ۔ لا² + ۲ لا ما + ۲ ما² + ۸ لا + ۳ = ۰

۲ ۔ ۲ لا² - ما² - ۴ لا + ۲ ما = ۷

۳ ۔ لا² - ۲ لا ما + ۳ لا + ما + ۳ = ۰

۴ ۔ لا² + لا ما + ۱ = ۰

۹۷ ۔ منحنی کی مساوات جبکہ مرکز مبدا ہو ۔

قاعدہ- منحنی کی مساوات بلحاظ ایسے مبدأ کے جو منحنی کے مرکز پر ہو اصلی مساوات کی درجہ اول کی رقموں میں لا، ما کے بجائے مرکز کے نصف محدد مندرج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

ہم نے اوپر دیکھا کہ مساوات مطلوبہ ہے

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + \text{ا لاَ}^2 + ۲\,\text{ھ لاَ ماَ} + \text{ب ماَ}^2 + ۲\,\text{گ لاَ} + ۲\,\text{ف ماَ} + \text{ج} = ۰$$

اس میں رقم مطلق ہے $\text{ا لاَ}^2 + ۲\,\text{ھ لاَ ماَ} + \text{ب ماَ}^2 + ۲\,\text{گ لاَ} + ۲\,\text{ف ماَ} + \text{ج}$

$$= \text{لاَ}(\text{ا لاَ} + \text{ھ ماَ} + \text{گ}) + \text{ماَ}(\text{ھ لاَ} + \text{ب ماَ} + \text{ف}) + \text{گ لاَ} + \text{ف ماَ} + \text{ج}$$

$$= ۲\,\text{گ}\left(\frac{\text{لاَ}}{۲}\right) + ۲\,\text{ف}\left(\frac{\text{ماَ}}{۲}\right) + \text{ج}$$

کیونکہ $\text{ا لاَ} + \text{ھ ماَ} + \text{گ} = ۰$ اور $\text{ھ لاَ} + \text{ب ماَ} + \text{ف} = ۰$

اب چونکہ اصلی مساوات میں درجہ اول کی رقمیں $۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج}$ ہیں، اس لئے قاعدہ مندرجہ بالا ثابت ہوا، یہ قاعدہ ایک حد تک ضروری ہے اور عملیات میں حسابات کو مختصر بنا دیتا ہے، طالب علم اسے یاد رکھے

مثال منحنی $۳\,\text{لا}^2 + \text{لا ما} + \text{ما}^2 + ۴\,\text{لا} + \text{ما} + ۱ = ۰$ کے مرکز کے محدد معلوم کرو اور منحنی کی مساوات اس صورت میں حاصل کرو جبکہ مرکز مبدأ ہو۔

اس جگہ $\text{ا} = ۳$، $\text{ھ} = \frac{۱}{۲}$، $\text{ب} = ۱$، $\text{گ} = ۲$، $\text{ف} = \frac{۱}{۲}$، $\text{ج} = ۱$

مرکز کے لئے مساواتیں ہیں

$$\text{ا لاَ} + \text{ھ ماَ} + \text{گ} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{ھ لاَ} + \text{ب ماَ} + \text{ف} = ۰$$

یا $$۳\,\text{لاَ} + \frac{۱}{۲}\,\text{ماَ} + ۲ = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{۱}{۲}\,\text{لاَ} + \text{ماَ} + \frac{۱}{۲} = ۰$$

حل کرنے سے $\text{لاَ} = -\frac{۷}{۱۱}$ ، $\text{ماَ} = -\frac{۲}{۱۱}$

جو مرکز کے محدد ہیں۔

درجہ اول کی رقموں یعنی $۴\,\text{لا} + \text{ما}$ میں مرکز کے نصف محدد درج کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$۳\,\text{لا}^{۲} + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^{۲} + ۴\left(-\frac{۷}{۲۲}\right) + \left(-\frac{۱}{۱۱}\right) + ۱ = ۰$$

یعنی

$$۳\,\text{لا}^{۲} + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^{۲} - \frac{۳}{۱۱} = ۰$$

مشقیں

منحنیات ذیل کے مرکز معلوم کرو اور اِن میں سے ہر ایک کی مساوات حاصل کرو جبکہ مبدأ منحنی کے مرکز پر ہو۔

۵ — $۳\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{ما}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۴\,\text{ما} - ۱ = ۰$

۶ — $۴\,\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{لا} + \text{ما} + ۱ = ۰$

۷ — $\text{لا}\,\text{ما} + ۲\,\text{ما}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۳\,\text{ما} + ۱۷ = ۰$

۸ — عام صورت میں یہ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} + \text{گ} = ۰$ اور $\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ف} = ۰$ منحنی کے قطر ہیں۔

۹۸ — نئی رقم مطلق اصلی سروں کی رقوم میں۔

عام صورت میں نئی رقم مطلق ہے $\text{گ}\,\bar{\text{لا}} + \text{ف}\,\bar{\text{ما}} + \text{ج}$ جسے ہم اس شکل $۲\,\text{گ}\left(\frac{\bar{\text{لا}}}{۲}\right) + ۲\,\text{ف}\left(\frac{\bar{\text{ما}}}{۲}\right) + \text{ج}$ میں لکھ سکتے ہیں اور طالب علم عملی حسابات میں ہمیشہ اسے استعمال کرے، مگر نظری دلچسپی کی غرض سے ہم اس رقم مطلق کی قیمت ا، ب، ج، ف، گ، ھ کی رقوم میں معلوم کرتے ہیں۔

$$\text{گ}\,\bar{\text{لا}} + \text{ف}\,\bar{\text{ما}} + \text{ج} = \frac{\text{گ}(\text{ھ}\,\text{ف} - \text{ب}\,\text{گ})}{\text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^{۲}} + \frac{\text{ف}(\text{گ}\,\text{ھ} - \text{ا}\,\text{ف})}{\text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^{۲}} + \text{ج}$$

جہاں $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$ کی قیمتیں دفعہ ۹۵ سے لی گئی ہیں۔

$$= \frac{\text{ف}\,\text{گ}\,\text{ھ} - \text{ب}\,\text{گ}^{۲} + \text{ف}\,\text{گ}\,\text{ھ} - \text{ا}\,\text{ف}^{۲} + \text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج} - \text{ج}\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^{۲}}$$

$$= \frac{\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج} + ۲\,\text{ف}\,\text{گ}\,\text{ھ} - \text{ا}\,\text{ف}^{۲} - \text{ب}\,\text{گ}^{۲} - \text{ج}\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^{۲}}$$

اسلئے مساوات بلحاظ ایسے مبدا کے جو منحنی کے مرکز پر ہو حسب ذیل ہوگی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + (اب ج + ۲ ف گ ھ - اف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2) / (اب - ھ^2) = ۰ ....(۲)

انتباہ - ہم بتا چکے ہیں کہ نئی رقم مطلق معلوم کرنے کے لئے یہ ضابطہ (۲) حسابات میں نہ استعمال کیا جائے۔ پہلا ضابطہ زیادہ موزوں ہے کیونکہ عملیات میں رقم مطلق کے علاوہ مرکز کے محدد بھی معلوم کرنا مطلوب ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح - نئی رقم مطلق صفر ہوگی اگر

اب ج + ۲ ف گ ھ - اف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2 = ۰

یعنی صرف اُس صورت میں جبکہ درجہ دوم کا منحنی دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے (حصہ اول دفعہ ۳۲) اس صورت میں مساوات بلحاظ نئے مبدا کے ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ ہوگی جو ایسے دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدا میں سے گزرتے ہیں۔

پس اگر درجہ دوم کی عام مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو معمولی طریقے سے منحنی کا جو مرکز حاصل ہوگا وہ خطوط مذکورہ کا نقطہ تقاطع ہوگا۔ اور یہ ہندسی نقطۂ نظر سے بھی ظاہر ہے کیونکہ اگر و نقطہ تقاطع ہو اور ن و نَ ایک خط و میں سے گزرے جس میں و ن = و نَ تو جب ن ایک خط مذکور پر واقع ہوگا تو نَ بھی اُسی خط پر واقع ہوگا۔ اور یہی شرط با تعریف ہے جو منحنی کا مرکز پورا کرتا ہے۔

۹۹ - مبدا کی مناسب تبدیلی سے درجہ دوم کی کوئی مساوات شکل

ا$_1$ لا^2 + ۲ ھ$_1$ لا ما + ب$_1$ ما^2 = ۱

میں لائی جاسکتی ہے بشرطیکہ اصلی مساوات میں

اب ≠ ھ^2 اور اب ج + ۲ ف گ ھ - اف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2 ≠ ۰

اور ہم نے دیکھا کہ لا، ما میں درجہ اول کی رقمیں اصلی مساوات سے خارج

ہو سکتی ہیں اگر مرکز کو مبدأ مانا جائے اور اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = جَ

جہاں جَ = − (ا ب ج + ۲ ف گ ھ − ا ف^{۲} − ب گ^{۲} − ج ھ^{۲}) / (ا ب − ھ^{۲}) (دفعہ ۹۸)

(نوٹ جب تک جَ صفر کے مساوی نہ ہو اس کی حقیقی قیمت اس دفعہ کے استدلال میں کچھ فرق پیدا نہیں کرتی)

اسلیئے طرفین کو جَ پر تقسیم کرنے سے اور ا/جَ = ا$_{۱}$، ھ/جَ = ھ$_{۱}$، ب/جَ = ب$_{۱}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

ا$_{۱}$ لا^{۲} + ۲ ھ$_{۱}$ لا ما + ب$_{۱}$ ما^{۲} = ۱ .... (۳)

۱۰۰ — محاور کو ایک مناسب زاویہ طہ میں پھرانے سے ہم مساوات

ا$_{۱}$ لا^{۲} + ۲ ھ$_{۱}$ لا ما + ب$_{۱}$ ما^{۲} = ۱

کو شکل ع لا^{۲} + یہ ما^{۲} = ۱ میں لا سکتے ہیں۔

محاور کو زاویہ طہ میں پھرانے کے لیئے ہمیں (حصہ اول دفعہ ۳۳ کی رو سے) لا کی بجائے لا جم طہ − ما جب طہ اور ما کی بجائے لا جب طہ + ما جم طہ رکھنا چاہیئے، اس طرح نئی مساوات ہو جاتی ہے

ا$_{۱}$ (لا جم طہ − ما جب طہ)^{۲} + ۲ ھ$_{۱}$ (لا جم طہ − ما جب طہ) (لا جب طہ + ما جم طہ)

+ ب$_{۱}$ (لا جب طہ + ما جم طہ)^{۲} = ۱

یعنی لا^{۲} (ا$_{۱}$ جم^{۲} طہ + ۲ ھ$_{۱}$ جب طہ جم طہ + ب$_{۱}$ جب^{۲} طہ)

− ۲ لا ما { (ا$_{۱}$ − ب$_{۱}$) جب طہ جم طہ − ھ$_{۱}$ (جم^{۲} طہ − جب^{۲} طہ) }

+ ما^{۲} { ا$_{۱}$ جب^{۲} طہ − ۲ ھ$_{۱}$ جب طہ جم طہ + ب$_{۱}$ جم^{۲} طہ } = ۱

اب اس مساوات میں لا ما کا سر صفر ہوگا اگر

(ا$_{۱}$ − ب$_{۱}$) جب طہ جم طہ = ھ$_{۱}$ (جم^{۲} طہ − جب^{۲} طہ)

یعنی اگر $\frac{\text{۲ جب ط جم ط}}{\text{جم}^2\text{ ط} - \text{جب}^2\text{ ط}} = \frac{\text{۲ ھ}_1}{\text{ا}_1 - \text{ب}_1}$

$\therefore$ مس ۲ ط = $\frac{\text{۲ ھ}_1}{\text{ا}_1 - \text{ب}_1}$ .... (۴)

اب ہم ایسا زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جو ۱۸۰° سے کم ہو اور جس کا ماس کوئی حقیقی مقدار ہو، پس اس مساوات سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ محوروں کو کس زاویہ میں سے گھمایا جائے کہ نئی مساوات سے لا ما والی رقم خارج ہو جائے۔

پس معلوم ہوا کہ درجہ دوم کی مساوات $\text{ا}_1\text{لا}^2 + \text{۲ ھ}_1\text{ لا ما} + \text{ب}_1\text{ ما}^2 = \text{۱}$
شکل عہ لا^2 + بہ ما^2 = ۱ میں تحویل ہو سکتی ہے جہاں
عہ = $\text{ا}_1\text{ جم}^2$ ط + ۲ ھ_1 جب ط جم ط + $\text{ب}_1\text{ جب}^2$ ط
بہ = $\text{ا}_1\text{ جب}^2$ ط − ۲ ھ_1 جب ط جم ط + $\text{ب}_1\text{ جم}^2$ ط

مشقیں

۹ — مشق ۵ تا ۷ کی مساواتوں کو شکل $\text{ا}_1\text{ لا}^2 + \text{۲ ھ لا ما} + \text{ب}_1\text{ ما}^2$ = ایس لاؤ۔

۱۰ — اگر اب، ھ^2 کے مساوی نہ ہو تو درجہ دوم کی عام مساوات ایک ناقص یا زائد کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۰۱ — عملی صورتوں میں مساوات کی تحویل۔

اگرچہ حسب دفعہ ۱۰۰ محوروں کو گھمانے سے ہم مقادیر عہ اور بہ معلوم کر سکتے ہیں لیکن یہ عمل طولانی اور تکلیف دہ ہے، اسلئے عملیات میں ایک اور طریقہ اختیار کیا جاتا ہے جسے ہم ابھی بیان کرینگے، اس نئے طریقہ میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ وہ منحنی جو مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ایک مخروطی تراش ہے، اسلئے یہ اس امر کے ثبوت میں دفعہ ۱۰۰ کے ثبوت کا قائم مقام نہیں ہو سکتا کہ عام مساوات شکل عہ لا^2 + بہ ما^2 = ۱ میں لائی جا سکتی ہے۔

یہ طریقہ ذیل کے ابتدائی مسئلہ پر منحصر ہے۔

۱۰۲ — ایک مرکز دار مخروطی تراش سے ایک ہم مرکز دائرہ چار نقطوں پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ان میں سے دو دو نقطے مرکز میں سے گزرنے والے ایسے دو خطوط پر واقع ہوتے ہیں جو مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ دونوں مرکز دار تراشیں اپنے محوروں کے گرد متشاکل ہیں، تاہم اس کا ایک باقاعدہ ثبوت حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ مرکز دار تراش $\text{عہ}\,\text{لا}^2 + \text{بہ}\,\text{ما}^2 = 1$ ہے اور دائرہ مذکورہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ ہے۔ اُن خطوط کی مساوات جو مرکز کو نقاط مشترک کے ساتھ ملاتے ہیں $\text{عہ}\,\text{لا}^2 + \text{بہ}\,\text{ما}^2 = \dfrac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{ر}^2}$ ہے کیونکہ یہ مساوات مبدا میں سے گزرنے والے خطوط کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے اور نقاط تقاطع کے محددوں کے لئے طرفین مساوات ایک سے مساوی ہو جاتے ہیں۔

ترتیب بدلنے سے $\text{لا}^2\left(\text{عہ} - \dfrac{1}{\text{ر}^2}\right) = \text{ما}^2\left(\dfrac{1}{\text{ر}^2} - \text{بہ}\right)$

یعنی مساوات ایسے دو خطوں کو تعبیر کرتی ہے جو محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح — یہ دو خطوط صرف اُس صورت میں ایک دوسرے پر منطبق ہونگے جب ر مخروطی کے نصف محور کے مساوی ہو اور یہ انطباق متناظر محور پر وقوع پذیر ہوگا۔

۱۰۳ — جس مخروطی تراش کی مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 1$ ہے اس کے نصف محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

[انتباہ غور سے دیکھا جائے کہ مساوات کے بائیں طرف کا رکن ۱ ہے]

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اس مخروطی تراش $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 1$ اور دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کے دو مشترک وتر ہیں جو تراش کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں اور جب ر کسی ایک محور کے طول کے مساوی ہو تو

یہ دونوں وتر اسی محور پر منطبق ہوتے ہیں۔

لیکن ان دو خطوط کی مساوات جو نقاط تقاطع کو مرکز کے ساتھ ملاتے ہیں پہلی مساوات کو دوسری مساوات کے ذریعہ متجانس بنانے سے حاصل ہوتی ہے اور اسلئے یہ حسب ذیل ہے۔

$$ا_1 لا^2 + 2 ھ_1 لا ما + ب_1 ما^2 = \frac{لا^2 + ما^2}{ر^2}$$

رقموں کو ایک طرف لانے اور ترتیب دینے سے

$$لا^2\left(ا_1 - \frac{1}{ر^2}\right) + 2 ھ_1 لا ما + ما^2\left(ب_1 - \frac{1}{ر^2}\right) = 0$$

یہ خط ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اگر دائیں طرف کا رکن مربع کامل ہو

یعنی اگر $ھ_1^2 = \left(ا_1 - \frac{1}{ر^2}\right)\left(ب_1 - \frac{1}{ر^2}\right)$ ......(۵)

پس مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$ھ_1^2 = ا_1 ب_1 - (ا_1 + ب_1)\frac{1}{ر^2} + \frac{1}{ر^4}$$

یا $\frac{1}{ر^4} - \frac{1}{ر^2}(ا_1 + ب_1) + ا_1 ب_1 - ھ_1^2 = 0$ ......(۵)

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے $\frac{1}{ر^2}$ کی دو قیمتیں ملینگی جو نصف محوروں کے متکافیوں کے مربعوں کے مساوی ہونگی، فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $\frac{1}{ر_1^2}$ اور $\frac{1}{ر_2^2}$ ہیں، پس $ر_1$ اور $ر_2$ نصف محور ہیں اور

$$\left(ا_1 - \frac{1}{ر_1^2}\right) لا^2 + 2 ھ_1 لا ما + \left(ب_1 - \frac{1}{ر_1^2}\right) ما^2 = 0$$

ایک محور کی مساوات کا مربع ہے اور

$$\left(ا_1 - \frac{1}{ر_2^2}\right) لا^2 + 2 ھ_1 لا ما + \left(ب_1 - \frac{1}{ر_2^2}\right) ما^2 = 0$$

دوسرے محور کی مساوات کا مربع ہے:-

پہلی مساوات $(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2})$ کے ساتھ ضرب دینے سے ہو جاتی ہے

$$(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2})^2 \text{لا}^2 + 2\text{ھ}_1 (\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2}) \text{لا} \text{ما} + (\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2})(\text{ب}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2}) \text{ما}^2 = 0$$

یا $$(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2})^2 \text{لا}^2 + 2\text{ھ}_1 (\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2}) \text{لا} \text{ما} + \text{ھ}_1^2 \text{ما}^2 = 0$$

کیونکہ $$(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2})(\text{ب}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2}) = \text{ھ}_1^2$$

اسلئے اس نصف محور کی مساوات جس کا طول ر_1 ہے

$$(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_1^2}) \text{لا} + \text{ھ}_1 \text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

ہے اور دوسرے کی مساوات اسی طرح ہے

$$(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}_2^2}) \text{لا} + \text{ھ}_1 \text{ما} = 0$$

انتباہ طالب علم کو یاد رکھنا چاہیے کہ دفعہ بالا کے استدلال سے قبل جو مسئلہ ابتدائی دفعہ ۱۰۲ میں دیا گیا ہے وہ کل ثبوت کا ایک حصہ ہے اس لئے اس مسئلہ کے ثابت کرنے میں اس کا دیا جانا ضروری ہے۔ نیز یہ بھی نہایت ضروری ہے کہ مساوات کے بائیں جانب رقم مطلق ایک ہو اس لئے ہر مثال کو شروع کرنے سے پہلے تمام رقموں کو ایک ایسی مقدار پر تقسیم کر لینا چاہیے جس سے رقم مطلق بائیں جانب ایک ہو جائے اگر ایسا نہ کیا جائے تو ہمیں سوال زیر بحث کے نصف محور نہیں حاصل ہونگے بلکہ ایک ایسے منحنی کے نصف محور حاصل ہونگے جو شکل میں اصلی منحنی کے متشابہ ہوگا لیکن ناپ میں مختلف ہوگا۔ تمام عمل کے آخر میں طالب علم کو نتیجہ کی جانچ کرنے کے لئے اس امر کی تصدیق کر لینی چاہیئے کہ محاور محصلہ ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں یا نہیں۔

متبادل ثبوت نصف محوروں کے طول معلوم کرنے کے لئے محاور کے طول ہم غیر متغیروں (حصہ اول دفعہ ۳۷) کو استعمال کرنے سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی تراشش

$$\text{ا لا}^2 + \text{۲ ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 = \text{۱}$$

کے نصف محور عہ، بہ ہیں۔

ان محوروں کے لحاظ سے مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا}'^2}{\text{عہ}^2} + \frac{\text{ما}'^2}{\text{بہ}^2} = \text{۱}$$

اسلئے قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی بنا پر

$$\text{ا لا}^2 + \text{۲ ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 \text{ ہوجاتا ہے } \frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}^2}$$

اسلئے $\text{ا} + \text{ب} = \frac{1}{\text{عہ}^2} + \frac{1}{\text{بہ}^2}$

اور $\text{ا ب} - \text{ھ}^2 = \frac{1}{\text{عہ}^2} \times \frac{1}{\text{بہ}^2}$

اب مساوات درجہ دوم کے نظریہ کی رو سے $\frac{1}{\text{عہ}^2}$ اور $\frac{1}{\text{بہ}^2}$ ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلیں ہیں $\text{ت}^2 - \text{ت}\left(\frac{1}{\text{عہ}^2} + \frac{1}{\text{بہ}^2}\right) + \frac{1}{\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2} = \text{۰}$

پس $\frac{1}{\text{عہ}^2}$ اور $\frac{1}{\text{بہ}^2}$ مساوات

$\text{ت}^2 - \text{ت}\,(\text{ا} + \text{ب}) + \text{ا ب} - \text{ھ}^2 = \text{۰}$ کی اصلیں ہیں۔

جہاں ت مجہول مقدار ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ مساوات وہی ہے جو مساوات (۵) دفعہ ۱۰۲ ہے۔

یاد رہے کہ اس طریقہ سے محوروں کے صرف طول ہی معلوم ہوتے ہیں سمتیں نہیں معلوم ہوتیں لیکن یہ طریقہ مائل محوروں پر بھی اسی خوبی سے عائد ہوتا ہے اور دراصل اگر حوالہ کے محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو

$$\frac{\text{ا} + \text{ب} - \text{۲ ھ جم سہ}}{\text{جیب}^2\text{ سہ}} = \frac{1}{\text{عہ}^2} + \frac{1}{\text{بہ}^2}$$

$$\frac{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}{\text{جیب}^2\text{ سہ}} = \frac{1}{\text{عہ}^2} \times \frac{1}{\text{بہ}^2}$$

چونکہ لاَ مَاَ کے محور علی القوائم ہیں۔

پس اس صورت میں $\frac{1}{\text{ت}_1^2}$ ، $\frac{1}{\text{ت}_2^2}$ مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$\text{ت}^2 - \text{ت}\,\frac{\text{ا} + \text{ب} - 2\,\text{ھ جم سہ}}{\text{جب}^2\,\text{سہ}} + \frac{\text{اب} - \text{ھ}^2}{\text{جب}^2\,\text{سہ}} = 0$$

یا ت² جب² سہ ـ ت (ا + ب ـ ۲ ھ جم سہ) + اب ـ ھ² = ۰

سوال ۱۰ ـ مخروطی ۵ لا² + ۴ لا ما + ۲ ما² = ۱ کے نصف محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

اگر ر ایک نصف قطر کا طول ہو تو خطوط کا جوڑا

$$\text{۵ لا}^2 + \text{۴ لا ما} + \text{۲ ما}^2 = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{ر}^2}$$

اس محور پر منطبق ہوتا ہے، پس ر مساوات ذیل سے معلوم ہوتا ہے

$$\left(\text{۵} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(\text{۲} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) = \text{۴}\ \text{یا}\ \frac{1}{\text{ر}^4} - \frac{7}{\text{ر}^2} + 6 = 0$$

یعنی
$$\left(\frac{1}{\text{ر}^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\text{ر}^2} - 6\right) = 0$$

$$\therefore\ \text{ر}^2 = 1\ \text{یا}\ \frac{1}{6}$$

محور کی مساوات ہے $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا} + \text{ھ ما} = 0$ یا $\left(\text{۵} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا} + \text{۲ ما} = 0$

اگر ر² = ۱ تو اس سے حاصل ہوگا (۵ ـ ۱) لا + ۲ ما = ۰ یعنی ۲ لا + ما = ۰

اگر ر² = $\frac{1}{6}$ 〃 〃 (۵ ـ ۶) لا + ۲ ما = ۰ یعنی ۲ ما ـ لا = ۰

پس نصف محوروں کے طول ہیں ۱ اور $\frac{1}{\sqrt{6}}$ اور ان کی مساواتیں بالترتیب ہیں ۲ لا + ما = ۰ اور ۲ ما ـ لا = ۰

اور یہ دونوں ایک دوسرے کے ساتھ زاویۂ قائمہ بناتے ہیں جس سے صحت عمل کی تصدیق ہوتی ہے [اس طرح کم از کم زبانی جانچ کر لینا ضروری ہے]

مثال ۲ ـ مثال بالا کی مخروطی تراش کی مساوات بلحاظ اسکے محوروں کے

معلوم کرو۔

چونکہ محوروں کے طول ۱ اور $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ ہیں اس لئے مساوات مطلوبہ ہوگی

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{۱}+\frac{\text{ما}^{۲}}{\frac{۱}{۶}}=۱ \quad \text{یا} \quad \text{لا}^{۲}+۶\,\text{ما}^{۲}=۱$$

جہاں ۲لا محور اعظم ہے اور ۲ما محور اصغر۔

مثال ۳ — منحنی $۷\,\text{لا}^{۲}+۶\,\text{لا}\,\text{ما}-\text{ما}^{۲}=۴$ کے نصف محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

۴ پر تقسیم کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{۷}{۴}\,\text{لا}^{۲}+\frac{۶}{۴}\,\text{لا}\,\text{ما}-\frac{۱}{۴}\,\text{ما}^{۲}=۱$$

محوروں کے طولوں کے لئے مساوات ہے

$$\left(\text{ا}-\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\right)\left(\text{ب}-\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\right)=\text{ھ}^{۲} \quad \text{یعنی} \quad \left(\frac{۷}{۴}-\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\right)=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$$

$$\therefore \frac{۱}{\text{ر}^{۴}}-\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\times\frac{۶}{۴}-۱=۰$$

$$\therefore \frac{۱}{\text{ر}^{۲}}=۲ \;\text{یا}\; -\frac{۱}{۲} \qquad \therefore \text{ر}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \;\text{یا}\; \sqrt{-۲}$$

چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اسلئے منحنی زائد ہے۔

محور کی مساوات ہے $\left(\text{ا}-\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\right)\text{لا}+\text{ھ}\,\text{ما}=۰$

اگر $\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}=۲$ تو حاصل ہوتا ہے $\left(\frac{۷}{۴}-۲\right)\text{لا}+\frac{۳}{۴}\,\text{ما}=۰$ یا $\text{لا}-۳\,\text{ما}=۰$

اگر $\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}=-\frac{۱}{۲}$ 〃 〃 $\left(\frac{۷}{۴}+\frac{۱}{۲}\right)\text{لا}+\frac{۳}{۴}\,\text{ما}=۰$ یا $۳\,\text{لا}+\text{ما}=۰$

حسب معمول ہم دیکھتے ہیں کہ محور علی القوائم ہیں۔

مثال ۴ — مثال بالا کے منحنی کی مساوات بلحاظ اسکے نصف محوروں کے معلوم کرو۔

چونکہ $\text{ر}^{۲}$ کی قیمتیں $\frac{۱}{۲}$ اور -۲ ہیں، اسلئے مساوات مطلوبہ ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\text{ما}^2}{-2} = 1 \quad \text{یا} \quad 2\,\text{لا}^2 - \frac{\text{ما}^2}{2} = 1$$

یعنی ۴ لا^2 - ما^2 = ۲ جہاں قاطع محور لا کا محور ہے۔

مثال ۵ - اس کی تصدیق کرو کہ عام طریقہ سے جو محور حاصل ہوتے ہیں وہ علی القوائم ہیں۔

محور ہیں $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)$ لا + ھ ما = ۰ اور $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_2^2}\right)$ لا + ھ ما = ۰

جہاں $\frac{1}{\text{ر}_1^2}$ اور $\frac{1}{\text{ر}_2^2}$ مجہول ت میں مساوات ذیل کی اصلیں ہیں۔

$$\text{ت}^2 - \text{ت}\,(\text{ا} + \text{ب}) + (\text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^2) = 0$$

یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار ہونگے اگر

$$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_2^2}\right) + \text{ھ}^2 = 0$$

یعنی اگر $\text{ا}^2 - \text{ا}\left(\frac{1}{\text{ر}_1^2} + \frac{1}{\text{ر}_2^2}\right) + \frac{1}{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2} + \text{ھ}^2 = 0$

اب $\frac{1}{\text{ر}_1^2} + \frac{1}{\text{ر}_2^2} = \text{ا} + \text{ب}$ اور $\frac{1}{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2} = \text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^2$ حسب مسائل مساوات درجہ دوم

اسلئے شرط مطلوبہ ہے $\text{ا}^2 - \text{ا}\,(\text{ا} + \text{ب}) + \text{ا}\,\text{ب} - \text{ھ}^2 + \text{ھ}^2 = 0$

جو درست ہے۔

پس خطوط علی القوائم ہیں جیساکہ ہونا چاہیئے۔

مشقیں

ذیل کی مخروطی تراشوں میں نصف محوروں کی مساواتیں اور ان کے طول معلوم کرو۔ نیز نصف محوروں کے لحاظ سے ان کی مساواتیں حاصل کرو۔

۱۱ - ۳ لا^2 + ۲ لا ما + ۳ ما^2 = ۱ ۔۔۔ ۱۲ - ۷ لا^2 + ۴ لا ما + ۴ ما^2 = ۱

۱۳ - لا^2 + لا ما + ما^2 = ۳ ۔۔۔ ۱۴ - ۱۱ لا^2 - ۲۰ لا ما - ۴ ۵ ما^2 = ۱

۱۵ - جملہ ا ب - ھ^2 کی علامت جانچنے سے یہ معلوم کرو کہ اوپر کے منحنی

ناقص ہیں یا زائد۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$(\text{م}^2+\text{ع})\,\text{لا}^2+2\,\text{م}\,\text{ن}\,\text{لا}\,\text{ما}+(\text{ن}^2+\text{ع})\,\text{ما}^2=1$$

کے نصف محور $\frac{1}{\sqrt{\text{ع}(\text{م}^2+\text{ن}^2+\text{ع})}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{\text{ع}}}$ ہیں، نیز ان کی مساواتیں

$\text{ن}\,\text{لا}-\text{م}\,\text{ما}=0$ ، $\text{م}\,\text{لا}+\text{ن}\,\text{ما}=0$ ہیں۔

۱۷۔ مخروطی $\text{ا}_1\,\text{لا}^2+2\,\text{ھ}_1\,\text{لا}\,\text{ما}+\text{ب}_1\,\text{ما}^2=1$ کے محور مساواتوں

$$\left(\text{ا}_1-\frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\text{لا}+\text{ھ}_1\,\text{ما}=0 \quad،\quad \left(\text{ا}_1-\frac{1}{\text{ر}_2^2}\right)\text{لا}+\text{ھ}_1\,\text{ما}=0$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{\text{ر}_1^2}$ اور $\frac{1}{\text{ر}_2^2}$ ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلیں ہیں

$$\text{ت}^2-\text{ت}(\text{ا}_1+\text{ب}_1)+\text{ا}_1\text{ب}_1-\text{ھ}_1^2=0$$

ان کی مشترکہ مساوات حاصل کرو یعنی $\text{ھ}_1(\text{لا}^2-\text{ما}^2)-(\text{ا}_1-\text{ب}_1)\,\text{لا}\,\text{ما}=0$
اور دکھاؤ کہ یہ مساوات اس امر کو استعمال کرنے سے کہ محور متقاربوں کے درمیانی زاویہ کو تنصیف کرتے ہیں بآسانی حاصل ہوتی ہے۔

۱۰۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ر}^2}$ میں مساوات زیر بحث کی اصلیں حقیقی ہیں۔

$$\text{مساوات}\quad \frac{1}{\text{ر}^4}-\frac{1}{\text{ر}^2}(\text{ا}_1+\text{ب}_1)+\text{ا}_1\text{ب}_1-\text{ھ}_1^2=0$$

کی اصلیں حقیقی ہونگی اگر $(\text{ا}_1+\text{ب}_1)^2-4(\text{ا}_1\text{ب}_1-\text{ھ}_1^2)\nless 0$

[ٹیوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۵۹]

یعنی اگر $(\text{ا}_1-\text{ب}_1)^2+4\,\text{ھ}_1^2\nless 0$

چونکہ دائیں طرف کا جملہ دو مربعوں کا مجموعہ ہے اسلئے منفی نہیں ہوسکتا اس لئے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح - اگر نصف محور مساوی ہوں تو $\text{ا}_{۱} - \text{ب}_{۱} = ۰$، $\text{ہ}_{۱} = ۰$۔

کیونکہ جملہ $(\text{ا}_{۱} - \text{ب}_{۱})^{۲} + ۴\,\text{ہ}_{۱}^{۲}$ لازماً صفر ہے۔

اس صورت میں مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ جب ناقص کے محور مساوی ہوں تو وہ ایک دائرہ بن جاتا ہے اور ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ دائرہ کی مساوات اُسی شکل کی ہے جو اسجگہ ضمناً حاصل ہوئی۔

طالب علم صرف ایک شرط کی توقع کرتا ہوگا کیونکہ مساوات کی اصلوں کے باہم مساوی ہونے کے لئے ایک شرط ضروری ہے، مگر اس صورت میں دو شرطیں ہیں کیونکہ جس جملہ کا صفر ہونا مقصود ہے وہ دو حقیقی مقادیر کے مربعوں کا مجموعہ ہے۔

۱۰۶- مساوات $\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ہ}_{۱}\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}_{۱}\text{ما}^{۲} = ۱$ ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} > \text{ہ}_{۱}^{۲}$ اور زائد کو اگر $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} < \text{ہ}_{۱}^{۲}$

$\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}$ کے لئے مساوات درجہ دوم ہے

$$\frac{۱}{\text{ر}^{۴}} - \frac{۱}{\text{ر}^{۲}}(\text{ا}_{۱} + \text{ب}_{۱}) + \text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} - \text{ہ}_{۱}^{۲} = ۰$$

اور ہم نے دیکھا ہے کہ اس کی اصلیں حقیقی ہیں۔ اگر ان کی علامات مختلف ہوں تو مخروطی زائد ہے اور اگر یہ علامات موافق ہوں تو مخروطی ناقص ہے [دیکھو مساواتوں کی شکلیں دفعات ۵۵ اور ۷۳ میں]

لیکن اس کی علامتیں ایک ہی ہونگی اگر $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} - \text{ہ}_{۱}^{۲}$ مثبت ہو اور مختلف ہونگی اگر یہ منفی ہو۔

اسلئے اگر $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} - \text{ہ}_{۱}^{۲}$ مثبت ہو تو مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے [یہ ناقص حقیقی ہوگا اگر دونوں اصلیں مثبت ہوں اور خیالی ہوگا اگر دونوں منفی ہوں]

لیکن اگر $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} - \text{ہ}_{۱}^{۲}$ منفی ہو تو مساوات ایک زائد کو تعبیر کریگی۔

نتیجہ صریح - اگر $\text{ا}_{۱}\text{ب}_{۱} = \text{ہ}_{۱}^{۲}$ تو مساوات متوازی خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے۔ کیونکہ اس صورت میں دائیں جانب کا رکن ایک مربع کامل ہے، فرض کرو $(\text{عہ}\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{ما})^{۲}$، اسلئے $\text{عہ}\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{ما} = \pm ۱$ متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے۔

لیکن اس کا خیال رہے کہ عام مساوات کی بحث میں ہم نے صورت
اب = ھ^{۲} کو آئندہ کے لئے بالکل الگ چھوڑ دیا ہے۔

۱۰۷۔ یہ مان کر کہ درجہ دوم کی مساوات ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے اسکے متقاربوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

ہم جانتے ہیں کہ متقاربوں کی مشترکہ مساوات منحنی کی مساوات سے صرف بلحاظ مستقل رقم کے مختلف ہوتی ہے (دفعہ ۸۶)، اس سے ذیل کا کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

کلیہ۔ متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے کے لئے منحنی کی مساوات معلومہ میں رقم مطلق کی بجائے ایک نا معلوم مقدار لہ رکھو اور پھر لہ کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ نئی مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

مثال۔ مخروطی لا^{۲} - ۴ لا ما + ۳ ما^{۲} + ۲ لا - ۴ ما + ۳ = ۰ کے متقاربوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

ہمیں لہ کی ایسی قیمت معلوم کرنا ہے کہ

لا^{۲} - ۴ لا ما + ۳ ما^{۲} + ۲ لا - ۴ ما + لہ = ۰

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے، اسکے لئے شرط ہے

۳ لہ + ۸ - ۴ - ۳ - ۴ لہ = ۰ [حصہ اوّل، دفعہ ۳۲]

یعنی لہ = ۱، پس متقارب ہیں

لا^{۲} - ۴ لا ما + ۳ ما^{۲} + ۲ لا - ۴ ما + ۱ = ۰

یا (لا - ۳ ما + ۱) (لا - ما + ۱) = ۰

الگ الگ ان کی مساواتیں ہیں

لا - ۳ ما + ۱ = ۰ اور لا - ما + ۱ = ۰

مشقیں

منحنیات ذیل کے متقاربوں کی مساواتیں معلوم کرو

۱۸۔ لا^{۲} + ۲ لا ما - ۲ ما^{۲} + لا + ما = ۰

۱۹ − $\text{۴ لا}^{۲} + \text{۱۴ لا ما} + \text{۷ ما}^{۲} + \text{۱۱ لا} + \text{۹ ما} + ۷ = ۰$

۲۰ − $\text{۳ لا}^{۲} + \text{لا ما} - \text{ما}^{۲} + \text{۲ ما} = ۰$

۱۰۸ − جن دو مخروطی تراشوں کی مساواتیں بلحاظ مستقل رقم کے ایک دوسرے سے مختلف ہوں اسکے متقارب وہی ہوتے ہیں۔

متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے میں ہم مساوات کے تمام سر سوائے مستقل رقم کے استعمال کرتے ہیں، اسلئے مساوات محصلہ صرف پانچ سروں پر موقوف ہوتی ہے اور رقم مطلق اس میں شامل نہیں ہوتی ہے۔

۱۰۹ − ناقص کے متقارب

ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی خواہ ناقص ہو یا زائد ہم اسکے متقاربوں کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں، ان دو صورتوں میں فرق صرف یہ ہے کہ زائد کے متقاربوں کی مساوات ہمیشہ دو حقیقی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتی ہے لیکن ناقص کے متقاربوں کی مساوات کے اجزائے ضربی خیالی ہوتے ہیں، پس معلوم ہوا کہ ناقص کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔

۱۱۰ − درجہ دوم کی عام مساوات سے جو مخروطی تعبیر ہوتی ہے اسکے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو۔

قاعدہ مندرجہ بالا کے مطابق ہمیں رقم مطلق کی بجائے ایک اور مقدار رکھکر اس کی وہ قیمت معلوم کرنا ہے کہ نیا جملہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہو۔ فرض کرو کہ ہم ج کی بجائے ج + جَ رکھتے ہیں جہاں جَ کی قیمت مطلوب ہے۔

اب چونکہ $\text{ا لا}^{۲} + \text{۲ ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} + \text{۲ گ لا} + \text{۲ ف ما} + \text{ج} + \text{جَ} = ۰$ دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے اسلئے

$$\text{اب} (\text{ج} + \text{جَ}) + \text{۲ ف گ ھ} - \text{ا ف}^{۲} - \text{ب گ}^{۲} - (\text{ج} + \text{جَ})\, \text{ھ}^{۲} = ۰$$

اسلئے $$\text{جَ} = \frac{\text{اب ج} + \text{۲ ف گ ھ} - \text{ا ف}^{۲} - \text{ب گ}^{۲} - \text{ج ھ}^{۲}}{\text{اب} - \text{ھ}^{۲}}$$

اس لئے متقاربوں کی مساوات ہے

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب گ^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج − $\dfrac{\text{ا ب ج + ۲ ف گ ھ − ا ف}^2\text{ − ب گ}^2\text{ − ج ھ}^2}{\text{ا ب − ھ}^2}$ = ۰

نتیجہ صریح ۱ — جَ = ۰ اگر ا ب ج + ۲ ف گ ھ − ا ف^2 − ب گ^2 − ج ھ^2 = ۰

یعنی اگر اصلی مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو

جَ = ∞ اگر ا ب = ھ^2

یعنی اگر مساوات ایک مکافی کو تعبیر کرے اور اس صورت میں ہم نے دیکھا ہے کہ محدود فاصلہ پر متقارب نہیں ہوتے (دفعہ ۴۹)

نتیجہ صریح ۲ — ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے متقارب خطوط مستقیم ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے متوازی ہیں۔

کیونکہ متقاربوں کی مساوات

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج + جَ = ۰ ہے اور

خطوط کا یہ جوڑا خطوط ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے متوازی ہے

[حصہ اول دفعہ ۳۴]

پس اگر ہم منحنی کے مرکز میں سے خطوط ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے متوازی خط کھینچیں تو یہ منحنی کے متقارب ہونگے۔

نتیجہ صریح ۳ — مساوات ایک ناقص یا زائد کو تعبیر کرتی ہے اگر بالترتیب

ا ب > یا < ھ^2

کیونکہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 کے اجزائے ضربی خیالی ہونگے یا حقیقی اگر بالترتیب ا ب > یا < ھ^2

یعنی متقارب خیالی ہونگے یا حقیقی اگر بالترتیب ا ب > یا < ھ^2

(مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۷ کے ساتھ)

۱۱۱ — قطع زائد کے قائم ہونے کی شرط۔

اس صورت میں متقارب علی القوائم ہیں، اسلئے خطوط

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰

علی القوائم ہیں، اسلئے شرط مطلوبہ ہے ا + ب = ۰ [حصہ اول، دفعہ ۲۹]

پس درجہ دوم کی عام مساوات ایک قائم زائد کو تعبیر کریگی اگر لا^2 اور ما^2 کے سر تعداداً مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوں۔

۱۱۲ - فقط دیکھنے سے متقارب معلوم کرنا۔

بعض اوقات ہم محض دیکھنے سے معلوم کرسکتے ہیں کہ ایک مخروطی کے متقارب کیا ہیں، مثلاً اگر مساوات مفروضہ ہو (لا + ۳ ما) (لا + ۲ ما + ۱) = ۴ تو متقارب صریحاً لا + ۳ ما = ۰ اور لا + ۲ ما + ۱ = ۰ ہونگے کیونکہ انکی مشترک مساوات اور منحنی کی مساوات میں فرق صرف مستقل رقم کا ہے۔

نیز جب مساوات میں لا^2 اور ما^2 کی رقمیں موجود نہ ہوں تو بھی یہ طریقہ استعمال ہوسکے گا، مثلاً

لا ما + ۲ لا − ما + ۴ = ۰

کے متقارب معلوم کرنے کے لئے ہم اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

(لا − ۱) (ما + ۲) + ۶ = ۰

اور متقارب صریحاً لا − ۱ = ۰ اور ما + ۲ = ۰ ہیں۔

مشقیں

محض دیکھنے سے منحنیات ذیل کے متقارب معلوم کرو

۲۱ - لا (لا + ما) = ۱

۲۲ - ما (ما − لا) = ۱

۲۳ - لا ما + ۲ لا + ۳ ما = ۰

۲۴ - لا^2 + لا ما + لا + ما + ۶ = ۰

۲۵ - لا ما + ۲ لا − ما = ۰

۲۶ - لا (۲ لا + ما) = لا + ۱

۲۷ - (لا − ما) (۳ لا + ۲ ما) = ۶ لا + ۴ ما + ۵

۲۸ - امثلہ ۲۱ تا ۲۷ کے نتائج سے ان منحنیات کے مرکز حاصل کرو۔

باب ششم پر متفرق مشقیں

۲۹ - جس مخروطی تراش کی مساوات

۵ لا² + ۶ لا ما − ۵ ما² − ۲۲ لا + ۱۸ ما − ۷ = ۰

ہے اس کے مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۳۰ — ایک مخروطی کی مساوات ۲۵ لا² − ۳۶ لا ما + ۴۰ ما² + ۱۰۸ لا − ۲۸۰ ما − ۴۷ = ۰ کو مرکز میں سے گزرنیوالے متوازی محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرو۔

۳۱ — ایک مخروطی کی مساوات ۵۷ لا² − ۱۵۰ لا ما − ۲۳ ما² = ۳۴ کو بلحاظ اسکے اصلی محوروں کے تحویل کرو۔

۳۲ — منحنی ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱ کے اُن قطروں کی مساوات معلوم کرو جو اس منحنی اور ہم مرکز دائرہ

لا² + ۲ لا ما جم سہ + ما² = ر²

کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

۳۳ — ثابت کرو کہ ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے متقارب مساوات

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ا لاَ² + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ² + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں لاَ ماَ مرکز کے محدد ہیں۔

۳۴ — اگر قائم محوروں کے دو مختلف نظاموں کے لحاظ سے مساواتیں ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱ اور اَ لا² + ۲ ھَ لا ما + بَ ما² = ۱ ایک ہی مخروطی کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ

ا + ب = اَ + بَ اور ا ب − ھ² = اَ بَ − ھَ²

اُن زائدوں کی مساواتیں حاصل کرو جو نقطہ (۱، ۲) میں سے گزریں اور جن کے متقارب بالترتیب ذیل کے خطوط ہوں۔

۳۵ — ۳ لا − ما + ۱ = ۰، لا + ما = ۰

۳۶ — لا = ۰، ما = ۳

۳۷ — لا + ۲ ما + ۷ = ۰، ۳ لا − ما = ۴

۳۸ — ایک زائد کے متقارب ۲ لا² − ۵ لا ما − ۳ ما² = ۰

ہیں، اسکے محوروں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۳۹ — اُس زائد کے محوروں کی مشترک مساوات معلوم کرو جس کے متقاربوں کی مساوات $ا_۱ لا^۲ + ۲ ھ_۱ لا ما + ب_۱ ما^۲ = ۰$ ہے۔

۴۰ — اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جو مبدا میں سے گزرے اور جس کے متقارب وہی ہوں جو منحنی $۲ لا^۲ + لا ما - ما^۲ - ۳ لا + ۳ ما = ۹$ کے ہیں۔

باب ہفتم

ناقصوں کا مرتسم کرنا

۱۱۳- اب ہم ناقصوں کے مرتسم کرنیکی چند توضیحی مثالیں حل کرینگے جبکہ ان کی مساواتیں عام شکل میں دی گئی ہوں۔

یہ نہایت ہی سادہ شکل کا منحنی ہے اس لحاظ سے اس کے محل کا بآسانی پتہ چل سکتا ہے اگر اس کے نصف محور مقدار اور سمت میں معلوم ہوں، اسلئے سب سے پہلے ہم اس کے نصف محور معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور اسکے بعد تصدیق کی خاطر منحنی پر چند اور نقطے حاصل کرکے ترسیم کی صحت کی جانچ کرسکتے ہیں اس کے متعلق تمام ضروری عمل پچھلے باب میں بیان ہوچکے ہیں یعنی

(۱) سب سے پہلے ہم منحنی کا مرکز اور اسکی مساوات معلوم کرتے ہیں جبکہ مرکز مبدأ ہو۔

(۲) اسکے بعد ہم نصف محوروں کے طول اور انکی مساواتیں معلوم کرتے ہیں۔

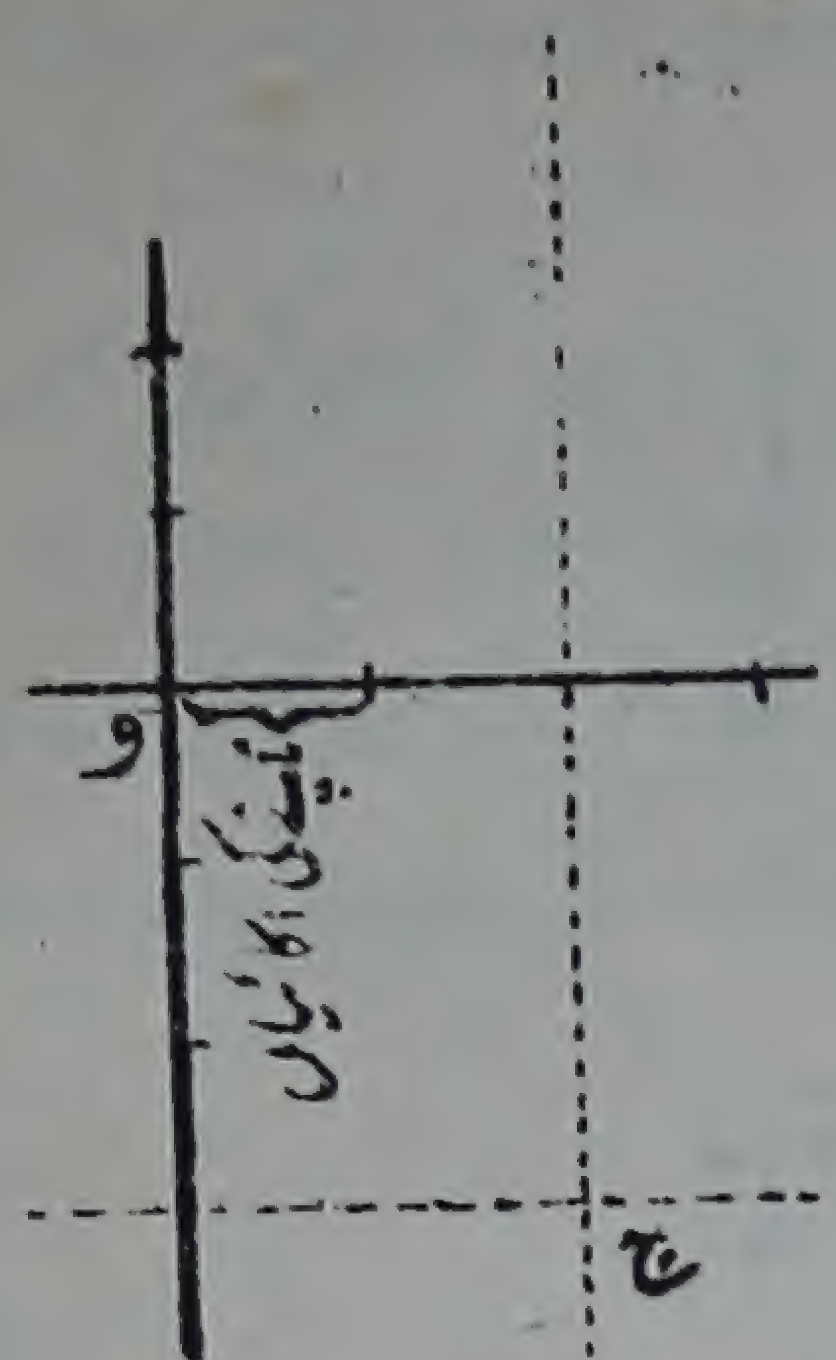
۱۱۴- مثال ۱- ذیل کے منحنی کو مرتسم کرو۔

$$۳۶\,لا^{۲} + ۲۴\,لا\,ما + ۲۹\,ما^{۲} - ۷۲\,لا + ۱۲۶\,ما + ۸۱ = ۰$$

[نوٹ ذیل کے حل کو بطور نمونہ کے نہ خیال کیا جائے کیونکہ مربع خطوط وحدانی کے اندر عمل کے جو حصے ہیں وہ ثبوت کی صحت جانچنے کے لئے محض اشارے ہیں جنہیں کم از کم ذہن میں ملحوظ رکھنا چاہیئے]

(۱) یہاں $ا\,ب - ہ^{۲} = ۳۶ \times ۲۹ - ۱۲^{۲}$ = ایک مثبت مقدار

[$ا\,ب - ہ^{۲}$ کی حقیقی قیمت معلوم کرنا ضروری نہیں]



شکل ۱۴۱

اس لئے منحنی قطع ناقص ہے [دفعہ ۱۰۶]

(ب) جن مساواتوں سے مرکز کے محدد معلوم ہوتے ہیں وہ یہ ہیں

$$۳۶\,لا + ۱۲\,ما - ۳۶ = ۰$$

$$۱۲\,لا + ۲۹\,ما + ۶۳ = ۰$$

جن سے $لا = ۲$، $ما = -۳$

[لا، ما کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد انہیں مساواتوں میں مندرج کرنے سے اپنے حل کی تصدیق کرلو]

(ج) درجہ اول کی رقموں میں مرکز کے نصف محدد درج کرنے سے مساوات بلحاظ مرکز کے حاصل ہوتی ہے (دفعہ ۹۷)

$$۳۶\,لا^۲ + ۲۴\,لا\,ما + ۲۹\,ما^۲ - ۷۲\,(۱) + ۱۲۶\left(-\frac{۳}{۲}\right) + ۸۱ = ۰$$

یا $۳۶\,لا^۲ + ۲۴\,لا\,ما + ۲۹\,ما^۲ = ۱۸۰$

یا $\frac{۱}{۵}\,لا^۲ + \frac{۲}{۱۵}\,لا\,ما + \frac{۲۹}{۱۸۰}\,ما^۲ = ۱$ [دیکھو انتباہ دفعہ ۱۰۳]

(د) نصف محور مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$\left(ا - \frac{۱}{ر^۲}\right)\left(ب - \frac{۱}{ر^۲}\right) = ھ^۲ \qquad (دفعہ\ ۱۰۳)$$

یا $\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{ر^۲}\right)\left(\frac{۲۹}{۱۸۰} - \frac{۱}{ر^۲}\right) = \left(\frac{۱}{۱۵}\right)^۲$

یا $\frac{۱}{ر^۴} - \frac{۱۳}{۳۶} \times \frac{۱}{ر^۲} + \frac{۱}{۳۶} = ۰$

جس سے $ر^۲ = ۴$ یا ۹ اور $ر = ۲$ یا ۳

اس لئے منحنی کی مساوات جبکہ اس کے اصلی محور حوالہ کے محور ہوں یہ ہوگی

$$\frac{لا^۲}{۹} + \frac{ما^۲}{۴} = ۱$$

(ع) محور اعظم یا اصغر کی مساوات یہ ہے

$$\left(ا - \frac{۱}{ر^۲}\right) لا + ھ\,ما = ۰$$

جب $ر^۲ = ۹$ (محور اعظم) تو یہ مساوات ہوگی $\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۹}\right) لا + \frac{۱}{۱۵}\,ما = ۰$

یعنی $۴\,لا + ۳\,ما = ۰$

جب ز = ۴ (محور اصغر) تو مساوات ہوگی (۱/۵ - ۱/۴) لا + ۱/۱۵ ما = ۰
یعنی ۳ لا - ۴ ما = ۰

[اس مقام پر دیکھ لینا چاہیئے کہ دونوں محور باہم علی القوائم ہیں یا نہیں (حصہ اول دفعہ ۱۹)]

[اب محور کھینچنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے، محور اعظم حاصل کرنیکے لیئے موجودہ صورت میں رکھو لا = ۳ (کیونکہ ما کا سر ۳ ہے) جس سے ما = -۴ اس نقطہ ن کا بلحاظ نئے محوروں کے شکل میں نشان دو اور اس کو مرکز ج سے ملانے والا خط ج ن کھینچو، محور اصغر کے لیئے رکھو لا = ۴ (کیونکہ ما کا سر ۴ ہے) جس سے ما = ۳، اس نقطہ (ق) کا تعین کرو اور حسب سابق خط ج ق کھینچو]

(ف) خطوط ۴ لا + ۳ ما = ۰ اور ۳ لا - ۴ ما = ۰ پر بالترتیب دونوں طرف طول ۳ اور ۲ کاٹو اس طرح ہمیں محور اعظم اور اصغر کے سرے حاصل ہوتے ہیں اور منحنی کھینچا جا سکتا ہے۔

[لیکن اس سے قبل کہ ہم منحنی کھینچیں یہ بہتر ہوگا کہ اُن نقاط کو معلوم کرکے جہاں منحنی ابتدائی محوروں کو کاٹتا ہے (بشرطیکہ یہ کاٹتا ہو) ہم اپنے کام کی جانچ کرلیں، لیکن اگر یہ نہ کاٹتا ہو تو ہمیں کوئی اور نقطے معلوم کرنے چاہئیں جہاں یہ کسی اور موزوں خطوط کو قطع کرتا ہو اس کے متعلق ہم کچھ اور ذکر (گ) کے ماتحت کرینگے]

(گ) منحنی ابتدائی محور ما (یعنی لا = ۰) کو کاٹتا ہے جہاں

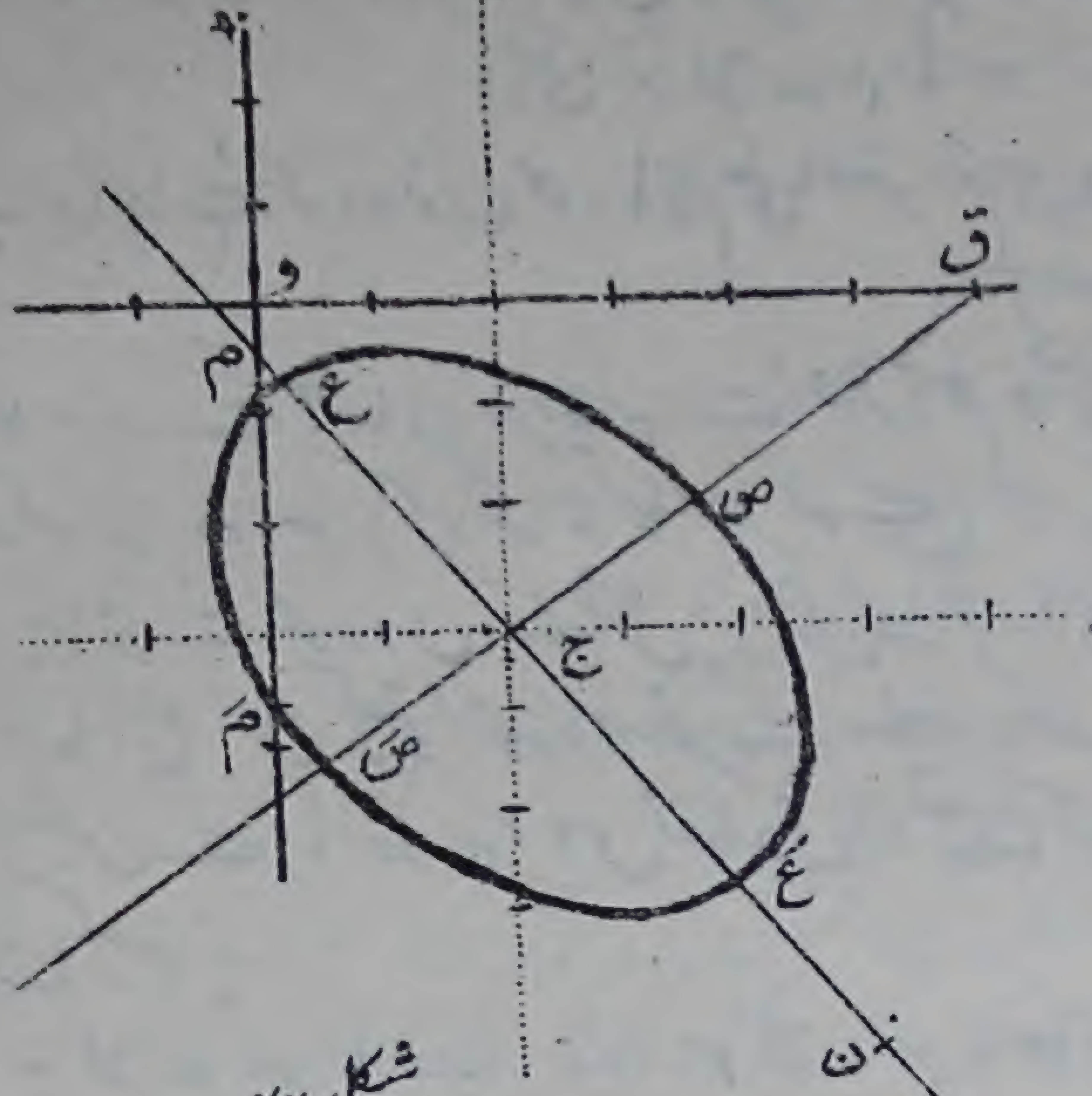
۲۹ ما² + ۱۲۶ ما + ۸۱ = ۰

یا ما = (-۶۳ ± √(۶۳² - ۲۹ × ۸۱)) / ۲۹ = (-۶۳ ± ۴۰) / ۲۹ تقریباً

[دیکھو کہ اس جگہ تقریبی قیمت لینے سے عمل میں کسقدر اختصار ہوتا ہے]

ما = - ۰٫۸ یا - ۳٫۶ تقریباً۔ شکل میں یہ نقطے

ص اور صَ ہیں، اسی طرح منحنی ابتدائی محور لا سے ملتا ہے جہاں



شکل ۴۲

۳۶ لا^2 − ۲۰ لا + ۸۱ = ۰

جس سے خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی منحنی محور لا کو نہیں کاٹتا۔

[اگر ناقص محوروں کے طولوں کی مدد سے بنا لیا گیا ہو تو ان قیمتوں سے اس کی ترسیم کی تصدیق ہو سکتی ہے لیکن بہتر یہ ہے کہ منحنی کھینچنے سے پہلے محوروں پر اُن نقطوں کے نشان دیدیئے جائیں جہاں منحنی محوروں کو کاٹتا ہے اور پھر اس امر کی جانچ کی جائے کہ محوروں کے طول ان مقامات کے منافی تو نہیں ہیں]

مثال ۲ - منحنی ۱۱ لا^2 + ۴ لا ما + ۱۴ ما^2 − ۲۶ لا − ۳۲ ما + ۲۳ = ۰ کو مرتسم کرو

[ذیل کا حل بطور نمونہ کے خیال کیا جا سکتا ہے لیکن مثال اول کی سب ترکیبیں اس میں اختیار کی جانی چاہئیں]

(ا) یہاں ا ب − ح^2 = ۱۵۴ − ۴ = ۱۵۰

اس لئے منحنی ایک ناقص ہے

(ب) مساواتیں جن سے مرکز حاصل ہوتا ہے یہ ہیں

۱۱ لا + ۲ ما − ۱۳ = ۰ اور ۲ لا + ۱۴ ما − ۱۶ = ۰

جس سے لا = ۱ ، ما = ۱

(ج) مساوات بلحاظ مرکز کے ہے

۱۱ لا^۲ + ۴ لا ما + ۱۴ ما^۲ − ۲۶ (۱/۲) − ۳۲ (۱/۲) + ۲۳ = ۰

یا ۱۱ لا^۲ + ۴ لا ما + ۱۴ ما^۲ = ۶ یا ۱۱/۶ لا^۲ + ۴/۶ لا ما + ۱۴/۶ ما^۲ = ۱

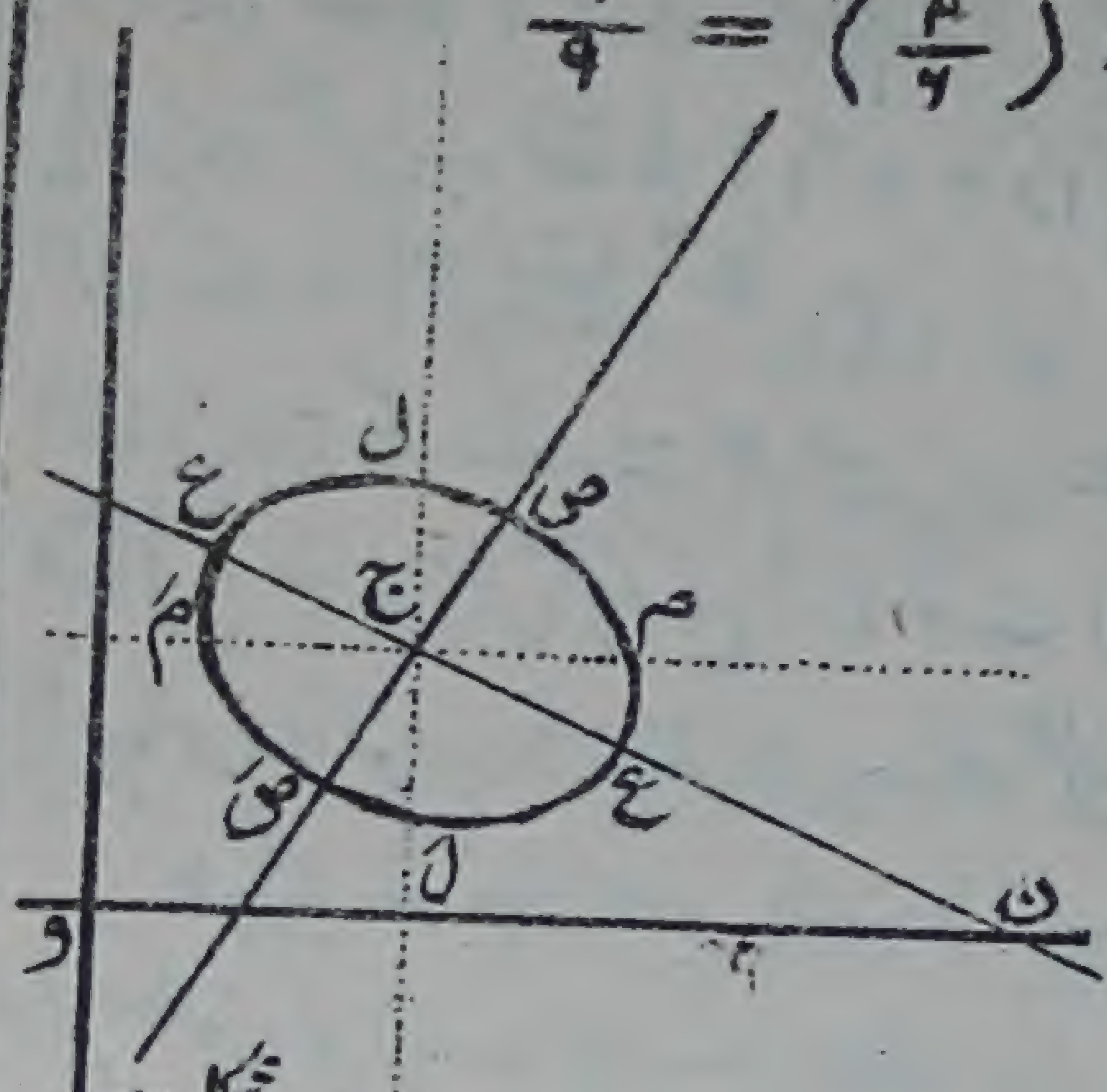
(د) نصف محور اس مساوات سے حاصل ہوتے ہیں

(ا۱ − ۱/ر^۲) (ب۱ − ۱/ر^۲) = ھ۱^۲

یا (۱۱/۶ − ۱/ر^۲) (۱۴/۶ − ۱/ر^۲) = (۲/۶)^۲ = ۱/۹

یا ۱/ر^۴ − ۱/ر^۲ × ۲۵/۶ + ۲۵/۶ = ۰

جس سے ر^۲ = ۳/۵ یا ۲/۵



شکل ۴۳

[منحنی کی مساوات بلحاظ اصلی محوروں کے ہے

لا^۲/(۳/۵) + ما^۲/(۲/۵) = ۱

یا ۵ لا^۲/۳ + ۵ ما^۲/۲ = ۱]

∴ ر = √۶ء۰ یا √۴ء۰ یعنی ۷۸ء۰ یا ۶۳ء۰ تقریباً

(ع) محور اعظم یا اصغر کی مساوات ہے

(ا۱ − ۱/ر^۲) لا + ھ۱ ما = ۰

جب ر^۲ = ۳/۵ (محور اعظم) تو یہ ہوتی ہے

(۱۱/۶ − ۵/۳) لا + ۱/۳ ما = ۰ یا لا + ۲ ما = ۰

جب ر^۲ = ۲/۵ (محور اصغر) تو یہ ہوتی ہے

(۱۱/۶ − ۵/۲) لا + ۱/۳ ما = ۰ یا ۲ لا − ما = ۰

اور یہ دونوں محور علی القوائم ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔

(ف) ان دو خطوط کو شکل (۴۳) میں مرتسم کرنے اور ان پر ہر دو جانب نصف محوروں کے مساوی طول کاٹنے سے ہمیں نقاط ع، ع، ص، ص حاصل ہوتے ہیں دیکھو شکل۔

[ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی ابتدائی محوروں سے نہیں ملتا، اس کی تصدیق (گ) سے ہوتی ہے]

(گ) اگر ابتدائی مساوات میں لا = ۰ یا ما = ۰ تو ما اور لا کی متناظر قیمتیں خیالی ہوتی ہیں، اس لئے منحنی ابتدائی محوروں سے نہیں ملتا، لیکن یہ خطوط لا = ۱، ما = ۱ سے ملتا ہے کیونکہ وہ مرکز میں سے گذرتے ہیں۔

[کوئی اور موزوں خط منتخب کئے جا سکتے ہیں]

پہلا خط منحنی سے نقاط (۱، ۱ + ۲۱√/۷)، (۱، ۱ − ۲۱√/۷) پر ملتا ہے اور دوسرا نقاط (۱ + ۶۶√/۱۱، ۱)، (۱ − ۶۶√/۱۱، ۱) پر،
یا تقریب نقاط (۱، ۱٫۶۵)، (۱، ۰٫۳۵)، (۱٫۷، ۱)، (۰٫۳، ۱) پر، ان کے متناظر نقطے شکل میں ل، لَ، م، مَ ہیں۔ شکل میں ان نقطوں کی نشان دہی کرنے سے ہم ان میں سے گذرتا ہوا منحنی کھینچ سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ جس منحنی کی مساوات لا² + لا ما + ما² = ۱۲ ہے اُسے مرتسم کرو۔

[یہاں مرکز مبدأ ہے اس لئے عمل مقابلتہً مختصر ہوگا۔

ا ب − ح² = ۱² − (۱/۲)² = مثبت مقدار اس لئے منحنی قطع ناقص ہے

رقم مطلق کو ایک بنانے سے

لا²/۱۲ + لا ما/۱۲ + ما²/۱۲ = ۱

نصف محوروں کے لئے مساوات ہے

(۱/۱۲ − ۱/ر²) (۱/۱۲ − ۱/ر²) = (۱/۲۴)² یا ۱/ر⁴ − ۱/ر² × ۱/۶ + ۱/۱۹۲ = ۰

جس سے ر² = ۲۴ یا ۸

∴ ر = ۲ ۶√ یا ۲ ۲√ = ۴٫۹ یا ۲٫۸ تقریباً

نصف محور کی مساوات ہے

(ا − ۱/ر²) لا + ح ما = ۰

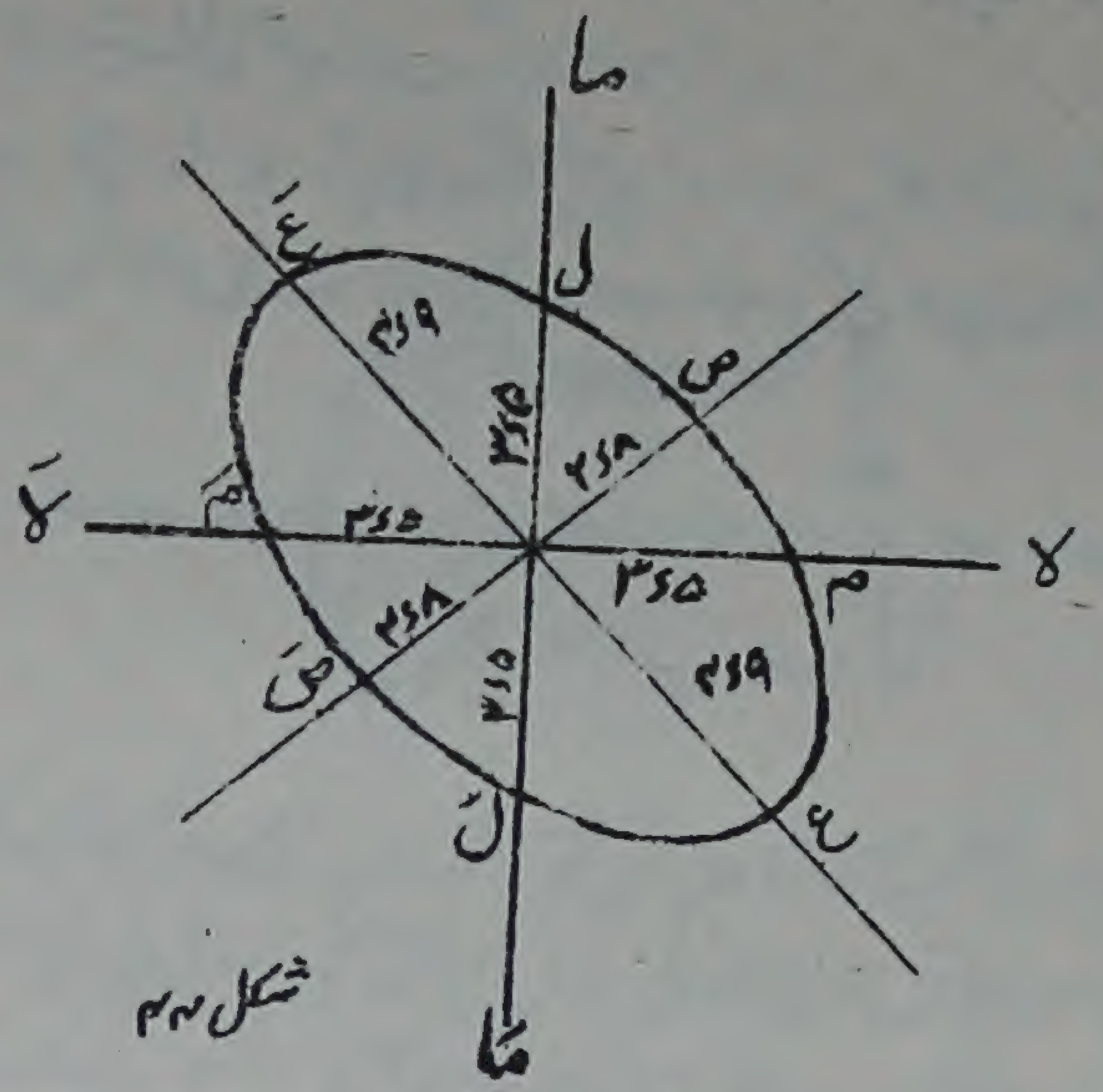
ر² = ۲۴ سے حاصل ہوتا ہے (۱/۱۲ − ۱/۲۴) لا + ۱/۲۴ ما = ۰ یا لا + ما = ۰

ر² = ۸ " " (۱/۱۲ − ۱/۸) لا + ۱/۲۴ ما = ۰ یا لا − ما = ۰

اور یہ خطوط علی القوائم ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔

اب شکل میں ہر ایک نصف محور کے طول اور محل کا نشان دو

نیز دیکھو کہ خطوط لا = ± ۴ اور ما = ± ۴ منحنی کو مس کرتے ہیں



شکل ۴۴

منحنی ما = ۰ کو کاٹتا ہے جہاں لا² = ۱۲ یا لا = ± ۲ √۳ = ± ۳ء۵ تقریباً
اور اسی طرح یہ لا = ۰ کو کاٹتا ہے جہاں ما = ± ۳ء۵ تقریباً
یہ نقطے م، م، ل، ل شکل میں دکھائے گئے ہیں۔
پس ناقص کی شکل ہے جیسے اوپر دکھائی گئی ہے۔

باب ہفتم پر متفرق مشقیں

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو

۱- ۲ لا² - ۲ لا ما + ۲ ما² - ۲ لا - ۲ ما - ۳ = ۰

۲- ۶ لا² - ۴ لا ما + ۹ ما² - ۴۲ لا - ۲۲ ما + ۴۳ = ۰

۳- ۵ لا² + ۲ ما² + ۱۰ لا - ۱۲ ما + ۱۳ = ۰

۴- ۱۷ لا² + ۱۲ لا ما + ۲۲ ما² - ۴۰ لا - ۶۰ ما + ۴۴ = ۰

۵- ۱۱ لا² + ۶ لا ما + ۱۹ ما² - ۲۸ لا - ۴۴ ما - ۲۶ = ۰

۶- ۳ لا² + ۲ √۳ لا ما + ۲ ما² - ۲ √۸ لا - ۸ ما + ۸ = ۰

۷- لا² + لا ما + ما² = ۶

۸ - اوپر کی مشقوں ۱، ۳، ۵ میں جو منحنی دیے گئے ہیں اُن کے محوروں کی مساواتیں بلحاظ ابتدائی محوروں کے معلوم کرو۔

۹ - منحنی لا۲ + لا ما + ما۲ = ۱ کو کھینچو اور اس کا مقابلہ مشق ۷ کے منحنی کے ساتھ کرو، اس طرح اشتباہات دفعہ ۱۰۳ کی ضرورت کی توثیق کرو۔

باب ہشتم

زائدوں کا مرتسم کرنا

۱۱۵ - اب ہم باب ششم کے قاعدوں کو زائدوں کے مرتسم کرنے میں استعمال کرینگے جبکہ ان کی مساواتیں دی ہوئی ہوں، چونکہ منحنی دونوں جانب لا انتہا فاصلے تک پھیلتا ہے اس لئے اس کا مرتسم کرنا ناقص کی نسبت ذرا مشکل ہے لیکن تاہم بہت سا عمل دونوں صورتوں میں ایک ہی ہے۔ زائد کی صورت میں ہر ایک نصف محور کا طول اور سمت معلوم کرنیکے علاوہ یہ نہایت ضروری ہے کہ اس کے متقارب بھی معلوم کئے جائیں اور مرتسم کئے جائیں ورنہ یہ یقینی طور پر معلوم نہیں ہو سکتا کہ لا انتہا فاصلے پر دونوں شاخوں کی انتہائی سمتیں کیا ہیں۔

طریق عمل حسب ذیل ہے۔

۱ - منحنی کا مرکز اور منحنی کی مساوات معلوم کرو جبکہ مرکز مبدأ ہو -

۲ - محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کرو -

۳ - متقارب معلوم کرو اور انہیں مرتسم کرو -

امور بالا کے علاوہ مناسب ہے کہ تصدیق کی خاطر منحنی پر اور نقطے معلوم کئے جائیں، جن نقطوں پر ابتدائی محور منحنی کو کاٹتے ہیں اُن کو معلوم اور مرتسم کرنا کافی ہوگا لیکن اگر یہ محور منحنی کو حقیقی نقطوں پر نہ کاٹتے ہوں تو ایسے اور خط باسانی معلوم ہو سکتے ہیں جو اسے حقیقی نقطوں پر کاٹتے ہوں۔

مثال ۱ - جس منحنی کی مساوات

$$\text{لا}^2 + 10\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 - 12\,\text{لا} - 12\,\text{ما} + 6 = 0$$

ہے اُسے مرتسم کرو۔

(جو نوٹ مثال (۱) صفحہ ۱۳۹ پر درج کیا گیا ہے اُس کا اطلاق مثال ہذا پر بھی ہوتا ہے)

(ا) یہاں $\text{ا ب} - \text{ھ}^2 = 1 - 5^2 =$ ایک منفی مقدار

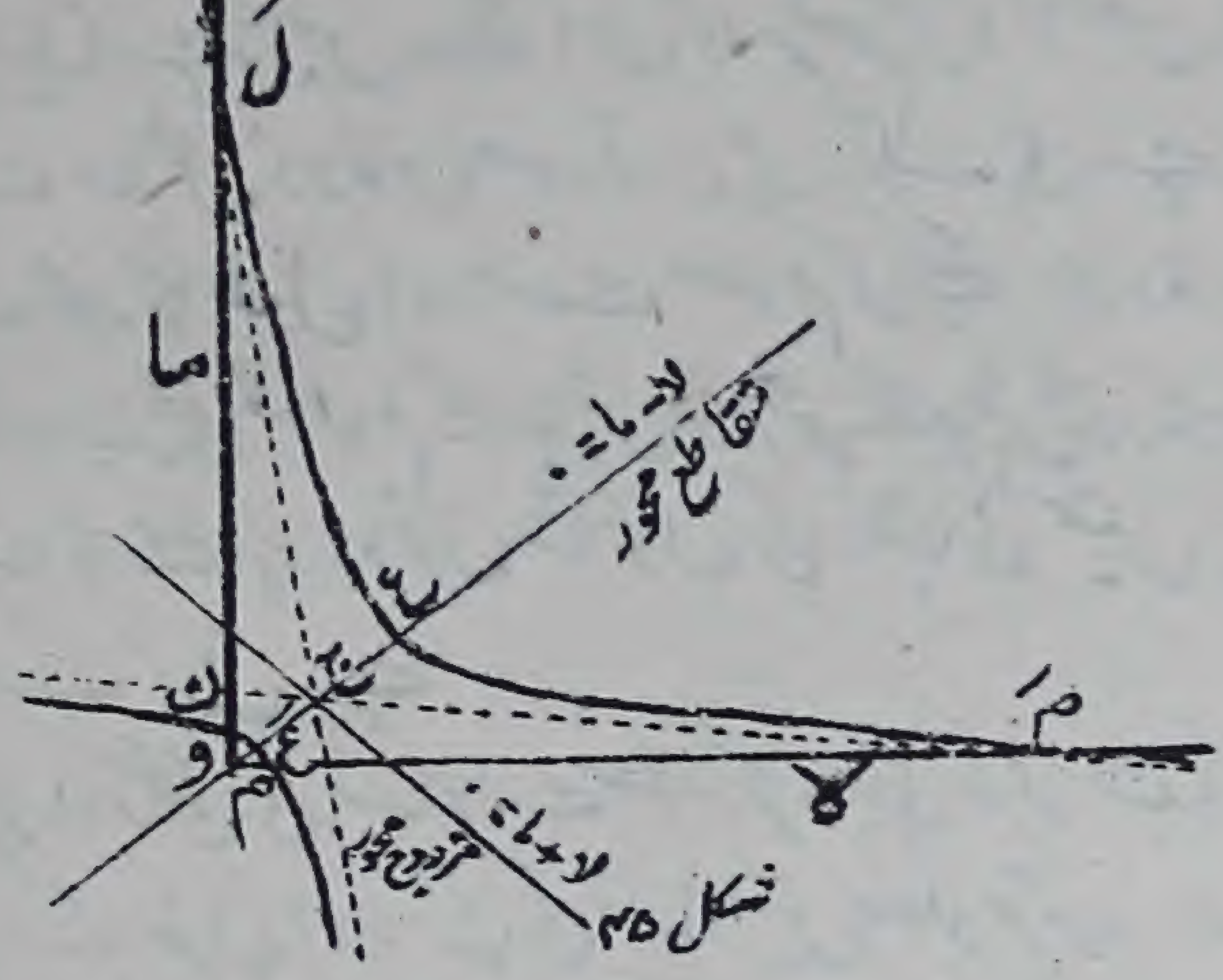
پس منحنی قطع زائد ہے (دفعہ ۱۰۶)

(ب) مساواتیں جن سے مرکز کے محدد حاصل ہوتے ہیں یہ ہیں

$\text{لا} + 5\,\text{ما} - 6 = 0$ اور $5\,\text{لا} + \text{ما} - 6 = 0$

جن سے لا = ۱، ما = ۱

[ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے اپنے عمل کی تصدیق کرو]



درجہ اول کی رقموں میں مرکز کے نصف محدد درج کرنے سے ہمیں بلحاظ مرکز کے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^2 + 10\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 - 12\times\frac{1}{2} - 12\times\frac{1}{2} + 6 = 0$$

یعنی $$\text{لا}^2 + 10\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 = 6$$

یعنی $$\frac{1}{6}\,\text{لا}^2 + \frac{10}{6}\,\text{لا ما} + \frac{1}{6}\,\text{ما}^2 =$$ (دفعہ ۱۰۳ کی اشتباہ ملاحظہ ہو)

(د) نصف محور اِن مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$\left(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(\text{ب}_1 - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) = \text{ھ}_1^2$$

یعنی $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2$

یعنی $\frac{1}{\text{ر}^4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{\text{ر}^2} - \frac{2}{3} = 0$

لہذا $\text{ر}^2 = 1$ یا $-\frac{3}{2}$

(قطع زائد میں ر² کی ایک قیمت منفی ہوتی ہے)

اسلئے ظاہر ہے کہ منحنی قطع زائد ہے جس کا متقاطع نصف محور ۱ ہے

اور مزدوج نصف محور $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ہے۔

(پس جب منحنی کے اصلی محوروں کو محددوں کے محور مانا جائے تو منحنی کی مساوات یہ ہوجاتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{1} - \frac{\text{ما}^2}{\frac{3}{2}} = 1 \quad \text{یا} \quad \text{لا}^2 - \frac{2}{3}\,\text{ما}^2 = 1)$$

(ع) متقاطع اور مزدوج محوروں کی مساواتیں اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\left(\text{ا}_1 - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا} + \text{ھ}_1\,\text{ما} = 0$$

جب ر² = ۱ (متقاطع محور) تو مساوات بالا حسب ذیل ہوجاتی ہے

$$\left(\frac{1}{6} - 1\right)\text{لا} + \frac{5}{6}\,\text{ما} = 0 \quad \text{یا} \quad \text{لا} - \text{ما} = 0$$

جب ر² = − ۳/۲ (مزدوج محور) تو مساوات بالا ہوجاتی ہے

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)\text{لا} + \frac{5}{6}\,\text{ما} = 0 \quad \text{یا} \quad \text{لا} + \text{ما} = 0$$

(اس نتیجہ کے صحیح ہونے کی تصدیق اس امر سے ہوتی ہے کہ یہ خط صریحاً ایک دوسرے پر عمود ہیں)

مرکز ج میں سے یہ محور کھینچو اور متقاطع محور لا − ما = ۰ پر اس کے سروں ع، عَ کے نشان اسطرح لگاؤ کہ ج ع اور ج عَ میں سے ہر ایک ایک کے مساوی ہو۔

(قطع زائد کی صورت میں مزدوج نصف محور کا جو طول ہے اسکے جواب میں نقطوں کے نشان لگانے کی ضرورت نہیں کیونکہ ان سے منحنی پر کا کوئی نقطہ حاصل نہیں ہوگا۔ یہ کمی منحنی مذکور کے متقارب کھینچنے سے بخوبی پوری ہوسکتی ہے جیسا ذیل میں بتایا گیا ہے)

(ف) مرکز کو مبدأ مان کر متقاربوں کی مساوات یہ ہے

$لا^{۲} + ۱۰ لا ما + ما^{۲} = ۰$ (دیکھو دفعہ ۱۱۰ نتیجہ صریح ۲)

یعنی $ما = (-۵ \pm ۲\sqrt{۶})\ لا$

یا تقریباً $ما = -۱ء \times لا$ اور $ما = -۹ء۹\ لا$ دو متقارب ہیں۔

اب ہم متقاربوں کو مرتسم کر سکتے ہیں اور متقاطع محور کے مقام سے معلوم ہو جاتا ہے کہ منحنی متقاربوں کے درمیان کے زاویہ منفرجہ میں واقع ہوتا ہے (اس منزل پر اپنے عمل کی تصدیق یہ دیکھنے سے کرو کہ منحنی کے محور متقاربوں کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتے معلوم ہوتے ہیں۔ یہ بہت ضروری ہے)

(گ) جہاں خط د لا منحنی سے ملتا ہے وہاں لا = ۵ء یا ۵ء۱۱ (ان نتائج سے نقاط م اور مَ حاصل ہوتے ہیں) اور جہاں و ما منحنی سے ملتا ہے وہاں ما = ۵ء یا ۵ء۱۱ (ان سے ل اور لَ حاصل ہوتے ہیں) ان نقطوں کو مرتسم کر لینے کے بعد منحنی کی شکل کے متعلق خاصہ اندازہ ہو سکتا ہے۔

[طالب علم کو چاہیئے کہ ایسی صورتوں میں متقاربوں کے مرتسم کرنے میں بڑی احتیاط سے کام لے ورنہ مرکز سے دور کے حصوں میں منحنی کے مرتسم کرنے میں اسے بڑی دقت پیش آئیگی]

مثال ۲۔ جس منحنی کی مساوات

$$۳ لا^{۲} + ۴ لا ما = ۶$$

ہے اُسے مرتسم کرو۔

(ا) چونکہ $(ا ب - ھ^{۲}) = -۴$ یعنی منفی ہے اس لئے منحنی قطع زائد ہوگا۔

(ب) منحنی کا مرکز مبدأ پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ مساوات میں درجہ اول کی کوئی رقم نہیں ہے۔ اس لئے ہم فوراً محاور کے طول معلوم کرنے کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔

(ج) ۶ پر تقسیم کرنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{۳}{۶} لا^{۲} + \frac{۴}{۶} لا ما = ۱$$

نصف محوروں کے لئے مساوات ہے

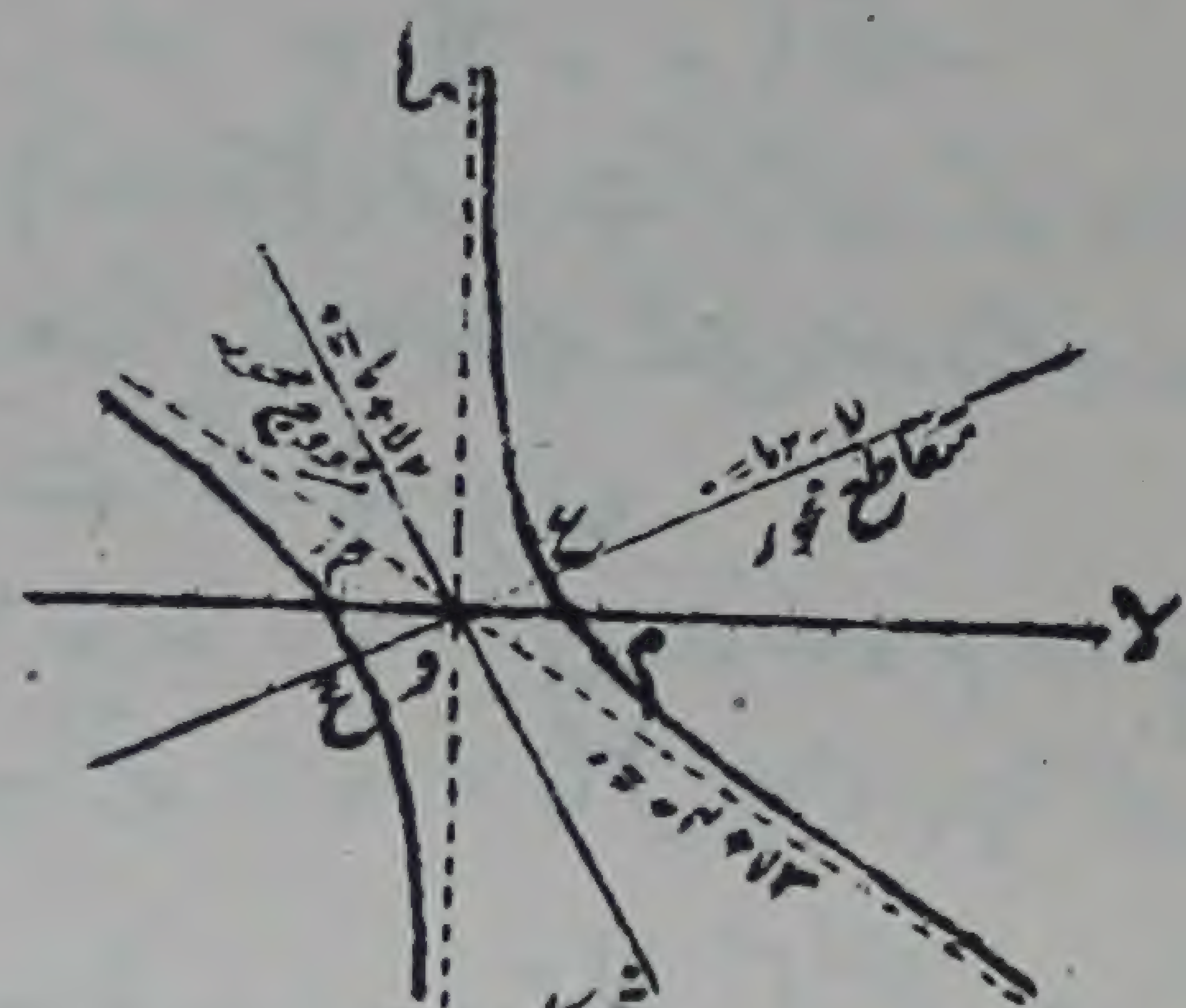
$$\left(\text{ا}_1-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(\text{ب}_1-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)=\text{ح}_1^2$$

جو قیمتیں مندرج کرنے سے حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(0-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{یا}\quad \frac{1}{\text{ر}^4}-\frac{1}{2\,\text{ر}^2}-\frac{1}{9}=0$$

$$\text{جس سے}\quad \text{ر}^2=-6\ \text{یا}\ \frac{3}{2}$$



شکل ۴۳

پس منحنی قطع زائد ہے جس کا نصف متقاطع محور ہے:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{6}=1.22\ \text{تقریباً}$$

اور جس کا نصف مزدوج محور $=\sqrt{6}=2.45$

[اسلئے اصلی محوروں کے لحاظ سے منحنی کی مساوات یہ ہو جاتی ہے۔

$$\frac{\text{لا}^2}{\frac{3}{2}}-\frac{\text{ما}^2}{6}=1\quad \text{یا}\quad \frac{2}{3}\text{لا}^2-\frac{1}{6}\text{ما}^2=1\ ]$$

(د) چونکہ محور کی مساوات

$$\left(\text{ا}_1-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا}+\text{ح}_1\,\text{ما}=0\quad \text{ہے اسلئے}$$

$\text{ر}^2=\frac{3}{2}$ سے متقاطع محور کی مساوات $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\text{لا}+\frac{1}{3}\text{ما}=0$

یعنی $\text{لا}-2\,\text{ما}=0$ حاصل ہوتی ہے۔

ز = -٦ سے مزدوج محور کی مساوات (۱/۲ + ۱/٦) لا + ۱/۳ ما = ۰
یعنی ۲ لا + ما = ۰ حاصل ہوتی ہے۔
تصدیق کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو علی القوائم خطوط کی مساواتیں ہیں۔

اِن خطوں کو مرتسم کرو جیسا کہ شکل بالا میں کیا گیا ہے اور خط لا - ۲ ما = ۰ پر
و ع = و عَ = ۲۲ء۱ تقریباً قطع کرو۔

(ع) متقارب ۳ لا^۲ + ۴ لا ما = ۰ ہیں
یعنی لا = ۰ اور ۳ لا + ۴ ما = ۰

اِن خطوں کو کھینچو (یہ بات قابل غور ہے کہ منحنی کے محور متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے معلوم ہوتے ہیں اور درحقیقت ہونا بھی یہی چاہیئے)

(گ) ما = ۰ منحنی سے ملتا ہے جہاں
۳ لا^۲ = ٦ یا لا = ± √۲ اِن سے نقاط م اور مَ حاصل ہوتے ہیں۔
لا = ۰ سے عجیب و غریب نتیجہ ۰ = ٦ حاصل ہوتا ہے لیکن مساوات کو

ما = (٦ - ۳ لا^۲)/(۴ لا) = ٦/(۴ لا) - (۳ لا)/۴ کی شکل میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۰ سے ما = ∞ حاصل ہوتا ہے یعنی منحنی محور ما سے لا متناہی فاصلہ پر ملتا ہے۔ اس سے اِس بات کی تصدیق ہوتی ہے کہ لا = ۰ ایک متقارب ہے اور یہ امر ہم پہلے بھی معلوم کر چکے ہیں۔

باب ہشتم پر متفرق مشقیں

ذیل کے زائدوں کو مرتسم کرو

۱- ۷ لا^۲ - ٦۰ لا ما + ۳۲ ما^۲ - ۱۰٦ لا + ٦۸ ما - ۳۷ = ۰
۲- ۲ لا^۲ + ۸ لا ما + ۲ ما^۲ - ۲ لا - ۲ ما - ۵ = ۰
۳- ٦ لا^۲ - ٦۰ لا ما - ۱۹ ما^۲ + ۴۸ لا + ۹۸ ما - ٦۰ = ۰
۴- ۳ لا^۲ - ۸ لا ما - ۳ ما^۲ - ۴ لا + ۲۲ ما - ۱۲ = ۰

۵- ۳ لا² - ۲ ما² + ۶ لا - ۴ ما - ۵ = ۰

۶- ۳۶ (لا² - ما²) + ۴۸ لا - ۳۶ ما - ۱۰۱ = ۰

۷- ۷ لا² + ۶ لا ما - ما² = ۴   ۸- ۶ لا ما + ۸ ما² = ۳

۹- لا² + ۲ لا ما √۳ - ما² - لا (۲ - ۴ √۳) + ما (۲ √۳ + ۴) - ۴ √۳ - ۱ = ۰

باب نہم

عام مساوات کی تحویل جبکہ اب = ھ²

۱۱۶- عام مساوات جبکہ اب = ھ²۔ باب ششم میں ہم نے عام مساوات کی ایک خاص صورت کو مستثنےٰ کر دیا تھا، اس جگہ ہم اس منحنی پر بحث کرینگے جو اس خاص صورت سے تعبیر ہوتا ہے۔ ہم وہاں دیکھ چکے ہیں کہ جب اب = ھ² تو ہم کسی نئے نقطہ کو مبدا ماننے سے درجۂ اول کی رقوم کو خارج نہیں کر سکتے، اس لئے جس طریقہ کا ہم نے اوپر ذکر کیا ہے اس کا اطلاق اس صورت پر نہیں ہوتا۔

جب اب = ھ² تو دوسرے درجہ کی رقمیں

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما²

مربع کامل بناتی ہیں، فرض کرو کہ یہ مربع

(عہ لا + بہ ما)² ہے۔

تب ا = عہ²، ھ = عہ بہ اور ب = بہ²

اور مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے

(عہ لا + بہ ما)² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

قبل ازیں ہم دفعہ ۵۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ اس قسم کی مساوات قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۱۷- اگر عام مساوات قطع مکافی کو تعبیر کرے تو (ا) مکافی کے محور اور رأس پر کے مماس کی مساواتیں معلوم کرو نیز (ب) اس کے وتر

خاص کا طول دریافت کرو۔
ہم جانتے ہیں کہ اگر کوئی نقطہ قطع مکافی پر واقع ہو اور اس نقطہ سے دو عمود کھینچے جائیں ایک مکافی کے محور پر اور دوسرا اس کے راس پر کے مماس پر تو پہلے عمود کا مربع موخرالذکر عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔ پس دفعہ ہذا کے مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہمیں دو ایسے خط معلوم کرنے چاہئیں جو مساوات زیر بحث کے منحنی کے ساتھ مذکورہ بالا ربط رکھتے ہوں، نیز یاد رہے کہ یہ دونوں خط ایک دوسرے پر عمود وار ہونے چاہئیں۔

جب ہم ان کو معلوم کرینگے تو وتر خاص کے طول کے ذریعہ منحنی کے ناپ کا اندازہ ہوسکیگا عام مساوات پر بحث کرنے سے پہلے ہم اس طریقہ کی توضیح ایک خاص مثال کے ذریعہ کرینگے۔

مثال ۔ قطع مکافی ۱۶ لا^{۲} ـ ۲۴ لا ما + ۹ ما^{۲} ـ ۴۴ لا ـ ۲۴ ما + ۴۹ = ۰
کا (۱) محور اور راس پر کا مماس (۲) نیز اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

(۱) مساوات بالا اس شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

(۴ لا ـ ۳ ما)^{۲} = ۴۴ لا + ۲۴ ما ـ ۴۹ .... (۱)

اب ۴ لا ـ ۳ ما اور ۴۴ لا + ۲۴ ما ـ ۴۹ متناسب ہیں ان عمودوں کے جو نقطہ (لا، ما) سے خطوط ۴ لا ـ ۳ ما = ۰ اور ۴۴ لا + ۲۴ ما ـ ۴۹ = ۰ پر کھینچے جائیں۔

پس مساوات (۱) سے یہ تعبیر ہوتا ہے کہ منحنی کے کسی نقطہ سے جو عمود خط ۴ لا ـ ۳ ما = ۰ پر کھینچا جائے اس کا مربع اُس عمود کے متناسب ہوتا ہے جو نقطۂ مذکورہ سے خط ۴۴ لا + ۲۴ ما ـ ۴۹ = ۰ پر کھینچا جائے۔
اگر یہ خط ایک دوسرے پر عمود ہوتے تو مطلوبہ خطوط یہی ہوتے (دیکھو دفعہ ۱۴۴) مگر ظاہر ہے کہ یہ خط ایک دوسرے پر عمود نہیں ہیں تاہم ہم مساوات (۱) پر ذیل کا عمل کرنے سے نتیجہ مطلوبہ حاصل کرسکتے ہیں۔
مساوات (۱) کے دائیں جانب کے رُکن میں ایک مقدار لہ داخل کرو،

تب (۴ لا − ۳ ما + له)۲ = ...

ایسا کرنے سے مساوات (ا) کے دائیں طرف مقدار ۸ له لا − ۶ له ما + له۲ کا اضافہ ہو جاتا ہے۔ اس لیئے ہمیں مساوات کے بائیں طرف بھی یہی مقدار جمع کرنی چاہیئے تاکہ مساوات قائم رہے۔ اس طرح ہمیں ذیل کی مساوات حاصل ہوتی ہے

(۴ لا − ۳ ما + له)۲ = لا (۴۴ + ۸ له) + ما (۴۲ − ۶ له) + له۲ − ۴۹

اب له کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے خطوط ۴ لا − ۳ ما + له = ۰ اور لا (۴۴ + ۸ له) + ما (۴۲ − ۶ له) + له۲ − ۴۹ = ۰ باہم عمود وار ہو جائیں اس لیئے لازماً

۴ (۴۴ + ۸ له) − ۳ (۴۲ − ۶ له) = ۰ یا ۵۰ + ۵۰ له = ۰۔ (دیکھو حصہ اول دفعہ ۱۹)

∴ له = −۱

پس مساوات زیر بحث ذیل کی شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

(۴ لا − ۳ ما − ۱)۲ = ۳۶ لا + ۴۸ ما − ۴۸ = ۱۲ (۳ لا + ۴ ما − ۴) ...(ب)

خطوط ۴ لا − ۳ ما − ۱ = ۰ اور ۳ لا + ۴ ما − ۴ = ۰ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، پس مساوات (ب) اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے خط ۴ لا − ۳ ما − ۱ = ۰ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع اُس عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے جو نقطۂ مذکورہ سے خط ۳ لا + ۴ ما − ۴ = ۰ پر (جو اول الذکر خط پر عمود وار ہے) کھینچا جائے۔

پس (دفعہ ۱۴۱) ۴ لا − ۳ ما − ۱ = ۰ منحنی کا محور ہے اور ۳ لا + ۴ ما − ۴ = ۰ راس پر کا مماس ہے۔

انتباہ — بالعموم طالب علم کے لیئے یہ تمیز کرنا مشکل ہوتا ہے کہ ان دونوں مساواتوں میں سے کونسی مساوات محور کو تعبیر کرتی ہے اور کونسی راس پر کے مماس کو۔ یہ دقت مساوات زیر بحث کا مساوات ما۲ = ۴ ا لا کے ساتھ مقابلہ کرنے سے رفع ہو سکتی ہے جس میں صریحاً ما = ۰ (یعنی لا کا محور)

منحنی کا محور ہوتا ہے، پس مربع والی رقم منحنی کے محور کو تعبیر کرتی ہے۔
(ب) ۴ لا - ۳ ما - ۱ = ۰ پر کے عمود کا مربع

(۴ لا - ۳ ما - ۱)^2 / ۲۵

ہے اور ۳ لا + ۴ ما - ۴ = ۰ پر کے عمود کا طول

(۳ لا + ۴ ما - ۴) / ۵ ہے۔

پس وترخاص ۲ ل یا ۴ ا مساوات

(۴ لا - ۳ ما - ۱)^2 / ۲۵ = ۲ ل (۳ لا + ۴ ما - ۴) / ۵ ......(ج)

سے حاصل ہوتا ہے، لیکن چونکہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہے اس لئے

(۴ لا - ۳ ما - ۱)^2 = ۱۲ (۳ لا + ۴ ما - ۴) ....(ب)

(ج) اور (ب) سے بہ عمل تقسیم

۱۲ / ۲۵ = ۲ ل × ۱ / ۵

∴ وترخاص = ۱۲ / ۵

چونکہ (۴ لا - ۳ ما - ۱)^2 مثبت ہے اس لئے منحنی پر کے سب نقطوں کے لئے مقدار ۳ لا + ۴ ما - ۴ مثبت ہوگی، پس منحنی راس پر کے مماس ۳ لا + ۴ ما - ۴ = ۰ کے اس طرف واقع ہے جس طرف کے سب نقطوں کے لئے مقدار ۳ لا + ۴ ما - ۴ مثبت ہوتی ہے۔

لیکن مبدأ ۳ لا + ۴ ما - ۴ = ۰ کے اس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے مقدار ۳ لا + ۴ ما - ۴ منفی ہے (دیکھو حصۂ اول دفعہ ۱۳)

پس مبدأ اور منحنی خط ۳ لا + ۴ ما - ۴ = ۰ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں،
یہ آخری نتیجہ بہت مفید ثابت ہوگا جب ہم قطع مکافی کو مرتسم کرینگے۔

انتباہ۔ اگر منحنی کی مساوات (ب)

اس شکل (۴ لا − ۳ ما − ۱)^{2} = − ۱۲ (۳ لا + ۴ ما − ۴)
میں نکلتی تو منحنی پر کے سب نقطوں کے لئے مقدار − ۱۲ (۳ لا + ۴ ما − ۴)
لازماً مثبت ہوتی یعنی مقدار ۳ لا + ۴ ما − ۴ منفی ہوتی، اس صورت میں منحنی اور مبدأ دونوں خط
۳ لا + ۴ ما − ۴ = ۰ کے ایک ہی طرف واقع ہوتے۔

اس امر کے متعلق مزید مثالیں باب آئندہ میں دی جائیں گی۔

اس منزل پر طالب علم کو باب ہذا کے اختتام کی پہلی سات مثالیں حل کرنی چاہئیں۔

۱۱۸ − عام صورت − عام مساوات کو اس شکل

(عہ لا + بہ ما)^{2} = − ۲ گ لا − ۲ ف ما − ج

میں لکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر منحنی کے کسی نقطہ سے خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع اس عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کھینچا جائے (دیکھو دفعات ۵۱، ۵۲)

اگر یہ دونوں خط ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے تو یہ مطلوبہ خطوں کو تعبیر کرتے، لیکن بالعموم یہ علی القوائم نہیں ہوتے، اس لئے ہم مساوات ذیل کو اس شکل میں لکھتے ہیں

(عہ لا + بہ ما + لہ)^{2} = (− ۲ گ لا − ۲ ف ما − ج)
+ (۲ عہ لہ لا + ۲ بہ لہ ما + لہ^{2})
= − ۲ لا (گ − عہ لہ) − ۲ ما (ف − بہ لہ) − ج + لہ^{2}

اور دیکھتے ہیں کہ خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود کا مربع ۲ لا (گ − عہ لہ) + ۲ ما (ف − بہ لہ) + ج − لہ^{2} = ۰ پر کے عمود کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لئے اب ہم لہ کی وہ قیمت معلوم کرتے ہیں جس سے یہ خط ایک دوسرے پر عمود وار ہو جائیں اس کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے

عہ (گ − عہ لہ) + بہ (ف − بہ لہ) = ۰ یا لہ = $\frac{\text{عہ گ + بہ ف}}{\text{عہ}^{2} + \text{بہ}^{2}}$

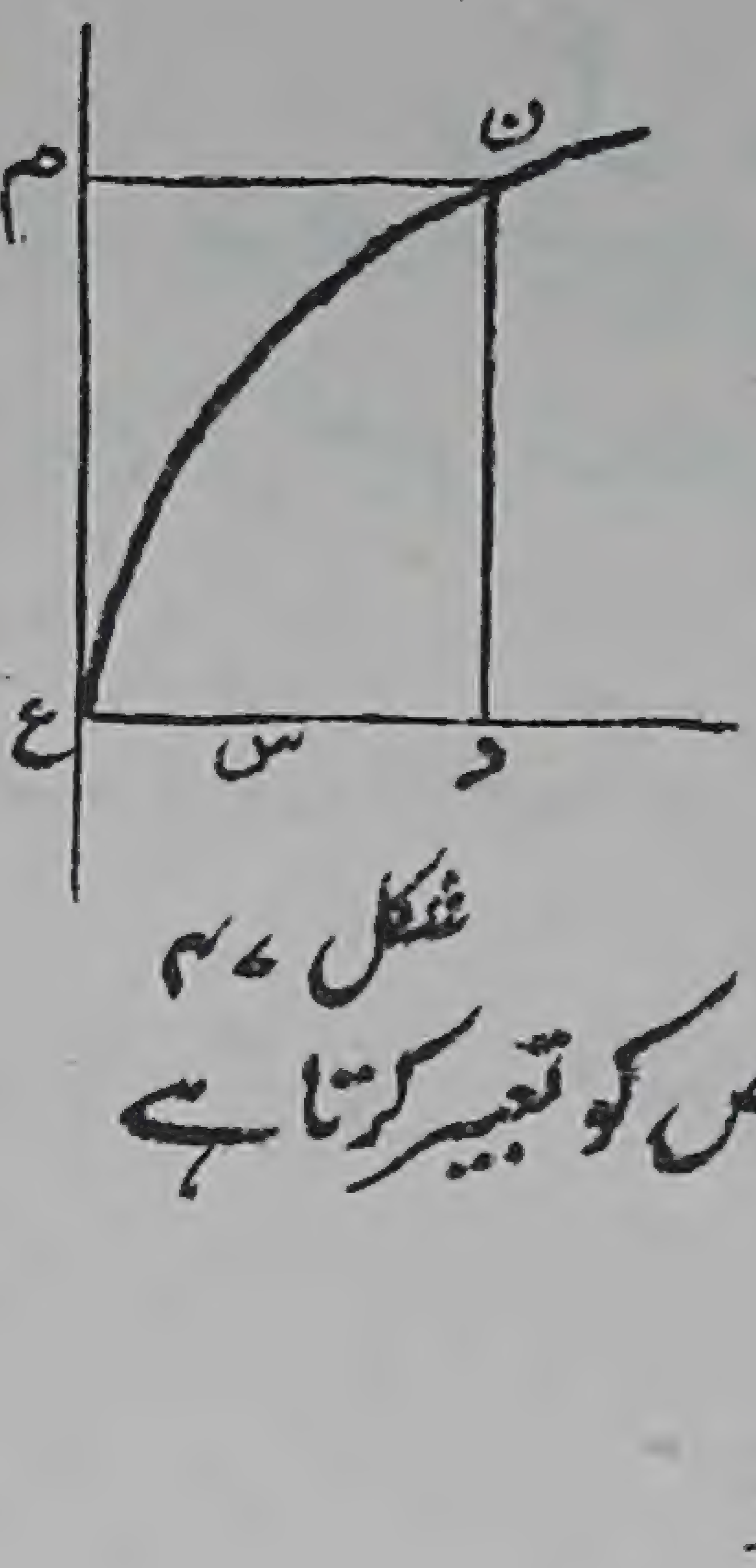
جب لہ کی قیمت یہ ہو تو عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

$$۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ف - بہ لہ) + ج - لہ^{۲} = ۰$$

پر کے عمود کا طول۔

اور یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار ہیں، اس لئے مساوات زیر بحث قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جسکا محور پہلے خط سے تعبیر ہوتا ہے اور راس پر کا مماس دوسرے خط سے۔

انتباہ ـــ جب طالب علم متذکرۂ بالا طریقہ کا اطلاق کسی خاص مثال پر کرنے لگے تو اُس کو چاہئے کہ محض ضابطے استعمال کرنے کی بجائے عام سلک استدلال سے کام لے۔



شکل ۷۴

۱۹۱ـ مذکورہ بالا منحنی کا وترِ خاص معلوم کرنا۔

منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور راس میں سے گزرنے والے مماس پر عمود ن م کھینچا گیا ہے، نیز ن میں سے محور پر عمود ن د نکالا گیا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

ن د^{۲} = ۲ ل × ن م جہاں ۲ ل وترِ خاص کو تعبیر کرتا ہے

اوپر کی مساواتوں کو استعمال کرنے سے

$$ن د = \frac{عہ لا + بہ ما + لہ}{\sqrt{عہ^{۲} + بہ^{۲}}}$$

$$ن م = \frac{۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ف - بہ لہ) + ج - لہ^{۲}}{۲ \sqrt{(گ - عہ لہ)^{۲} + (ف - بہ لہ)^{۲}}}$$

$$اور لہ = \frac{عہ گ + بہ ف}{عہ^{۲} + بہ^{۲}}$$

∴ (عہ لا + بہ ما + لہ)۲ / (عہ۲ + بہ۲) = ۲ ل × [۲ لا (گ − عہ لہ) + ۲ ما (ف − بہ لہ) + ج − لہ۲] / [۲ √ (گ − عہ لہ)۲ + (ف − بہ لہ)۲]

لیکن چونکہ لا، ما منحنی پر ہے، اسلئے

(عہ لا + بہ ما + لہ)۲ = − ۲ لا (گ − عہ لہ) − ۲ ما (ف − بہ لہ) − ج + لہ۲

لہذا تقسیم کرنے سے

۲ ل = − ۲ √ (گ − عہ لہ)۲ + (ف − بہ لہ)۲ / (عہ۲ + بہ۲)

جہاں لہ = (عہ گ + بہ ف) / (عہ۲ + بہ۲)

(علامت کی تشخیص ضروری نہیں کیونکہ ہمیں محض وترِ خاص کے طول سے سروکار ہے۔

اب (گ − عہ لہ)۲ + (ف − بہ لہ)۲

= گ۲ + ف۲ − لہ (عہ گ + بہ ف) + لہ {لہ (عہ۲ + بہ۲) − (عہ گ + بہ ف)}

= [(گ۲ + ف۲)(عہ۲ + بہ۲) − (عہ گ + بہ ف)۲] / (عہ۲ + بہ۲)

[کیونکہ لہ (عہ۲ + بہ۲) − (عہ گ + بہ ف) = ۰]

= (عہ ف − بہ گ)۲ / (عہ۲ + بہ۲)

∴ ۲ ل = ۲ (عہ ف − بہ گ) / (عہ۲ + بہ۲)^(۱/۲) (عہ۲ + بہ۲)

$$= \frac{\text{۲ (عہ ف - بہ گ)}}{(\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

لیکن $\text{عہ} = \sqrt{\text{ا}}$ اور $\text{بہ} = \sqrt{\text{ب}}$

$$\therefore \text{۲ ل} = \frac{\text{۲ (ف} \sqrt{\text{ا}} \text{ - گ} \sqrt{\text{ب}}\text{)}}{(\text{ا + ب})^{\frac{۳}{۲}}}$$

ایک حد تک پورے عمل کا اعادہ کرنے کے لئے اوپر ہم نے ضرورت سے زیادہ وضاحت سے کام لیا ہے، ورنہ یہ از خود عیاں ہے کہ جو تفاعل پہلے لکھے گئے ہیں اُن کے شمار کنندے مساوی ہیں لہٰذا ان کو لکھنے کے بغیر ہی کاٹ دیا جا سکتا ہے۔

۱۲۰ — مستثنیٰ صورت

قطع مکافی کی عام مساوات پر بحث کرتے وقت ہم نے دیکھا کہ منحنی پر کے کسی نقطہ کے لئے

$$(\text{عہ لا + بہ ما + لہ})^{۲} = \text{-۲ لا (گ - عہ لہ) - ۲ ما (ف - بہ لہ) - ج + لہ}^{۲}$$

اور دو خطوط مستقیم

$$\text{عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ف - بہ لہ) + ج - لہ}^{۲} = ۰$$

ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اگر

$$\text{لہ} = \frac{\text{عہ گ + بہ ف}}{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}$$

اب اگر $\frac{\text{گ}}{\text{عہ}} = \frac{\text{ف}}{\text{بہ}}$ تو ان میں سے ہر ایک $= \frac{\text{عہ گ + بہ ف}}{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}} = \text{لہ}$

$\therefore$ گ - عہ لہ = ۰ اور ف - بہ لہ = ۰

اس لئے بائیں طرف کا رکن مستقل ہو جاتا ہے اور ثبوت کا باقی حصہ درست نہیں رہتا۔ اس لئے اس صورت میں

(عہ لا + بہ ما + لہ)^2 = لہ^2 − ج

یا عہ لا + بہ ما + لہ = ± $\sqrt{\text{لہ}^2 - \text{ج}}$

جس سے صریحاً دو متوازی خط تعبیر ہوتے ہیں۔

پس مساوات ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
سے دو متوازی خطوطِ مستقیم تعبیر ہوتے ہیں اگر

اب = ھ^2 اور گ بہ = ف عہ

یعنی اگر اب = ھ^2 اور گ $\sqrt{\text{ب}}$ = ف $\sqrt{\text{ا}}$

یعنی اگر اب = ھ^2 اور ا ف^2 = ب گ^2

یہ صورت محض دیکھنے سے ہی پہچانی جا سکتی ہے کیونکہ

ف / گ = عہ / بہ اس لئے ظاہر ہے کہ عہ لا + بہ ما، گ لا + ف ما کو محض کسی عددی جزو ضربی سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے اور مساوات کی شکل یہ ہوتی ہے

(عہ لا + بہ ما)^2 + فہ (عہ لا + بہ ما) + ج = ۰

اوپر کی مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے عہ لا + بہ ما کی دو قیمتیں ملتی ہیں جن سے دو متوازی خطوطِ مستقیم حاصل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر علاوہ ازایں لہ^2 = ج تو دونوں خطوطِ مستقیم ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

مثال ۔ معلوم کرو کہ مساوات

۹ لا^2 + ۲۴ لا ما + ۱۶ ما^2 − ۹ لا − ۱۲ ما + ۲ = ۰

سے کیا تعبیر ہوتا ہے۔

یہ مساوات یوں بھی لکھی جا سکتی ہے۔

(۳ لا + ۴ ما)^2 − ۹ لا − ۱۲ ما + ۲ = ۰

اور اسلئے باب ہذا کے مضمون کے تحت میں آتی ہے۔

چونکہ ۹ لا + ۱۲ ما = ۳ (۳ لا + ۴ ما)

اس لئے اس مساوات کو اور بھی مختصر کیا جا سکتا ہے اور یہ ہو جاتی ہے

(۳ لا + ۴ ما)^2 − ۳ (۳ لا + ۴ ما) + ۲ = ۰

یا (۳ لا + ۴ ما − ۲) (۳ لا + ۴ ما − ۱) = ۰

پس مساواتِ بالا سے دو متوازی خطوطِ مستقیم تعبیر ہوتے ہیں

۳ لا + ۴ ما − ۲ = ۰ اور ۳ لا + ۴ ما − ۱ = ۰

اگر ہم ایسے عمل کرتے جیسے قطع مکافی کی صورت میں کرتے ہیں تو بھی بالآخر اسی نتیجہ پر پہنچتے لیکن ربطِ مذکور کو مشاہدہ کر لینے سے ہمارے عمل میں بہت اختصار ہو جاتا ہے۔

باب نہم پر متفرق مثالیں

ذیل کے مکافیوں میں سے ہر ایک کا محور اور راس پر کا مماس معلوم کرو

۱۔ ما^2 = ۳ لا + ۲ ۲۔ ما^2 = لا + ما + ۱

۳۔ لا^2 = لا + ما + ۱ ۴۔ (لا + ما)^2 = ۳ (لا − ما + ۱)

۵۔ (لا + ما)^2 − لا + ۵ ما + ۴ = ۰

۶۔ ۹ لا^2 + ۲۴ لا ما + ۱۶ ما^2 − ۹۸ لا + ۱۱ ما − ۹۴ = ۰

۷۔ اوپر کے مکافیوں کے وترِ خاص بھی معلوم کرو

ذیل کی مساواتوں سے جو منحنی تعبیر ہوتے ہیں ان پر بحث کرو۔

۸۔ لا^2 + ۲ لا ما + ما^2 = ۴

۹۔ لا^2 − ۲ لا ما + ما^2 + ۷ لا − ۷ ما + ۶ = ۰

۱۰۔ (ف لا + ق ما)^2 + ر لا + س ما + ت = ۰ جہاں ر/س = ف/ق

۱۱۔ ۴ لا^2 + ۴ لا ما + ما^2 + ۴ لا + ۲ ما + ۱ = ۰

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات (ع لا + به ما)^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

دو متوازی خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اگر ع ف − به گ = ۰۔

اس امر کی تصدیق کرو کہ اس صورت میں شرط

ا ب ج + ۲ ف گ ھ − ا ف^2 − ب گ^2 − ج ھ^2 = ۰ پوری ہوتی ہے۔

نوٹ۔ امثلہ ۱ تا ۷ کے نتائج باب دہم کی مشقوں کے حل کرنے میں کارآمد ہوں گے۔

باب دہم

مکافیوں کی ترسیم

۱۲۱ — اب ہم باب گذشتہ کے طریقوں کو مکافیوں کے مرتسم کرنے میں استعمال کرینگے جبکہ ان کی مساواتیں معلوم ہوں ۔ اگر عام مساوات

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

قطع مکافی کو تعبیر کرے تو ا ب = ھ^{2}

اس امر کا اطمینان کر لینے کے بعد ہم باب گذشتہ کے طریقوں کی مدد سے راس پر کا مماس، محور اور وتر خاص معلوم کر لیتے ہیں، اس کے بعد منحنی کی ترسیم میں کوئی دقت باقی نہیں رہتی لیکن تصدیق کے طور پر ہمیں ہمیشہ منحنی پر کے چند نقطے معلوم کر لینے چاہئیں مثلاً وہ نقطے جہاں مکافی حوالہ کے محوروں کو قطع کرتا ہے۔ اگر یہ نقطے خیالی ہوں تو باآسانی کوئی اور خط معلوم ہو سکتا ہے جس کو مکافی مذکور حقیقی نقطوں پر ملتا ہو۔

مثال ۱ — جس منحنی کی مساوات حسب ذیل ہے اُسے مرتسم کرو

لا^{2} + ۲ لا ما + ما^{2} − ۶ لا − ۲ ما + ۴ = ۰

(ا) یہاں ا ب − ھ^{2} = ۱ × ۱ − ۱^{2} = ۰ ۔ لہذا منحنی مکافی ہے۔

(ب) اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے ایک عمود خط لا + ما = ۰ پر کھینچا جائے اور دوسرا عمود خط ۶ لا + ۲ ما − ۴ = ۰ پر کھینچا جائے تو پہلے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دوسرے عمود کا طول کیونکہ

(لا + ما)^{2} = ۶ لا + ۲ ما − ۴

یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار نہیں ہیں، لیکن مساوات حسب ذیل شکل میں بھی

لکھی جا سکتی ہے

(لا + ما + لہ)² = لا (۶ + ۲ لہ) + ما (۲ + ۲ لہ) − ۴ + لہ²

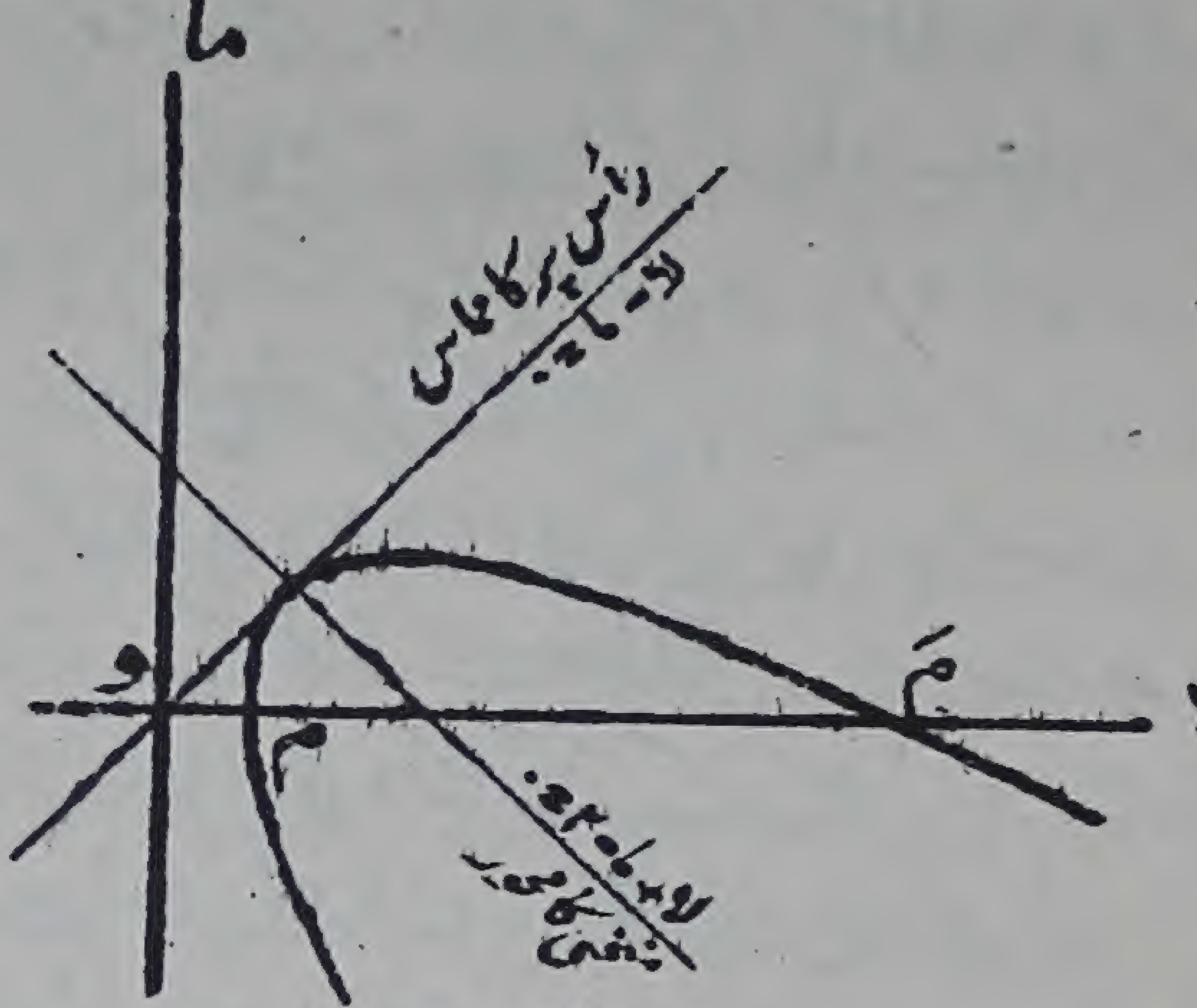
اور خط لا + ما + لہ = ۰ اور لا (۶ + ۲ لہ) + ما (۲ + ۲ لہ) − ۴ + لہ² = ۰
ایک دوسرے پر عمود وار ہوں گے اگر

۶ + ۲ لہ + ۲ + ۲ لہ = ۰

یعنی اگر لہ = −۲

(ج) پس (لا + ما − ۲)² = ۲ (لا − ما) .... (۱)

اور خط لا + ما − ۲ = ۰ اور لا − ما = ۰ ایک دوسرے پر عمود وار ہیں
ما² = ۴ ا لا کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
لا + ما − ۲ = ۰ محور ہے اور لا − ما = ۰ راس پر کا مماس ہے۔



شکل ۴۸

(د) وترِ خاص ۴ ا مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

(لا + ما − ۲ = ۰ پر کا عمود)² = ۴ ا (لا − ما = ۰ پر کا عمود)

یا ((لا + ما − ۲) / √(۱² + ۱²))² = ۴ ا (لا − ما) / √(۱² + ۱²)

∴ ۴ ا = √۲ کیونکہ (لا + ما − ۲)² = ۲ (لا − ما)

(ع) مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن مربع ہونے کی وجہ سے مثبت ہے پس منحنی بالتمام مماس لا - ما = ۰ کے اُس طرف واقع ہے جس طرف لا - ما منثبت ہے یعنی جس طرف کہ لا > ما اور صریحاً یہ مماس کے نیچے کی جانب ہے
(ف) یہ منحنی لا = ۰ سے جن نقطوں پر ملتا ہے ان کے لئے مساوات

ما² - ۲ ما + ۴ = ۰

پوری ہوتی ہے، جس سے ظاہر ہے کہ ما خیالی ہے، پس منحنی ما کے محور سے نہیں ملتا۔

یہ ما = ۰ سے ملتا ہے جہاں

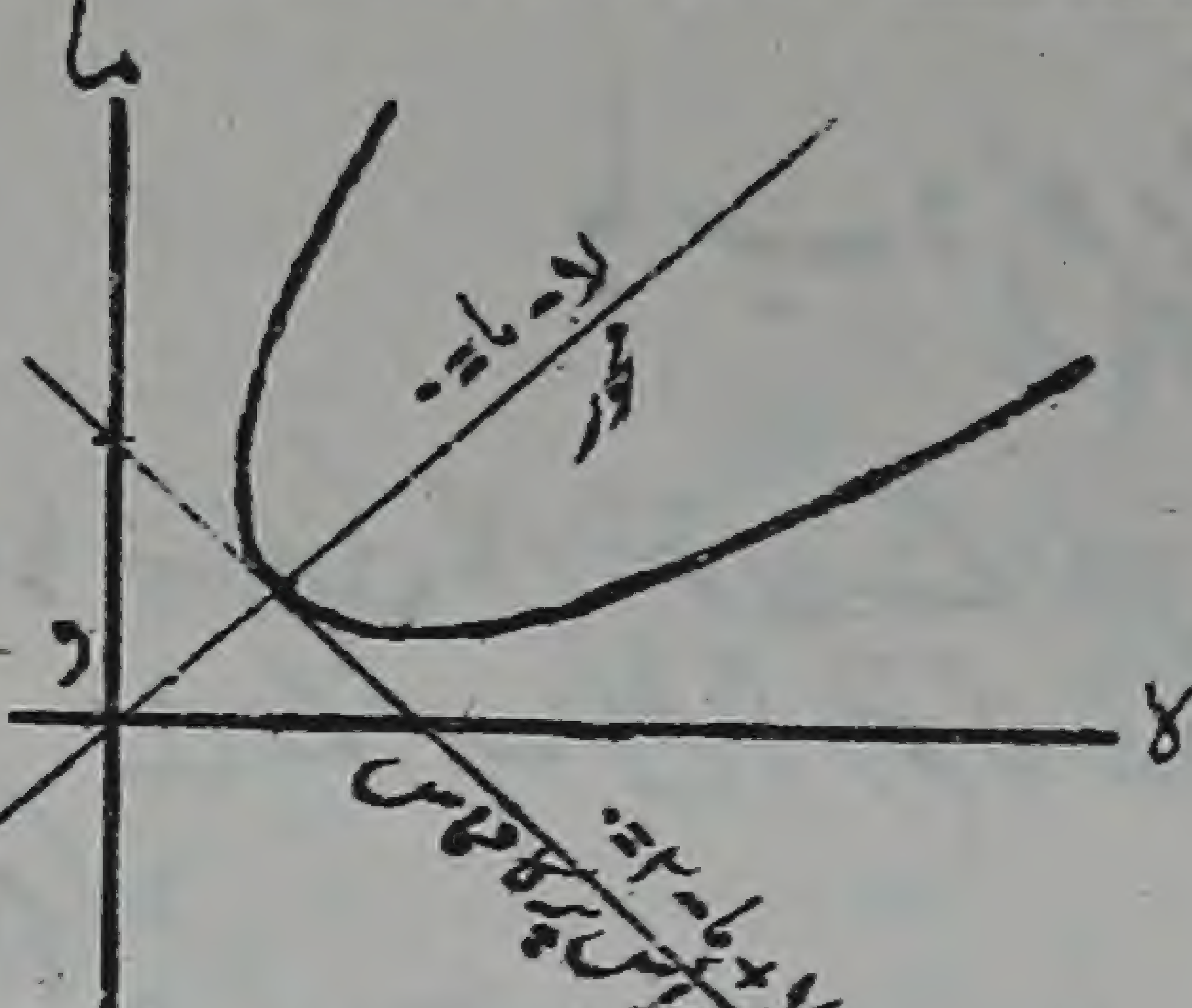
لا² - ۶ لا + ۴ = ۰ یا لا = ۳ ± √۵ = ۱۲۴ء ۵ یا ۷۶ء ، تقریباً

شکل میں ان طولوں کے جواب میں نقاط ص، صَ حاصل ہوتے ہیں۔
انتباہ - نظری طور پر جب ہمیں وتر خاص کا طول معلوم ہو جائے اور محور اور رأس پر کے مماس کی مساواتیں بھی حاصل ہو جائیں تو ہمارے پاس منحنی مرتسم کرنے کے لئے کافی مواد موجود ہو جاتا ہے لیکن عملی طور پر یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ وتر خاص کے طول سے قطع نظر کر کے منحنی پر چند اور موزوں نقاط معلوم کر لئے جائیں جیسا کہ اوپر (ف) میں کیا گیا ہے۔
یہ امر کہ منحنی اپنے محور کے لحاظ سے متشاکل ہے بہت ضروری اور مفید ہے لیکن منحنی کے ناپ کا اچھا اندازہ لگانے کے لئے ترسیم بنانے سے پہلے اس پر بہت سے نقطوں کے نشان لگا لینے چاہئیں۔
مثال ۲ - منحنی لا² - ۲ لا ما + ما² - ۲ لا - ۲ ما + ۴ = ۰ کو مرتسم کرو
(ا) یہاں ا ب - ح² = ۱ × ۱ - (-۱)² = ۰ پس منحنی قطع مکافی ہے۔
مساواتِ بالا حسب ذیل شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے

(لا - ما)² = ۲ (لا + ما - ۲)

جس سے ظاہر ہے کہ لا - ما = ۰ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

لا + ما + ۲ = ۰ پر کا عمود



شکل ۴۹

یہ خط پہلے ہی سے ایک دوسرے پر عمود وار ہیں اس لئے ہم فوراً یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ منحنی کا محور لا - ما = ۰ ہے اور راس پر کا مماس لا + ما - ۲ = ۰ ہے۔

(ج) مزید براں منحنی موخرالذکر خط کے اُس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے لا + ما - ۲ مثبت ہے اور مبدا اس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے لا + ما - ۲ منفی ہے۔ بالفاظ دیگر مبدا اور منحنی خط لا + ما - ۲ = ۰ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

(د) وترِ خاص ۴ ا کا طول معلوم کرنے کے لئے مساوات ذیل ہے

(لا - ما = ۰ پر کا عمود)^2 = ۴ ا (لا + ما - ۲ = ۰ پر کا عمود)

یعنی $\left(\dfrac{\text{لا - ما}}{\sqrt{2}}\right)^2 = ۴\,\text{ا}\;\dfrac{\text{لا + ما - ۲}}{\sqrt{2}}$

لیکن منحنی کی مساوات کی رُو سے (لا - ما)^2 = ۲ (لا + ما - ۲) اس لئے

۴ ا = $\sqrt{2}$ اور یہ وترِ خاص کا طول ہے

(ع) یہ بھی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ حوالہ کے محور منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتے ہیں۔

پس ہمیں منحنی پر کے وہ نقطے معلوم کرنے چاہئیں جہاں کوئی اور موزوں خط منحنی سے حقیقی نقاط پہ ملتے ہوں۔ چونکہ راس نقطۂ (۱، ۱) پر ہے (جو خط لا - ما = ۰ اور لا + ما - ۲ = ۰ کا نقطۂ تقاطع ہے) اس لئے ظاہر ہے کہ جب لا > ۱ تو ما حقیقی ہو گا۔ پس ہم منحنی پر جتنے نقطے چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً لا = ۱، ما = ۱ یا ۳ اسی طرح لا = ۲ سے ما = ۳ ± $\sqrt{5}$ وغیرہ وغیرہ اور منحنی کو مرتسم کرنے سے قبل ہمیں شکل میں ان نقطوں کا مقام معلوم کر لینا چاہئے۔

باب دہم پر متفرق مثالیں

۱- باب نہم کی تمام مشقوں کے مکافی مرتسم کرو
ذیل کے سب مکافیونکو مرتسم کرو اور اُن کے محور، راس پر کے مماس اور وترِ خاص معلوم کرو

۲- $۴ لا^۲ - ۴ لا ما + ما^۲ + ۲ لا - ۲۶ ما + ۹ = ۰$

۳- $لا^۲ + ۶ لا ما + ۹ ما^۲ + ۱۵ لا - ۵ ما + ۱۲۵ = ۰$

۴- $۴ لا^۲ + ۱۲ لا ما + ۹ ما^۲ - ۲ لا + ۱۰ ما + ۲۱ = ۰$

۵- $۲۵ لا^۲ - ۴۰ لا ما + ۱۶ ما^۲ + ۵۲ لا - ۱۷ ما + ۱۶ = ۰$

۶- $(۷ لا + ۹ ما)^۲ + ۲۳ لا + ۱۱ ما + ۱۲ = ۰$

باب یازدہم

مخروطی تراشوں کا اُن کی مساواتوں سے مرتسم کرنا

۱۲۲ - اِس باب میں ہم اُن اصولوں کی مدد سے جو باب ششم اور باب نہم میں بیان ہو چکے ہیں درجہ دوم کے منحنیات کو مرتسم کرنے کے متعلق چند متفرق مثالیں حل کرینگے -

اگرچہ ہر ایک منحنی جس کی مساوات دی ہوئی ہو ہمیشہ مرتسم ہو سکتا ہے کیونکہ اس پر جتنے نقطے ہم چاہیں معلوم کر سکتے ہیں لیکن محض اسی بناء پر عمل کرنا نہایت مشکل اور وقت طلب ہوتا ہے مثلاً ظاہر ہے کہ اگر قطع زائد کو ہم صحیح طور پر مرتسم کرنا چاہیں تو اس کے لئے ہمیں بہت سے نقطے مرتسم کرنے کی ضرورت ہوگی پس عملی طور پر منحنی کی شکل اور ناپ کا بہیئت مجموعی اندازہ لگانے کے لئے ابواب گذشتہ کے اصولوں کا استعمال کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے

۱۲۳ - شروع میں ہم چند عام اشارات درج کرینگے جن کو ابواب ششم و نہم کا خلاصہ تصور کیا جا سکتا ہے اور بعد میں ہم کسی حد تک ابواب ہفتم، ہشتم و دہم کا بھی اعادہ کرینگے -

فرض کرو کہ مساوات حسب معمول

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے، تب منحنی کو مرتسم کرنے کے لئے ذیل کا طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔

(۱) اب - ھ^۲ کی قیمت سے منحنی کی نوعیت معلوم کرو، ہم جانتے ہیں کہ اب - ھ^۲ کی قیمت ناقص کے لئے مثبت، مکافی کے لئے صفر اور

زائد کے لئے منفی ہوتی ہے۔

(۲) اگر اب = ھ^{2} تو محور، راس پر کا مماس اور وتر خاص حسب باب نہم معلوم کرنے چاہئیں۔ اور منحنی کو راس پر کے مماس کے دائیں یا بائیں جانب رکھنے کے لئے احتیاط سے کام لینا چاہئے۔

(۳) اگر اب > ھ^{2} تو ناقص کا مرکز، نیم محوروں کی سمتیں اور انکے طول معلوم کرو۔ اس کے بعد منحنی کی شکل کے نہایت سادہ ہونے کی وجہ سے اس کا مرتسم کرنا کچھ مشکل نہیں ہوتا لیکن حسب دفعہ ۳۰۱ اس امر کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ کونسی سمت کس محور سے متعلق ہے۔

(۴) اگر اب < ھ^{2} تو سب سے پہلے منحنی کا مرکز معلوم کرکے متقاربوں کو مرتسم کر لینا نہایت ضروری ہے، پھر مرکز کو مبدأ مان کر منحنی کی مساوات بھی معلوم کر لینی چاہئے اور نصف محوروں کے طول اور سمتیں قطع ناقص کی طرح معلوم کر لینی چاہئیں۔ (یہ امر واقعہ کہ منحنی کے محاور ہمیشہ متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں عددی حسابات کی صحت جانچنے کے لئے جن میں مبتدی کے غلطی کر جانے کا بہت احتمال ہے بخوبی استعمال کیا جا سکتا ہے)

اگر جملہ ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} دو ناطق اجزائے ضربی رکھتا ہو (اور عام طور پر ایسا نہیں ہوتا) تو متقاربوں کی مساواتیں الگ الگ ان دونوں کی مشترکہ مساوات کو ما میں درجہ دوم کی مساوات سمجھ کر حل کرنے سے یا کسی اور طرح اس کے اجزائے ضربی معلوم کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

اب چونکہ مرکز پہلے معلوم کر لیا گیا ہے لہذا متقاربوں کو مرتسم کرنیکے لئے ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} = ۰ کے متوازی مرکز میں سے خطوط مستقیم کھینچنے چاہئیں۔

اگر اجزائے ضربی ناطق نہ ہوں تو متقاربوں کو ان کی مشترکہ مساوات سے بآسانی مرتسم کر سکتے ہیں کیونکہ اس صورت میں ہمیں صرف ان نقطوں کو جن پر یہ متقارب کسی ایک محور سے ملتے ہیں مرکز کے ساتھ وصل کر دینا چاہئے۔

چونکہ پہلے طریقہ کے موافق متقاربوں کو مرتسم کرنے کی مثالیں ہم اوپر درج کر چکے ہیں اس لئے باب ہذا میں ہم دوسرے طریقہ کے متعلق کچھ

مثالیں درج کرینگے ۔ لیکن یاد رہے کہ طالب علم کو ابتدا میں صرف پہلے طریقہ سے کام لینا چاہئے ۔

اگر متقارب ن و نَ اور ق و قَ ہوں تو منحنی یا تو زاویئی خانوں ن و ق اور نَ و قَ میں واقع ہوگا یا ن و قَ اور نَ و ق میں ۔ چونکہ یہ معلوم ہوسکتا ہے کہ متقاطع محور کن خانوں میں سے گذرتا ہے، اس لئے ہم متذکرہ بالا امر کا فیصلہ فوراً کر سکتے ہیں، ایک نقطہ مرتسم کر لینے سے بھی اس امر کا تصفیہ ہو سکتا ہے ۔ یہ معلوم کر لینے کے بعد ہمیں منحنی کے اور بہت سے نقطے مرتسم کرنے چاہئیں مثلاً وہ نقطے جہاں یہ محوروں سے ملتا ہے ۔ دیگر نقطوں کے لئے ہم لا کو بالترتیب ۱، ۲، ۳... قیمتیں دیکر مساوات محصلہ کو ما کے لئے حل کر سکتے ہیں ۔

یہ بات قابل غور رہے کہ ہم نے یہاں اس امر کی تحقیق نہیں کی کہ عام مساوات خطوطِ مستقیم کے زوج کو کب تعبیر کرتی ہے، اس کے لئے جداگانہ تحقیق کی ضرورت نہیں کیونکہ جب ہم مبدأ کو مرکز پر منتقل کرینگے تو تحویل شدہ مساوات میں مستقل رقم لازماً صفر ہوگی جس سے معلوم ہو جائے گا کہ مساوات سے دو خطوط مستقیم ہی تعبیر ہوتے ہیں، پس منحنی کی نوعیت جانچنے کے (اب - ھ^2) والے طریقہ میں ہی حقیقی خطوں کا زوج قطع زائد کے تحت میں، خیالی خطوں کا زوج قطع ناقص کے تحت میں اور متوازی خطوں کا زوج قطع مکافی کے تحت میں آجاتا ہے ۔

اب ہم چند مثالیں درج کرتے ہیں ۔

مثال ۱ ۔ جس مخروطی کی مساوات حسب ذیل ہے اسے مرتسم کرو

۶ لا^2 + ۴ لا ما + ۶ ما^2 - ۲۰ لا + ۴ ما + ۱۴ = ۰

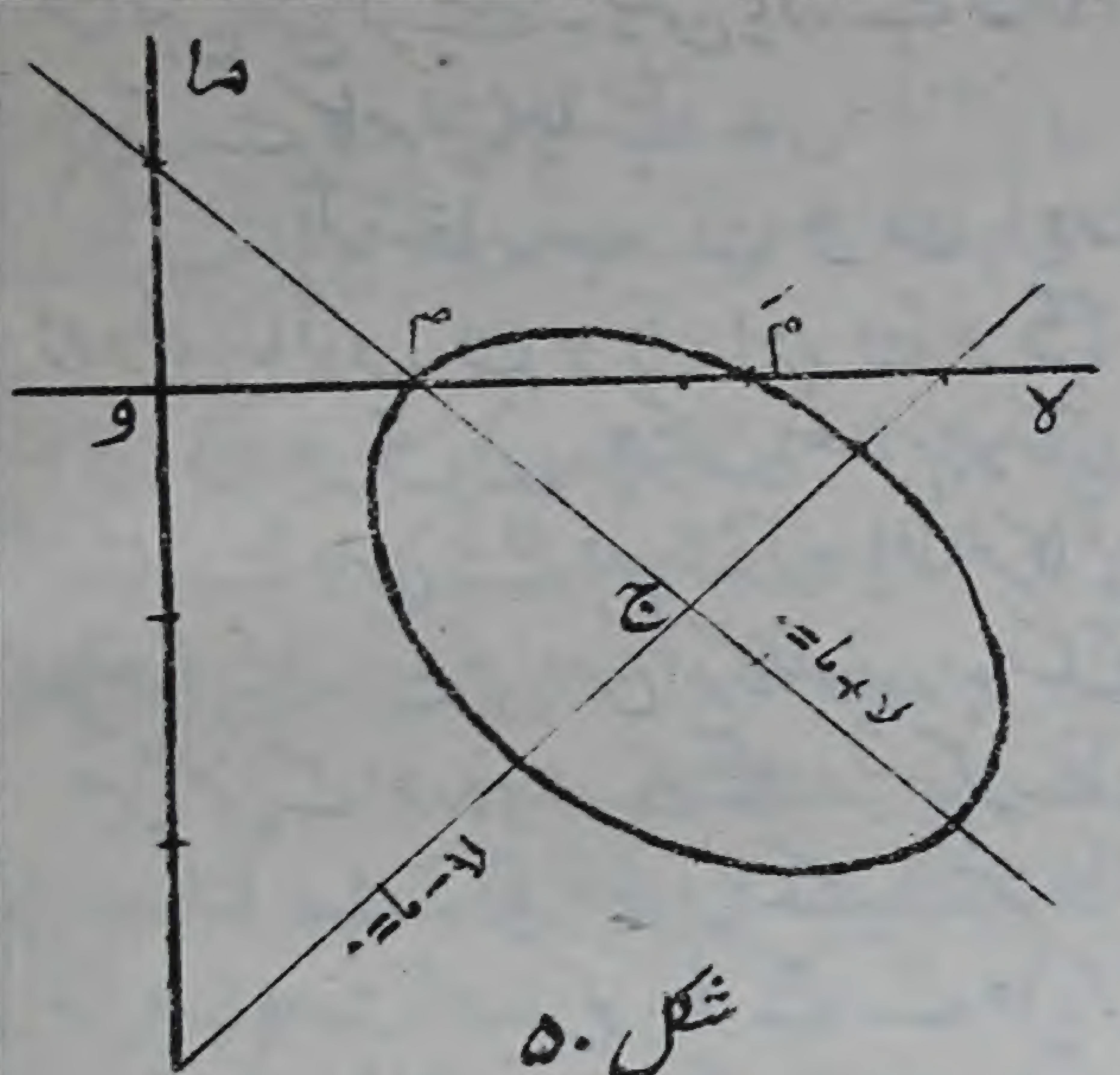
یہاں ا = ۶، ب = ۶، ھ = ۲ لہٰذا اب - ھ^2 مثبت ہے اور منحنی قطع ناقص ہے

مرکز کے لئے مساواتیں یہ ہیں

۶ لا + ۲ ما - ۱۰ = ۰

۲ لا + ۶ ما + ۲ = ۰

جن سے لا = ۲، ما = −۱
مرکز کے لحاظ سے منحنی کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم درجۂ اول کی رقموں میں مرکز کے نصف محدد مندرج کرتے ہیں، اس طرح سے مساوات ہو جاتی ہے



شکل ۵۰

۶ لا^۲ + ۴ لا ما + ۶ ما^۲ − ۲۰ × ۱ + ۴ (− ۱/۲) + ۱۴ = ۰

یا ۶ لا^۲ + ۴ لا ما + ۶ ما^۲ = ۸ یعنی ۳/۴ لا^۲ + ۲/۴ لا ما + ۳/۴ ما^۲ = ۱

اب نصف محور مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

(ا − ۱/ر^۲)(ب − ۱/ر^۲) = ھ^۲

یا (۳/۴ − ۱/ر^۲)(۳/۴ − ۱/ر^۲) = ۱/۱۶

یا ۳/۴ − ۱/ر^۲ = ± ۱/۴

جس سے ۱/ر^۲ = ۱ یا ۱/۲ یعنی ر = ۱ یا √۲

محور اصغر کی مساوات (جبکہ مرکز کو مبدأ مانا جائے) یہ ہے

(۳/۴ − ۱) لا + ۱/۴ ما = ۰ یعنی لا − ما = ۰

اور محور اعظم کی مساوات

(۳/۴ − ۱/۲) لا + ۱/۴ ما = ۰ یعنی لا + ما = ۰ ہے

و لا کے ساتھ نقاطِ تقاطع ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتے ہیں

۶ لا^۲ − ۲۰ لا + ۱۴ = ۰ یعنی لا = ۱ یا ۷/۳

(یہ نقاط شکل میں م، مَ سے دکھائے گئے ہیں)

یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ و ما منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

لہٰذا مرکز کا نشان لگا لینے کے بعد نصف محوروں کو کھینچنے اور و لا کے ساتھ جو نقاطِ تقاطع ہیں انکو ملحوظ رکھنے سے منحنی مطلوبہ آسانی سے کھینچ سکتا ہے۔

طالب علم دیکھے کہ محور اعظم کا ایک سرا و لا پر ہے۔

مثال ۲۔ جو منحنی مساوات

۹ لا^2 – ۲۴ لا ما + ۱۶ ما^2 + ۳۲ لا – ۷۶ ما + ۱۶ = ۰

سے تعبیر ہوتا ہے اُس کو مرتسم کرو۔

چونکہ یہاں اب – ھ^2 = ۹ × ۱۶ – (۱۲)^2 = ۰ اس لئے مساوات سے قطع مکافی تعبیر ہوتا ہے۔ مساواتِ بالا کو شکل

(۳ لا – ۴ ما)^2 = – ۳۲ لا + ۷۶ ما – ۱۶

میں لکھنے سے اور حسبِ معمول لہ داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۳ لا – ۴ ما + لہ)^2 = – ۲ لا (۱۶ – ۳ لہ) + ۲ ما (۳۸ – ۴ لہ) – ۱۶ + لہ^2

اور دو خطوط ۳ لا – ۴ ما + لہ = ۰ اور – ۲ لا (۱۶ – ۳ لہ) + ۲ ما (۳۸ – ۴ لہ) – ۱۶ + لہ^2 = ۰ علی القوائم ہوں گے اگر

۳ (۱۶ – ۳ لہ) + ۴ (۳۸ – ۴ لہ) = ۰ یعنی اگر لہ = ۸

پس محور کی مساوات ۳ لا – ۴ ما + ۸ = ۰ ہے اور رأس پر کا مماس

۴ (۴ لا + ۳ ما + ۱۲) = ۰ یعنی ۴ لا + ۳ ما + ۱۲ = ۰ ہے

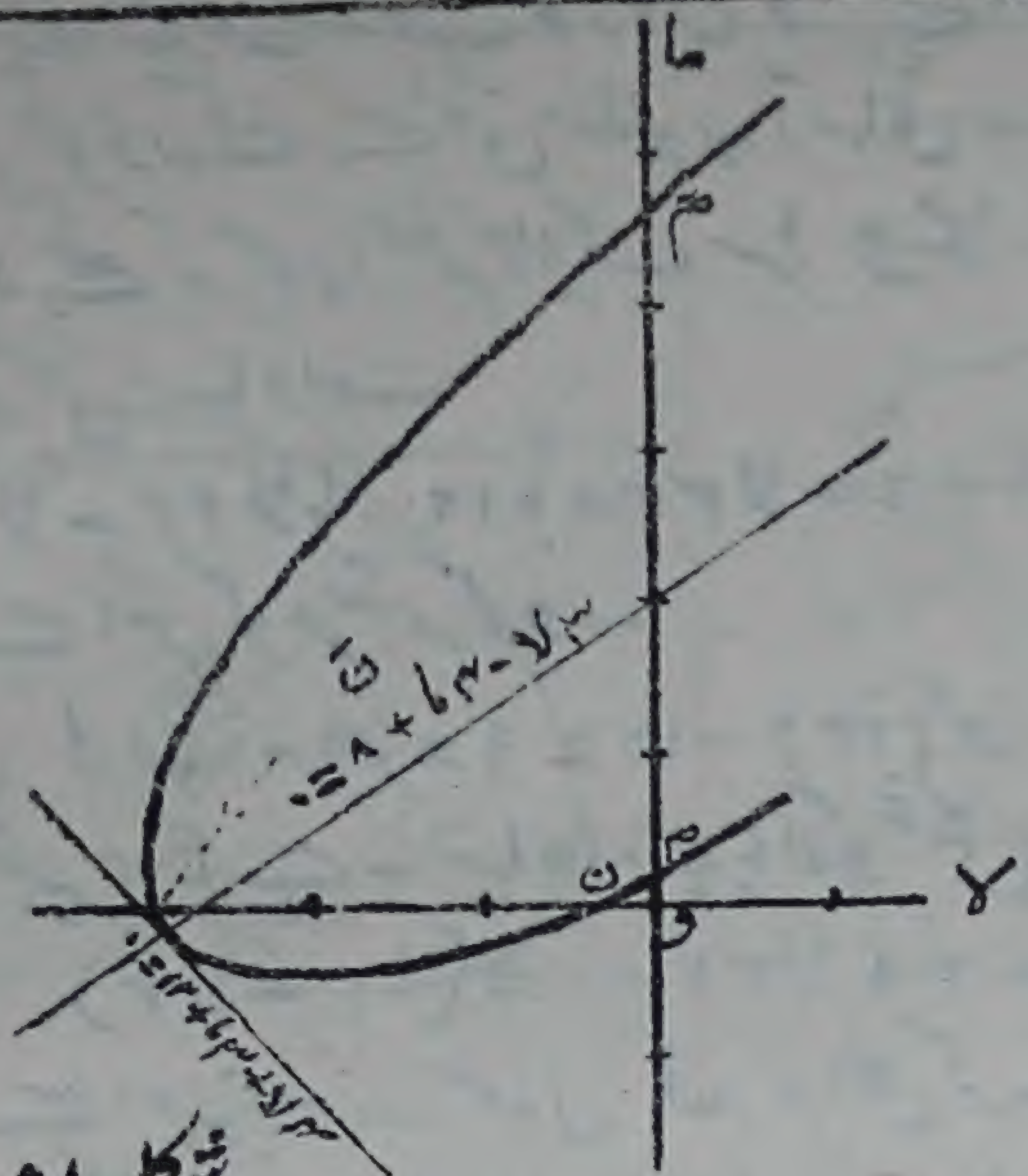
پس مساوات کی آخری شکل یہ ہے (۳ لا – ۴ ما + ۸)^2 = ۴ (۴ لا – ۳ ما + ۱۲)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی بالتمام رأس پر کے مماس ۴ لا – ۳ ما + ۱۲ = ۰ کی مثبت جانب (یعنی مبدأ والی جانب) واقع ہے۔ اس امر کی تصدیق ان نقاط کو دیکھنے سے بھی ہو سکتی ہے جہاں منحنی محوروں سے ملتا ہے۔

وترِ خاص حاصل کرنے کی مساوات ((۳ لا – ۴ ما + ۸) / ۵)^2 = ۲ ل (۴ لا – ۳ ما + ۱۲) / ۵

ہے، لیکن (۳ لا – ۴ ما + ۸)^2 = ۴ (۴ لا – ۳ ما + ۱۲)

∴ ۲ ل = ۴ / ۵



شکل ۵۱

جہاں یہ منحنی محور لا سے ملتا ہے وہاں

$$۹\,لا^2 + ۳۲\,لا + ۱۶ = ۰$$

$$\therefore\ لا = \frac{-۱۶ \pm \sqrt{۱۶^2 - ۹ \times ۱۶}}{۹}$$

= −۶ء یا −۹۵ء۲ تقریباً (شکل میں نقاط ف اور نَ)

جہاں یہ محور و ما سے ملتا ہے وہاں

$$۴\,ما^2 - ۱۹\,ما + ۴ = ۰$$

$$\therefore\ ما = \frac{۱۹ \pm \sqrt{۲۹۷}}{۸}$$

= ۲ء یا ۵ء۴ (شکل میں نقاط م اور مَ)

مماس اور محور کھینچنے اور ان نقاط کو معلوم کر لینے کے بعد جہاں یہ محوروں سے ملتا ہے ہم منحنی کی خاصی درست ترسیم حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۳ — جو منحنی مساوات

$$۲\,لا^2 - ۲\,ما^2 - لا\,ما - ۶\,لا - ۷\,ما - ۴ = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو۔

یہاں اب ۔ $\text{ھ}^۲$ منفی ہے اس لئے منحنی قطع زائد ہے۔

چونکہ یہاں ا = ۲، ھ = $-\frac{۱}{۲}$، ب = −۲، گ = −۳، ف = $-\frac{۷}{۲}$، ج = −۴

اس لئے مرکز کے محدد حاصل کرنے کی مساواتیں

$$۲\,\text{لا} - \frac{۱}{۲}\,\text{ما} - ۳ = ۰ \quad \text{اور} \quad -\frac{۱}{۲}\,\text{لا} - ۲\,\text{ما} - \frac{۷}{۲} = ۰$$

ہیں جن سے لا = ۱، ما = −۲

اگر مبدا کو مرکز پر منتقل کیا جائے تو مساوات بالا ہو جاتی ہے۔

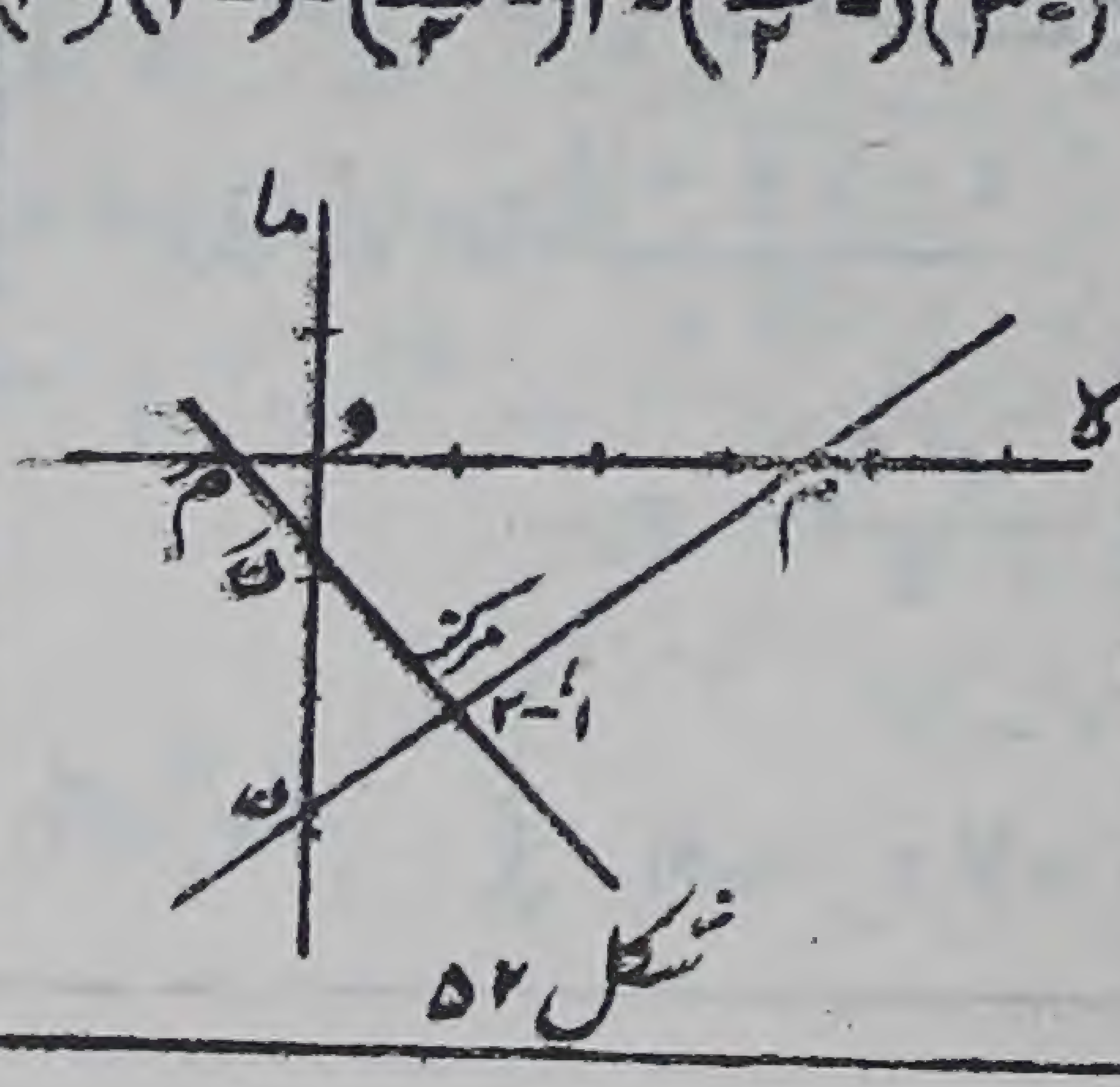
$$۲\,\text{لا}^۲ - ۲\,\text{ما}^۲ - \text{لاما} - ۶\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۷(-۱) - ۴ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۲\,\text{لا}^۲ - ۲\,\text{ما}^۲ - \text{لاما} = ۰$$

لہٰذا مساوات زیر بحث دو علی القوائم خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

انتباہ ۔ اگر عمل کے دوران میں یہ معلوم ہو جائے کہ منحنی دو علی القوائم خطوطِ مستقیم میں تحویل ہو جاتا ہے تو ہمیں فوراً اس امر کی تصدیق خطوطِ مستقیم کی جانچ کرنے والے طریقہ سے کر لینی چاہئے یعنی یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مقدار $\text{ابج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{اف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ھ}^۲$ صفر ہو جاتی ہے یا نہیں۔ یہاں مقدار مندرجہ بالا کی قیمت

$$= ۲(-۲)(-۴) + ۲\left(-\frac{۷}{۲}\right)(-۳)\left(-\frac{۱}{۲}\right) - ۲\left(-\frac{۷}{۲}\right)^۲ - (-۲)(-۳)^۲$$

$$-(-۴)\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲$$



شکل ۵۲

$$= ۱۶ - ۱۰\frac{۱}{۲} - ۲۴\frac{۱}{۲} + ۱۸ + ۱ = ۰$$

اس سے عمل بالا کی صحت کی تصدیق ہوتی ہے۔

جہاں منحنی محور و لا سے ملتا ہے وہاں

$$۲\,\text{لا}^۲ - ۶\,\text{لا} - ۴ = ۰$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{۳ \pm \sqrt{۱۷}}{۲}$$

= ۳٫۵ یا -٫۵ (تقریباً نقاط م اور مَ)

جہاں یہ محور و ما سے ملتا ہے وہاں

$$۲\,\text{ما}^{۲} + ۷\,\text{ما} + ۴ = ۰$$

$$\therefore \text{ما} = \frac{-۷ \pm \sqrt{۱۷}}{۴} = -۲٫۸ \text{ ، } -٫۷ \text{ ، تقریباً (شکل میں نقاط ن، نَ)}$$

پس مساوات زیر بحث دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے کو نقطہ (۱، -۲) پر قطع کرتے ہیں۔ پس اس نقطہ کو ہر دو محاور اور منحنی کے نقاطِ تقاطع کے ساتھ ملانے سے منحنی مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ جو منحنی مساوات

$$(\text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۲)^{۲} + ۴(۲\,\text{لا} - \text{ما} + ۱)^{۲} = ۴۵$$

سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو

ہم دیکھتے ہیں کہ دو خطوطِ مستقیم

$$\text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۲ = ۰ \quad \text{اور} \quad ۲\,\text{لا} - \text{ما} + ۱ = ۰$$

ایک دوسرے پر عمود ہیں اور خطوطِ وحدانی کے اندر کے جملات اُن عمودوں کے متناسب ہیں جو منحنی کے کسی نقطہ ن (لا، ما) سے اِن دو خطوطِ مستقیم پر جو جملوں سے تعبیر ہوتے ہیں نکالے جائیں۔

خطوطِ وحدانی کے اندر کے جملوں کو عمودوں کے فی الحقیقت

$$\text{مساوی بنانے سے} \left(\frac{\text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۲}{\sqrt{۵}}\right)^{۲} + ۴\left(\frac{۲\,\text{لا} - \text{ما} + ۱}{\sqrt{۵}}\right)^{۲}$$

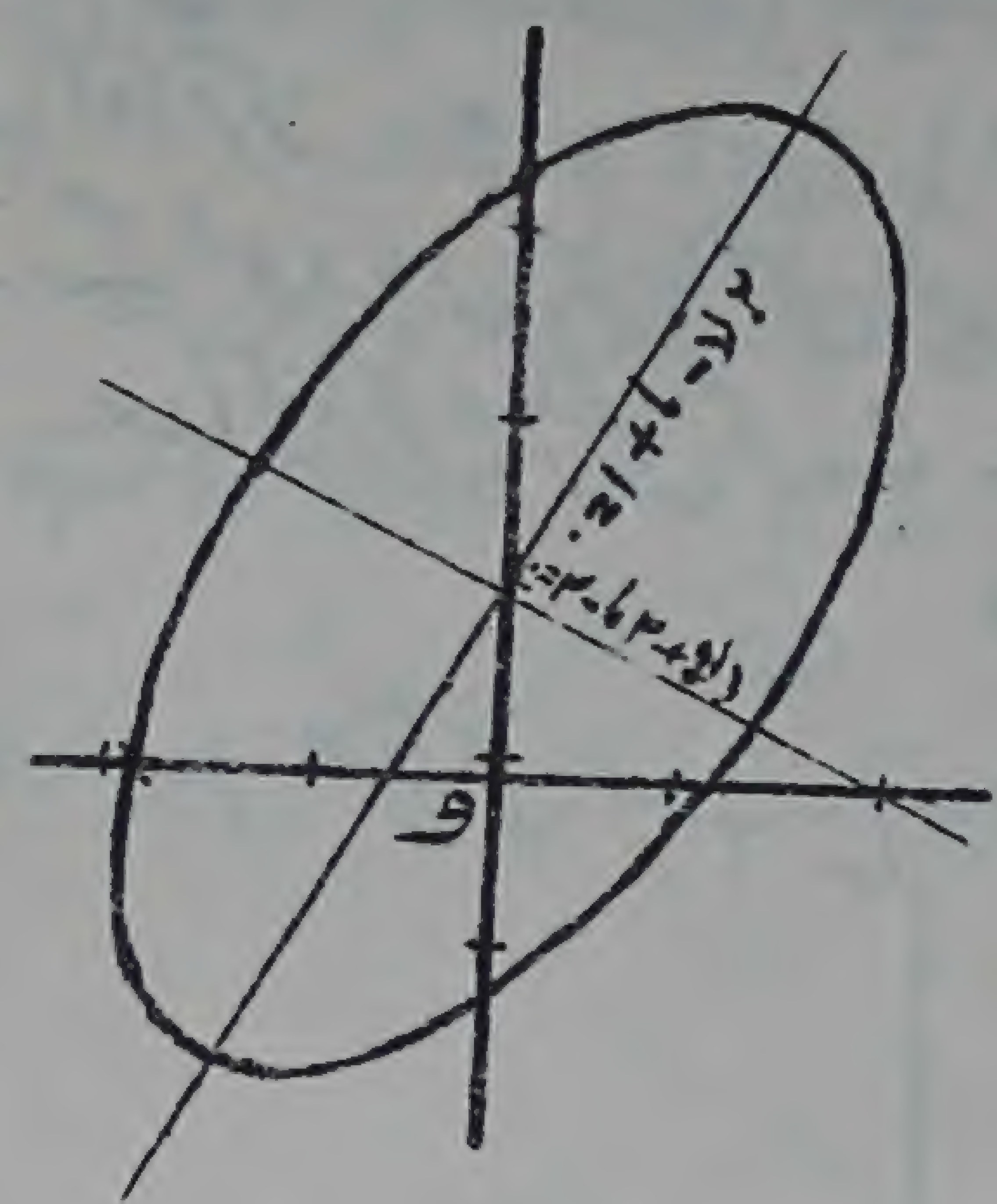
$$= \frac{۴۵}{۵} = ۹$$

$$\text{پس اگر ہم} \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} + ۲\,\text{ما} - ۲ = ۰ \\ \text{اور} \quad ۲\,\text{لا} - \text{ما} + ۱ = ۰ \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کو بالترتیب لا اور ما کا محور فرض کریں تو مساوات بالا کے یہ معنی ہیں کہ

$$\frac{(\text{ن سے ماکے محور پر کا عمود})^{۲}}{۹} + \frac{(\text{ن سے لاکے محور پر کا عمود})^{۲}}{\frac{۹}{۴}} = ۱$$

یہ صریحاً قطع ناقص ہے جس کے محور خطوط (۱) سے تعبیر ہوتے ہیں اور جس کے نصف محوروں کے طول بالترتیب ۳ اور $\frac{۳}{۲}$ ہیں۔



انتباہ۔ $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ ۳ اُس نصف محور کا طول ہے جو خط ۲لا − ما + ۱ = ۰ پر نا پایا جائے کیونکہ یہ خط معیاری مساوات میں ما = ۰ کے متناظر ہے۔ اس نکتہ کو اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہیے۔

عمل کی تصدیق کر لینے کے لئے ہم ابتدائی محوروں پر مقطوعات کے طول دریافت کرتے ہیں۔

لا = ۰ سے (۲ما − ۲)^{۲} + ۴(ما − ۱)^{۲} = ۴۵ یعنی ما = ۳٫۳۶ یا − ۱٫۳۶

ما = ۰ سے (لا − ۲)^{۲} + ۴(۲لا + ۱)^{۲} = ۴۵ یعنی لا = − ۱٫۹ یا ۱٫۲

انتباہ۔ مندرجہ بالا طریقہ صرف اُسی صورت میں کار آمد ہو سکتا ہے جبکہ مساوات مفروضہ شکل ا ر^{۲} + ب س^{۲} = مستقل، میں معلوم ہو جہاں ر = ۰ اور س = ۰ دو علی القوائم خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتے ہیں، طریق عمل ایک حد تک ایسا ہی ہے جیسا قطع مکافی کی صورت میں۔

مثال ۵۔ منحنی لاما + ۳لا + ۴ما + ۴ = ۰ کو مرتسم کرو

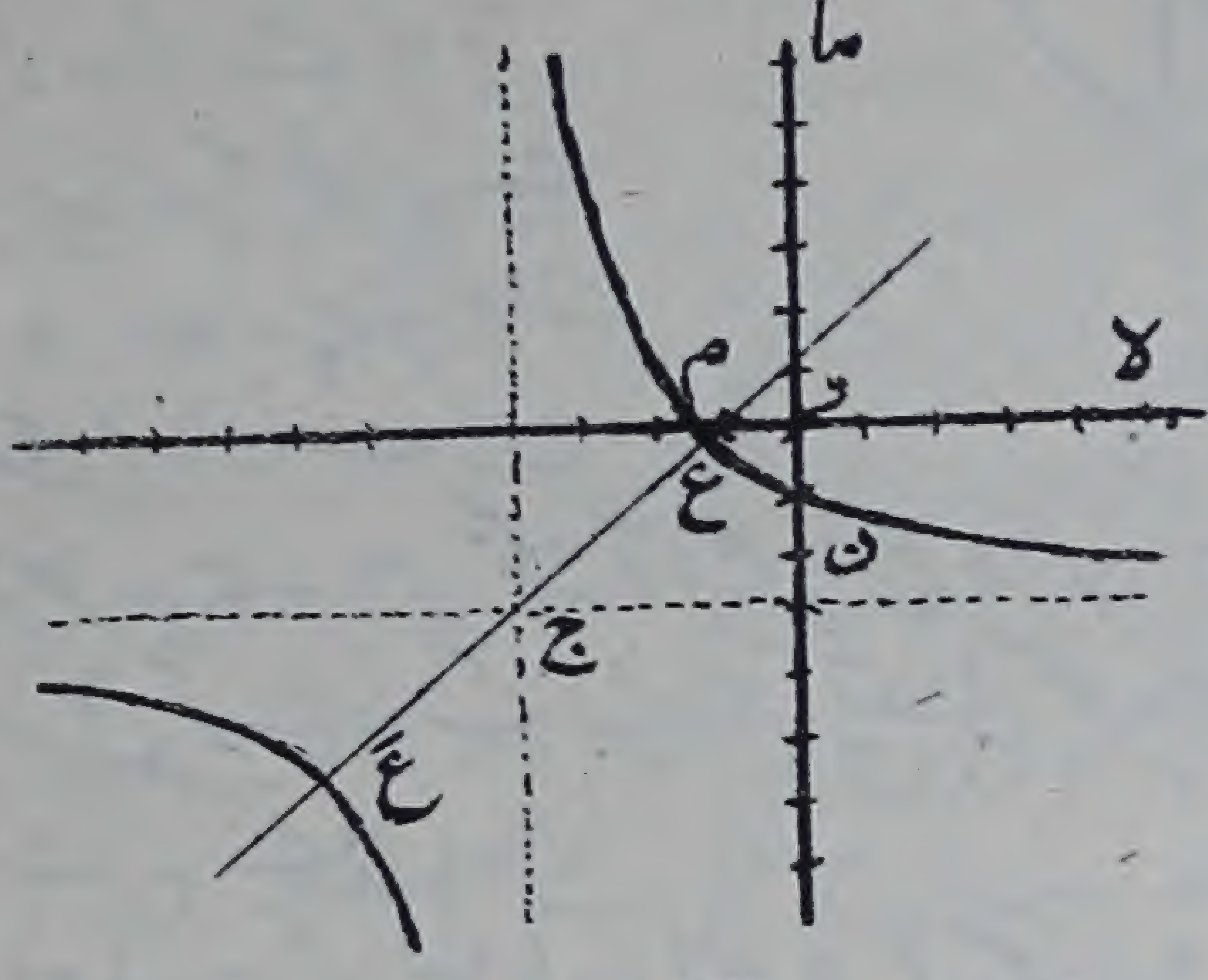
یہاں اب − ھ^{۲} = ۰ − $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$ یعنی منفی مقدار، پس مساواتِ بالا

قطع زائد کو تعبیر کرتی ہے۔
یہاں عمل کو مختصر کیا جا سکتا ہے کیونکہ ہم مساوات کو شکل

(لا + ۴) (ما + ۳) = ۸

میں لکھ سکتے ہیں اس سے ظاہر ہے کہ مساواتِ مذکورہ سے قائم قطع زائد تعبیر ہوتا ہے جس کے متقارب لا + ۴ = ۰ اور ما + ۳ = ۰ ہیں اور مرکز -۴، -۳ ہے (دراصل منحنی کے کسی نقطہ سے ان خطوط پر کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے)
مبدا کو مرکز پر منتقل کرنے سے مساوات ہوجاتی ہے

لا ما = ۸



شکل ۵۴

[کیونکہ مبدا کو نقطہ (-۴، -۳) پر منتقل کرنے سے ہمیں مساوات میں لا کی بجائے لا - ۴ اور ما کی بجائے ما - ۳ لکھنا پڑے گا]۔ اب منحنی کو مرتسم کر لینا کچھ مشکل نہیں ہے کیونکہ لا کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ ...، -۱، -۲، -۳... قیمتیں دینے سے ما کی متناظر قیمتیں فوراً معلوم ہو سکتی ہیں اور منحنی مرتسم کیا جا سکتا ہے۔
نصف محوروں کے طول مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱ / ر۴ − (۱ / ۱۶)۲ = ۰

کیونکہ ا۱ = ب۱ = ۰ اور ھ۱ = ۱ / ۱۶ ∴ ر۲ = ± ۱۶
پس حقیقی نصف محور کا طول ۴ ہے اور مرکز کو اگر مبدأ مانا جائے تو اس کی سمت لا − ما = ۰ سے تعبیر ہوتی ہے، اس سے نقاطِ تقاطع ع، عَ حاصل ہوتے ہیں، دوسرا محور خط لا + ما = ۰ ہے۔
جن نقطوں پر منحنی ابتدائی محوروں سے ملتا ہے وہ یہ ہیں۔
ما = ۰، لا = − ۴/۳ (یہ نقطہ شکل میں م سے تعبیر کیا گیا ہے)
اور لا = ۰، ما = − ۱ (〃 〃 ن 〃 〃)
اس طرح مرتسم کرنے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کی شکل اوپر دکھائی گئی ہے۔

مثال ۶ ۔ جو منحنی مساوات

لا۲ + ۴ لا ما + ۴ ما۲ + ۷ لا + ۱۴ ما + ۶ = ۰

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مرتسم کرو۔
ا ب − ھ۲ = ۱ × ۴ − ۲۲ = ۰ پس منحنی قطع مکافی ہے
مساوات کو شکل (لا + ۲ ما)۲ + (۷ لا + ۱۴ ما + ۶) = ۰ میں لکھنے کے بعد ہم اس میں حسب معمول لہ داخل کرتے ہیں، تب

(لا + ۲ ما + لہ)۲ = − لا (۷ − ۲ لہ) − ما (۱۴ − ۴ لہ) − ۶ + لہ۲

دو خطوطِ مستقیم لا + ۲ ما + لہ = ۰ اور لا (۷ − ۲ لہ) + ما (۱۴ − ۴ لہ) + ۶ − لہ۲ = ۰ ایک دوسرے پر عمود وار ہوں گے اگر ۷ − ۲ لہ + ۲۸ − ۸ لہ = ۰ یعنی اگر لہ = ۳ ۱/۲

پس مساواتِ بالا ہو جاتی ہے

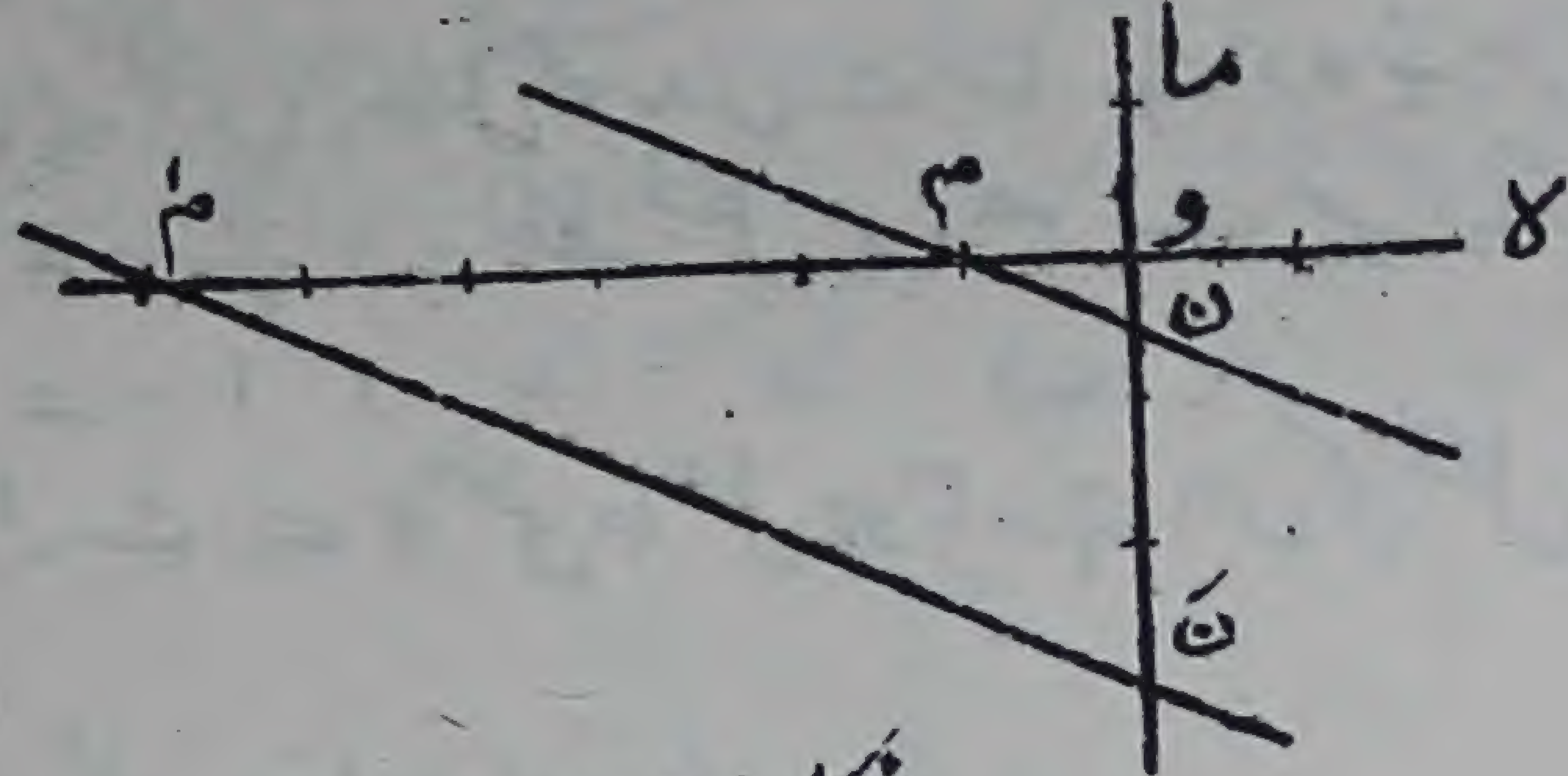
(لا + ۲ ما + ۳ ۱/۲)۲ = ۱/۴ ۱۲ − ۶ = ۶ ۱/۴

ظاہر ہے کہ اس سے ذیل کے دو متوازی خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں

لا + ۲ ما + ۳ ½ = ± ۲ ½

یعنی لا + ۲ ما + ۱ = ۰ اور لا + ۲ ما + ۶ = ۰۔

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف² ...... والے ضابطہ کی رُو سے اوپر کے نتیجہ کی تصدیق کرو۔



شکل ۵۵

یہ منحنی ابتدائی محور و لا کو قطع کرتا ہے جہاں لا = -۱ یا -۶ (دیکھو نقاط م اور مَ) اور ابتدائی محور و ما کو قطع کرتا ہے جہاں ما = -½ یا -۳ (نقاط ن، نَ) اِن امور کو مدِ نظر رکھ کر مطلوبہ خطوطِ مستقیم نہایت آسانی سے کھینچے جا سکتے ہیں۔

یہ امر کہ مساوات زیرِ بحث سے دو متوازی خطوطِ مستقیم ہی تعبیر ہوتے ہیں از خود واضح ہے کیونکہ ہم مساوات کو شکل

(لا + ۲ ما)² + ۷ (لا + ۲ ما) + ۶ = ۰

یا (لا + ۲ ما + ۱) (لا + ۲ ما + ۶) = ۰

میں لکھ سکتے ہیں۔

اوپر کی بحث سے ظاہر ہے کہ منحنی کی صحیح نوعیت حسب معمول طریقہ سے کافی آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتی ہے۔

مثال ۷۔ مساوات ۴ لا² + ۱۲ لا ما - ما² - ۴۰ لا - ۲۰ ما + ۲۴ = ۰

سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے اُس کو مرتسم کرو۔

چونکہ اب - ھ² = ۴ (-۱) - ۳۶ یعنی منفی ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ منحنی قطع زائد ہے۔

مرکز کے لئے مساواتیں یہ ہیں

۴ لا + ۶ ما - ۲۰ = ۰ اور ۶ لا - ما - ۱۰ = ۰

جن سے لا = ۲، ما = ۲

مرکز کو مبدأ ماننے سے منحنی کی مساوات ہو جاتی ہے

۴ لا² + ۱۲ لا ما - ما² = ۳۶

یا ۴/۳۶ لا² + ۲ × ۱/۶ لا ما - ۱/۳۶ ما² = ۱

لہٰذا نصف محوروں کے لئے مساوات ۱/ر⁴ - ۱/ر² × ۱/۱۲ - ۵/۱۹۲ = ۰ ہے

اس سے ر² = ۳۶/۸ یا - ۳۶/۵

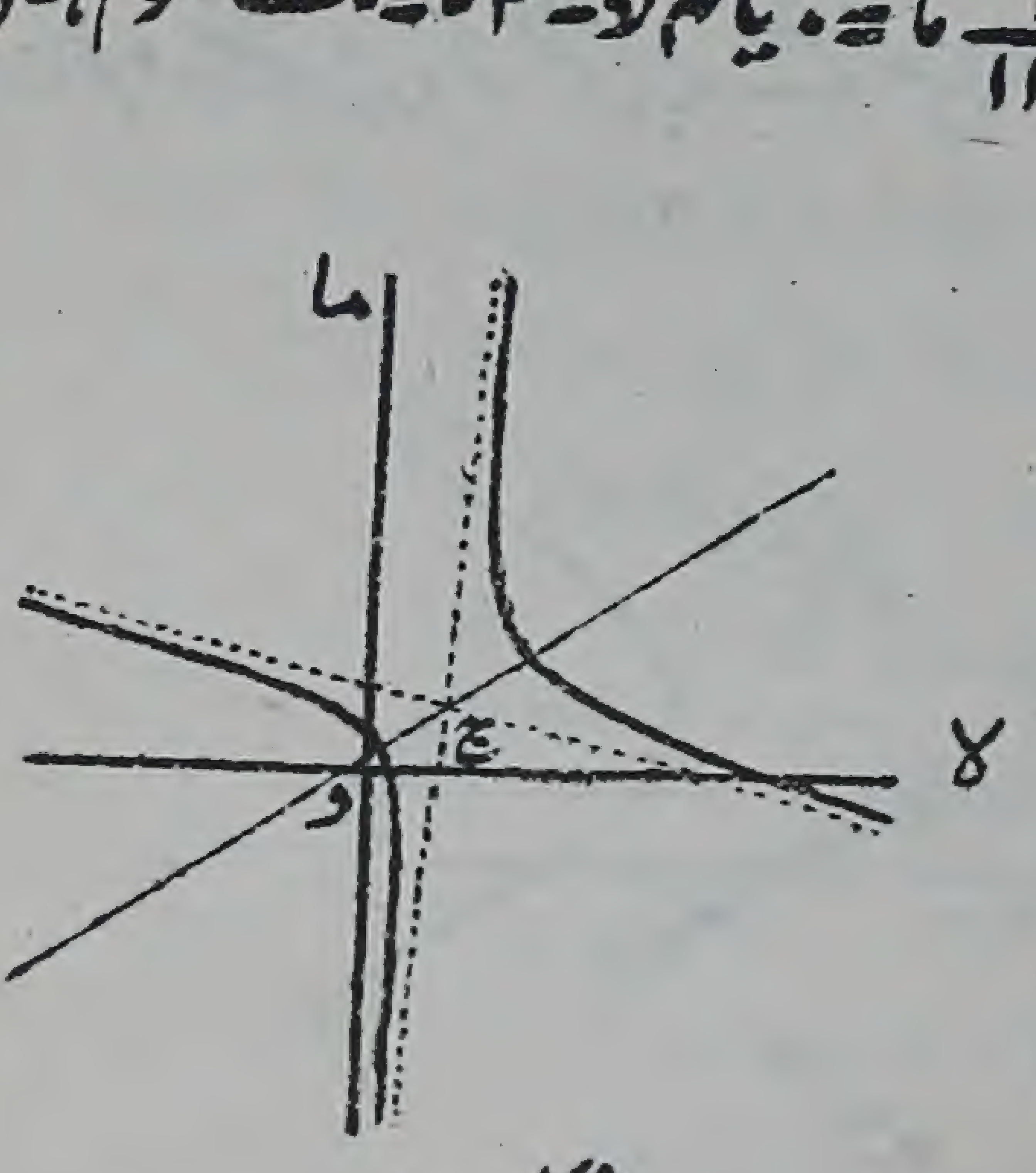
پس نصف متقاطع محور کا طول ہے ۶/(۲√۲) = ۶√۲/۴ = ۲٫۱۲ تقریباً

اور اسکی سمت (۴/۳۶ - ۸/۳۶) لا + ۱/۱۲ ما = ۰ یا ۴ لا - ۳ ما = ۰ سے معلوم ہوتی ہے

متقاربوں کی مساوات کی شکل

۴ لا² + ۱۲ لا ما - ما² - ۴۰ لا - ۲۰ ما + ج = ۰

ہے جہاں ج کی قیمت خطوطِ مستقیم کی شرط کی رُو سے معلوم کرنی چاہیئے۔ ہم آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ ج = ۶۰، پس متقاربوں کی مساوات یہ ہے



شکل ۵۶

۴ لا٢ + ۱۲ لا ما - ما٢ - ۳۴ لا - ۲۰ ما + ۶۰ = ۰

جہاں متقارب و لا سے ملتے ہیں وہاں لا = ۸،۱۱۶ یا ۱،۸۸۴
اور جہاں یہ و ما سے ملتے ہیں وہاں ما = ۲،۶۴ یا -۲۲،۶۴
اِن نقاط کو مرتسم کرلینے کے بعد اگر اس امر کو ملحوظ رکھا جائے کہ متقارب ایک دوسرے سے نقطہ (۲، ۲) پر ملتے ہیں تو متقاربوں کا مرتسم کرنا کچھ مشکل نہیں ہے منحنی مذکور و لا سے جس مقام پر ملتا ہے وہاں

لا٢ - ۱۰ لا + ۶ = ۰ ∴ لا = ۹،۳ یا ۰،۷ تقریباً

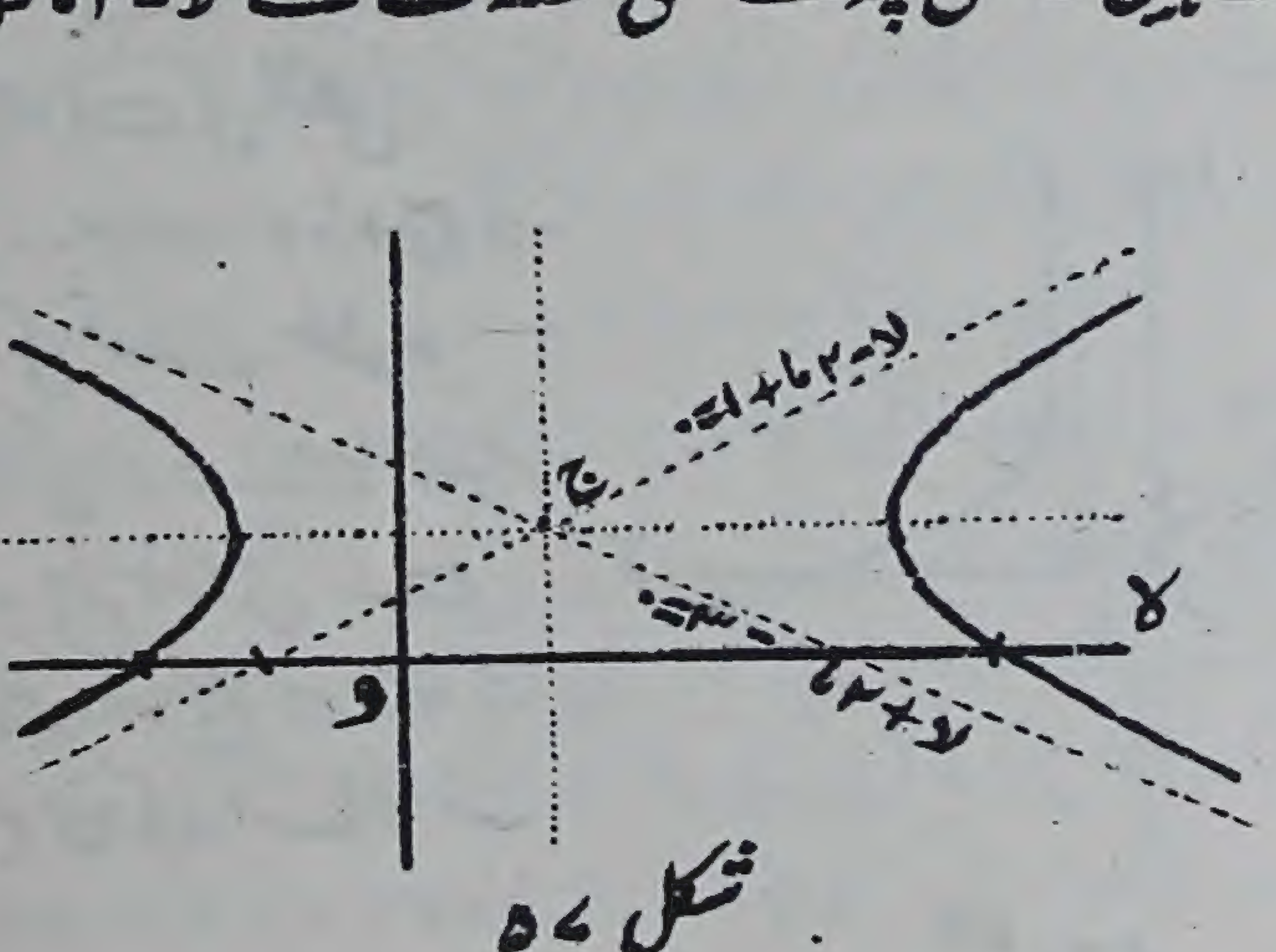
اسی طرح سے جہاں یہ و ما سے ملتا ہے وہاں

ما٢ + ۲۰ ما - ۲۴ = ۰ اس لئے ما = ۱،۱ یا -۲۲،۱

منحنی اوپر شکل ۵۶ میں دکھایا گیا ہے -

مثال ۸ - منحنی (لا - ۲ ما + ۱) (لا + ۲ ما - ۳) = ۵ کو مرتسم کرو
منحنی صریحاً قطع زائد ہے جس کے متقارب لا - ۲ ما + ۱ = ۰
اور لا + ۲ ما - ۳ = ۰ ہیں -

لا یا ما کو خاص قیمتیں دینے سے ہم اس امر کا آسانی سے فیصلہ کرسکتے ہیں کہ منحنی متقابل زاویوں کے کون سے زوج میں واقع ہوتا ہے مثلاً اگر لا = ۱ تو ما خیالی ہوتا ہے اور اگر ما = ۰ تو لا = ۴ یا - ۲، یا بطرز دیگر ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی پر کے کسی نقطہ کے لئے لا - ۲ ما + ۱ اور لا + ۲ ما - ۳



شکل ۵۷

دونوں مثبت ہیں یا دونوں منفی لیکن مبدأ کے لئے پہلا جملہ مثبت ہے اور دوسرا منفی ۔ پس جس زاویہ میں مبدأ واقع ہے اُس زاویہ میں منحنی واقع نہیں ہوتا ۔

محور متقاربوں کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتے ہیں اس لئے انہیں ہم آسانی سے کھینچ سکتے ہیں ۔ اس خاص صورت میں متقارب لا - ۲ ما + ۱ = ۰ اور لا + ۲ ما - ۳ = ۰ حوالہ کے محوروں سے مساوی زاوئے بناتے ہیں لہذا منحنی کے محور حوالہ کے محوروں کے متوازی ہیں ۔

معمولی طریقہ سے منحنی پر چند اور نقطے معلوم کئے جا سکتے ہیں اور منحنی مرتسم ہو سکتا ہے ۔

اس طریقہ میں صرف یہ نقص ہے کہ اس کے ذریعہ خروج المرکز، متقاطع اور مزدوج محوروں کے طول بآسانی معلوم نہیں ہو سکتے ۔

باب یازدہم پر متفرق مشقیں

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو

۱- ۶ لا^2 - لا ما - ۱۲ ما^2 - ۸ لا + ۲۹ ما - ۱۴ = ۰

۲- ۱۱ لا^2 - ۴ لا ما + ۱۴ ما^2 = ۲۴۰

۳- ۹ لا^2 - ۲۴ لا ما + ۱۶ ما^2 + ۴۴ لا + ۸ ما + ۵ = ۰

۴- ۴ (لا - ۲ ما + ۳)^2 + ۹ (۲ لا + ما - ۱)^2 = ۸۰

۵- ۵ لا^2 + ۶ لا ما - ۵ ما^2 - ۲۲ لا + ۱۸ ما - ۷ = ۰

۶- (لا - ۲ ما + ۱) (لا + ۲ ما - ۳) = - ۵

۷- ۵۷ لا^2 - ۱۵۰ لا ما - ۲۳ ما^2 = ۳۴

۸- لا^2 - ما^2 - ۱۰ لا + ۴ ما - ۷ = ۰

۹- لا^2 - لا ما + ما^2 - ۷ لا + ۸ ما + ۱۸ = ۰

۱۰- (لا + ۲ ما - ۲)^2 - ۴ (۲ لا - ما + ۱)^2 = ۴۵

۱۱- (۴ لا - ما + ۱۲) (لا - ۳ ما + ۹) = ۴۰

۱۲- ۸ لا^۲ - ۲ لا ما - ۱۵ ما^۲ + ۶ لا + ۴۶ ما - ۳۵ = ۰

۱۳- لا^۲ + ۲ لا + ۳ ما + ۳ = ۰

۱۴- ۴ لا^۲ - ۱۲ لا ما + ۹ ما^۲ + ۸ لا - ۶ ما + ۱ = ۰

۱۵- ما^۲ + ۲ لا ما + ۲ ما = ۱

۱۶- ۴ (لا - ۲ ما + ۳)^۲ - ۹ (۲ لا + ما - ۱)^۲ = ۸۰

۱۷- ما^۲ + ۴ ما + ۶ لا + ۳ = ۰

۱۸- (۴ لا - ما + ۱۲) (لا - ۳ ما + ۹) = ۱۰۸

۱۹- (لا - ما + ۱)^۲ + ۲ (لا + ما - ۳)^۲ = ۰

۲۰- ۴ لا^۲ - ۱۲ لا ما + ۹ ما^۲ + ۱۳ لا - ۲۶ ما = ۰

۲۱- لا^۲ + ما^۲ - ۱۰ لا + ۶ ما - ۲ = ۰

۲۲- ۲ لا^۲ - ۳ لا ما - ۲ ما^۲ + ۵ ما + ۲ = ۰

۲۳- ۴ لا^۲ - ۱۲ لا ما + ۹ ما^۲ - ۴ لا + ۶ ما - ۵ = ۰

۲۴- (۳ لا + ۴ ما - ۳)^۲ + (۸ لا - ۶ ما + ۳) = ۵۰

۲۵- ۱۵ لا^۲ - ۲۳ لا ما - ۲۸ ما^۲ + لا + ۲۹ ما - ۶ = ۰

۲۶- لا^۲ + ۶ لا ما + ۹ ما^۲ + ۵ لا + ۱۵ ما + ۱۲ = ۰

۲۷- ۲۵ لا^۲ - ۳۶ لا ما + ۴۰ ما^۲ + ۱۰ لا - ۲۸ ما - ۴۷ = ۰

۲۸- (لا + ما - ۲) (لا - ما + ۴) + ۲۰ = ۰

۲۹- ۴۹ لا^۲ + ۱۲۶ لا ما + ۸۱ ما^۲ + ۲۳ لا + ۱۱ ما + ۱۲ = ۰

۳۰- (لا + ۲ ما)^۲ + ۳ (لا + ۲ ما) + ۲ = ۰

۳۱- ۱۶۱ لا^۲ + ۴۸۰ لا ما - ۱۶۱ ما^۲ + ۲۸۹ = ۰

۳۲- ۷ لا^۲ - ۶۰ لا ما + ۳۲ ما^۲ - ۱۰۶ لا + ۶۸ ما - ۳۷ = ۰

۳۳- ۱۳ لا^۲ + ۸ لا ما √۳ + ۲۱ ما^۲ + (۷۵ - ۳۶ √۳) لا + (۳۶ + ۷۵ √۳) ما + ۱۴۴ = ۰

۳۴- ۹ لا^۲ - ۲ √۳ لا ما + ۱۱ ما^۲ - ۲ (۹ - √۳) لا - ۲ (۱۱ - √۳) ما + ۲ (۲ + √۳) = ۰

۳۵- لا^۲ + ۳ لا ما + ۴ ما^۲ - ۲۸ لا - ۵۶ ما + ۱۹۶ = ۰

۳۶ - ۳ لا^{۲} + ۲ لا ما + ما^{۲} - ۱۰ لا - ۱۴ ما + ۱۹ = ۰

۳۷ - (لا + ۳ ما)^{۲} + (۲ لا - ۲ ما + ۶)^{۲} = ۴۰

آزمائشی پرچہ ۳

۱- بتاؤ کہ منحنی ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے مرکز کے محدد (لاَ، ماَ) کیسے معلوم ہو سکتے ہیں اور ثابت کرو کہ متقاربوں کی مساوات

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

= ا لاَ^{۲} + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^{۲} + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج ہے

۲- ایک قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں

۲ لا - ما - ۳ = ۰ اور ۳ لا + ما - ۷ = ۰

ہیں اور قطع زائد نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ نقطہ (۴، √۱۹) میں سے بھی گذرتا ہے اور اس کا خروج المرکز √(۴ + ۲ √۲) ہے۔

۳- مجمل طور پر بیان کرو کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے جو طریق تعبیر ہوتا ہے اُسکی نوعیت کیسے معلوم کرنی چاہئے جبکہ حوالہ کے محور علی القوائم ہوں۔

۴- ذیل کی مساواتوں کی تعبیریں بیان کرو۔

(۱) لا^{۲} + ۶ لا ما + ۹ ما^{۲} + ۴ لا + ۱۲ ما - ۱۲ = ۰

(۲) لا ما - ۷ لا - ۲ ما + ۴ = ۰

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو۔

۵- (۲ لا - ما)^{۲} = ۵ (لا - ۲ ما)

۶- (۲ لا + ۳ ما)^{۲} + (۲ لا + ۲ ما + ۲) = ۰

۷- ۱۸۰ لا^{۲} + ۱۲۰ لا ما + ۱۴۵ ما^{۲} - ۴۸ لا - ۸۶ ما - ۲۳ = ۰

۸ ـ ۲۵ لا^{۲} + ۱۲۰ لا ما + ۱۴۴ ما^{۲} ـ ۶۴ لا ـ ۹ ما ـ ۱۱ = ۰

۹ ـ دو ناقصوں کی مساواتیں معلوم کرو جن کے اصلی محور ۳ لا + ما ـ ۱ = ۰ اور لا ـ ۳ ما + ۲ = ۰ ہوں اور جن کے محور اعظم اور محور اصغر کے طول بالترتیب ۶ اور ۴ ہوں۔

۱۰ ـ کن شرائط کے ماتحت

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

دو متوازی خطوط مستقیم کو تعبیر کریگی۔

باب دوازدہم

وتر اور مماس

۱۲۴- اس باب میں ہم وتروں اور مماسوں کی بعض خاصیتوں پر بحث کریںگے۔ آئندہ ہر صورت میں مماس کو ہم ایک ایسا خط خیال کریںگے جو منحنی سے دو منطبق ہونے والے نقاط پر ملتا ہو یا بالفاظ دیگر منحنی کو دو ایسے نقاط پر قطع کرتا ہو جو ایک دوسرے کے لاانتہا قریب ہوں۔

۱۲۵- نقطۂ معلومہ میں سے ایک خط سمت معلومہ میں کھینچا گیا ہے، جن نقاط پر یہ مخروطی تراشں

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

سے ملتا ہے اُن کے فاصلے نقطۂ مذکورہ سے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ معلومہ و (لا١، ما١) ہے اور خط کی سمت محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔ ایک ایسے نقطہ ن کے محدد جس کا فاصلہ و سے ر ہو

لا١ + ر جم طہ، ما١ + ر جب طہ ہیں

(مقابلہ کرو حصہ اول دفعہ ۱۰ ب نتیجہ صریح)

اگر یہ نقطہ ن منحنی پر واقع ہو تو لازماً

ا (لا١ + ر جم طہ)^۲ + ۲ ھ (لا١ + ر جم طہ)(ما١ + ر جب طہ) + ب (ما١ + ر جب طہ)^۲

+ ۲ گ (لا١ + ر جم طہ) + ۲ ف (ما١ + ر جب طہ) + ج = ۰

اس مساوات میں ر کی بڑی سے بڑی قوت ۲ ہے، اسلئے اسے ہم ر میں مساوات درجہ دوم خیال کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ فاصلے حاصل ہوتے

ہیں۔ اور یہ از خود عیاں ہے کہ یہ مساوات درجہ دوم کی ہونی چاہیئے کیونکہ ہر ایک خط منحنی سے ٹھیک دو نقطوں پر ملتا ہے۔

اس مساوات کو بلحاظ ر کی قوتوں کے ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

ر^2 (ا جم^2 طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب^2 طہ)

+ ۲ ر {(ا لا' + ھ ما' + گ) جم طہ + (ھ لا' + ب ما' + ف) جب طہ}

+ ا لا'^{2} + ۲ ھ لا' ما' + ب ما'^{2} + ۲ گ لا' + ۲ ف ما' + ج = ۰ ....(۱)

اس مساوات کی دو اصلیں مطلوبہ فاصلے ہیں۔

نوٹ اس ثبوت میں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ محور علی القوائم ہیں۔

ذیل کی دفعات میں ہم اوپر کی مساوات درجہ دوم سے نہایت ضروری نتائج اخذ کرینگے جو مسائل مخروطات میں بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔

۱۲۶ – اوپر لکھے ہوئے جو مساوات درجہ دوم ہے اس سے کئی نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات کی ایک اصل صفر۔

مساوات کی ایک اصل صفر ہوگی اگر

ا لا'^{2} + ۲ ھ لا' ما' + ب ما'^{2} + ۲ گ لا' + ۲ ف ما' + ج = ۰

جو اس امر کی شرط ہے کہ نقطہ (لا'، ما') منحنی پر واقع ہو۔ اور یہی ہونا چاہیئے کیونکہ صرف اسی صورت میں ر کی ایک قیمت صفر ہو سکتی ہے۔

۱۲۷ – دونوں اصلیں صفر۔

مساوات کی دونوں اصلیں صفر ہونگی اگر (لا'، ما') منحنی پر واقع ہو اور مزید برآں

جم طہ (ا لا' + ھ ما' + گ) + جب طہ (ھ لا' + ب ما' + ف) = ۰ ....(۲)

[ٹیوٹوریل الجبرا، حصہ دوم، دفعہ ۱۶۵]

اس صورت میں خط صریحاً نقطہ (لا'، ما') پر مماس ہے کیونکہ یہ منحنی سے ایسے دو نقطوں پر ملتا ہے جو (لا'، ما') پر منطبق ہوتے ہیں، اسلئے مساوات

(۲) سے (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی سمت حاصل ہوتی ہے یعنی

مس ط = − (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) / (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) ......(۳)

۱۲۸ − (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو

[انتباہ - مماس کی مساوات کی باضابطہ تحقیق دفعات ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸ پر مشتمل ہونی چاہیئے]

مساوات مطلوبہ ہے

(ما − ما۱) = (لا − لا۱) مس ط [حصہ اول دفعہ ۱۰ (ب)]

جہاں ط میلان ہے و لا کے ساتھ ۔

دفعہ ۱۲۷ کی رو سے یہ ہوگی

(ما − ما۱) = (لا − لا۱) (− (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) / (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف))

یا (لا − لا۱) (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + (ما − ما۱) (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) = ۰

ضرب دیئے جانے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) − (ا لا۱^{2} + ۲ ھ لا۱ ما۱ + ب ما۱^{2}
+ گ لا۱ + ف ما۱) = ۰

لیکن چونکہ (لا۱، ما۱) منحنی پر واقع ہے اس لئے

ا لا۱^{2} + ۲ ھ لا۱ ما۱ + ب ما۱^{2} + ۲ گ لا۱ + ۲ ف ما۱ + ج = ۰

∴ ا لا۱^{2} + ۲ ھ لا۱ ما۱ + ب ما۱^{2} + گ لا۱ + ف ما۱ = −(گ لا۱ + ف ما۱ + ج)

اس لئے مماس کی مساوات ہے بالآخر

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰ ... (۴)

اسے ہم شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں ۔

$\text{ا لا لا}_1 + \text{ھ} (\text{لا ما}_1 + \text{لا}_1 \text{ما}) + \text{ب ما ما}_1 + \text{گ} (\text{لا}_1 + \text{لا}) + \text{ف} (\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ج} = ۰$

جو منحنی کی مساوات میں لا^2 کی بجائے لا لا_1، ما^2 کی بجائے ما ما_1، ۲ لا ما کی بجائے $\text{لا ما}_1 + \text{لا}_1 \text{ما}$ ، ۲ لا کی بجائے $\text{لا} + \text{لا}_1$ اور ۲ ما کی بجائے $\text{ما} + \text{ما}_1$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس شکل کو یاد رکھنا چاہیئے۔

مماسات کی مساواتیں چند سادہ صورتوں میں

ضابطہ ۴ کی رو سے مکافی $\text{ما}^2 - ۴ \text{ ا لا} = ۰$ کی صورت میں مماس ہے

$$\text{ما ما}_1 = \text{لا} (۲ \text{ ا}) - ۲ \text{ ا لا}_1 = ۰$$

یعنی $$\text{ما ما}_1 = ۲ \text{ ا} (\text{لا} + \text{لا}_1) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کی صورت میں مماس ہے

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

زائد کی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کی صورت میں مماس ہے

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

۱۲۹ — عام طریقہ کا استعمال چند سادہ صورتوں میں

اس طریقہ کو توضیحاً ہم چند خاص صورتوں میں استعمال کرینگے اور مکافی $\text{ما}^2 = ۴ \text{ ا لا}$ اور ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے لئے ر کی مساوات درجۂ دوم اور مماس کی مساوات معلوم کرینگے، سب عمل ابتدائی اصولوں کی بنا پر ہوگا۔

۱ — مکافی $\text{ما}^2 = ۴ \text{ ا لا}$ کے لئے "ر" کی مساوات درجۂ دوم معلوم کرو اور اس سے منحنی کے نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرو۔

اگر خط نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ میں سے کھینچا جائے اور ر ایک مطلوبہ قیمت ہو تو

(حصہ اول، دفعہ ۱۰، ب، نتیجہ صریح کی رو سے)

نقطہ $(\text{لا}_1 + \text{ر}\,\text{جم طہ}\,،\ \text{ما}_1 + \text{ر}\,\text{جب طہ})$ منحنی پر واقع ہوگا یعنی

$$(\text{ما}_1 + \text{ر}\,\text{جب طہ})^2 = 4\text{ا}\,(\text{لا}_1 + \text{ر}\,\text{جم طہ})$$

یعنی $\text{ر}^2\,\text{جب}^2\text{طہ} + 2\text{ر}\left\{\text{ما}_1\,\text{جب طہ} - 2\text{ا}\,\text{جم طہ}\right\} + \text{ما}_1^2 - 4\text{ا}\,\text{لا}_1 = 0$

جو مساوات مطلوبہ ہے

اس کی ایک اصل صفر ہوگی اگر $\text{ما}_1^2 - 4\text{ا}\,\text{لا}_1 = 0$

یعنی اگر $(\text{لا}_1\,،\ \text{ما}_1)$ منحنی پر واقع ہو، دوسری اصل صرف اسی صورت میں صفر ہوگی جبکہ خط نقطہ $(\text{لا}_1\,،\ \text{ما}_1)$ پر مماس ہو، اس کے لیئے شرط ہے

$$\text{ما}_1\,\text{جب طہ} - 2\text{ا}\,\text{جم طہ} = 0$$

اس لیئے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = \text{مس طہ} = \frac{2\text{ا}}{\text{ما}_1}$$

$$\therefore\ \text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{ما}_1^2 = 2\text{ا}\,\text{لا} - 2\text{ا}\,\text{لا}_1$$

لیکن $\text{ما}_1^2 = 4\text{ا}\,\text{لا}_1$

اس لیئے مساوات مطلوبہ ہے $\text{ما}\,\text{ما}_1 = 2\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$

۲- ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے لیئے ر، مساوات درجہ دوم معلوم کرو اور اس سے منحنی کے نقطہ $(\text{لا}_1\,،\ \text{ما}_1)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرو۔

نقطہ $(\text{لا}_1 + \text{ر}\,\text{جم طہ}\,،\ \text{ما}_1 + \text{ر}\,\text{جب طہ})$ لازماً منحنی پر واقع ہوتا ہے اس لیئے

$$\frac{(\text{لا}_1 + \text{ر}\,\text{جم طہ})^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ما}_1 + \text{ر}\,\text{جب طہ})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

یعنی $\text{ر}^2\left(\frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{طہ}}{\text{ب}^2}\right) + 2\text{ر}\left(\frac{\text{لا}_1\,\text{جم طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{جب طہ}}{\text{ب}^2}\right) + \left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1\right) = 0$

جو مساوات مطلوبہ ہے

اس کی ایک اصل صفر ہوگی اگر

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}=1$$

یعنی اگر نقطہ (لا_1، ما_1) منحنی پر واقع ہو، اس مساوات کی دوسری اصل صرف اُسی صورت میں صفر ہوگی جبکہ یہ خط اس نقطہ پر ناقص کا مماس ہو، اس کے لئے شرط یہ ہے

$$\frac{\text{لا}_1\,\text{جم طہ}}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_1\,\text{جب طہ}}{\text{ب}^2}=0$$

یا

$$\text{مس طہ}=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}_1}{\text{ما}_1}$$

اس لئے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{لا}-\text{لا}_1}=\text{مس طہ}=-\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2\,\text{ما}_1}$$

یا

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}(\text{لا}-\text{لا}_1)+\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}(\text{ما}-\text{ما}_1)=0$$

اور چونکہ

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}=1$$

اس لئے مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2}=1$$

مشقیں

۱۔ مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کی صورت میں ثابت کرو کہ ر، مساوات درجہ دوم ہے

$$\text{ر}^2\left(\frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{\text{ا}^2}-\frac{\text{جب}^2\text{طہ}}{\text{ب}^2}\right)+2\,\text{ر}\left(\frac{\text{لا}_1\,\text{جم طہ}}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}_1\,\text{جب طہ}}{\text{ب}^2}\right)+\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}-1=0$$

۲- اوپر کی مساوات سے زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات حاصل کرو۔

۳- منحنی $\text{لا}^2 + \text{لا} + \text{ما} = 3$ کے نقطہ (۱، ۱) پر مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۴- منحنی $3\,\text{لا}^2 + 6\,\text{لا}\,\text{ما} + 2\,\text{ما}^2 - 6\,\text{لا} + 2\,\text{ما} - 25 = 0$ کے اُن نقاط پر مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں لا = ۱ منحنی سے ملتا ہے۔

۵- منحنی $\text{لا}^2 + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2 = 3$ پر وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے مماس ما = لا کے متوازی ہیں۔
[اگر (لا۱، ما۱) ایک ایسا نقطہ ہو تو متوازی ہونے کی شرط سے ایک مساوات حاصل ہوگی، دوسری مساوات لا۱، ما۱ کے لحاظ سے یہ ہے $\text{لا}_1^2 + \text{لا}_1\text{ما}_1 + \text{ما}_1^2 = 3$]

۶- ایک خط مستقیم نقطہ و (۱، ۲) میں سے ولا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہوا کھینچا گیا ہے اور منحنی $\text{لا}^2 + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2 + \text{لا} + \text{ما} + 1 = 0$ سے ن اور ق پر ملتا ہے، وہ مساوات درجہ دوم معلوم کرو جسکی اصلیں ون اور وق ہوں اور ثابت کرو کہ

$$\text{ون} + \text{وق} = -\frac{11\sqrt{2}}{3}، \quad \text{ون} \times \text{وق} = \frac{22}{3}$$

۷- ثابت کرو کہ مثال ۶ میں نقطہ و میں سے گزرنے والا خط مخروطی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے۔

۸- نقطہ (-۱، ۰) میں سے ایک خط محور لا کے ساتھ زاویہ $\text{مس}^{-1}\frac{5}{12}$ بناتا ہوا کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ نقطہ (-۱، ۰) سے اُن نقطوں کے فاصلے جہاں یہ مخروطی $\text{لا}\,\text{ما} + \text{لا} + \text{ما} = 0$ سے ملتا ہے مساوات $60\,\text{ر}^2 + 156\,\text{ر} - 169 = 0$ کی اصلوں کے مساوی ہیں۔
اس مساوات کی ایک منفی اصل کی ہندسی تعبیر کیا ہوگی؟

۹- مثال ۸ میں مقطوعہ کے نقطۂ تنصیف کے محدد معلوم کرو۔
[و سے نقطہ تنصیف کا فاصلہ = $\frac{1}{2}$ (ون + وق) اور استعمال کرو
$\bar{\text{لا}} = \text{لا} + \text{ر}\,\text{جم}\,\text{طہ}،\ \bar{\text{ما}} = \text{ما} + \text{ر}\,\text{جب}\,\text{طہ}$]

۱۰- مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق کے محاذی ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۱- ایک خط مستقیم مکافی کے محور کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ مرتب سے ک پر، منحنی سے و پر اور اُس ماسکی وتر سے جو و پر کے مماس کے متوازی ہو ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ک و = و ق

۱۳۰- ر، مساوات درجہ دوم سے مزید نتائج۔ ایک اصل لامتناہی۔

ر، مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اگر (ٹیوٹوریل الجبرا، دوم، دفعہ ۱۶۶)

ا جم۲ طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب۲ طہ = ۰ ...... (۸)

یا　ب مس۲ طہ + ۲ ھ مس طہ + ا = ۰

جو مس طہ میں ایک مساوات درجہ دوم ہے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی دو قیمتیں ہیں جن کے لئے خط منحنی کو لامتناہی پر کاٹتا ہے، یا بالفاظ دیگر کسی نقطہ میں سے دو ایسے خط کھینچے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا ایک نقطۂ تقاطع منحنی کے ساتھ لامتناہی پر ہو، نیز ظاہر ہے کہ یہ دو خطوط

ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ۰

کے متوازی ہیں یعنی یہ مخروطی کے متقاربوں کے متوازی ہیں۔

یہ خط حقیقی اور غیر منطبق ہونگے اگر ا ب < ھ۲ یعنی اگر منحنی قطع زائد ہو (دفعہ ۹۱)

یہ منطبق ہونگے اگر ا ب = ھ۲ یعنی اگر منحنی مکافی ہو (دفعہ ۵۲)

اور یہ خیالی ہونگے اگر ا ب > ھ۲ یعنی منحنی قطع ناقص ہو

متذکرہ بالا سے اُن سب امور کی تصدیق ہوتی ہے جو ہر سہ تراشہائے مخروطی کی صورت میں خطوط کے لامتناہی پر ملنے کے لئے بیان کئے گئے ہیں۔

۱۳۱- دونوں اصلیں لامتناہی۔ متقاربوں کی مساوات

اگر دونوں اصلوں میں سے ہر ایک لامتناہی ہو تو ل۲ اور ل کے سر دونوں

لازماً صفر ہونگے اسلئے [ٹیوٹوریل الجبرا، دوم، دفعہ ۱۶۷ کی رو سے]

ا جم² طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب² طہ = ۰

اور جم طہ (ا لا، + ھ ما، + گ) + جب طہ (ھ لا، + ب ما، + ف) = ۰

دوسری مساوات سے مس طہ کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اُسے پہلی مساوات میں مندرج کرنے سے ہم طہ کو ساقط کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ (لا، ، ما،) ایک ایسا نقطہ نہیں ہے کہ اس کا مقام ہم جہاں چاہیں فرض کرسکیں بلکہ یہ لازماً مساوات ذیل کے طریق پر واقع ہے

ب (ا لا، + ھ ما، + گ)² − ۲ ھ (ا لا، + ھ ما، + گ) (ھ لا، + ب ما، + ف)
+ ا (ھ لا، + ب ما، + ف)² = ۰ ......(ا)

اب دونوں اصلیں لامتناہی اُسی صورت میں ہوسکتی ہیں جبکہ منحنی کو کاٹنے والا خط مستقیم متقارب ہو، اسلئے اگر شرط (ا) پوری ہو تو (لا، ، ما،) متقارب پر واقع ہوتا ہے، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دونوں متقاربوں کی مساوات یہ ہے

ب (ا لا + ھ ما + گ)² − ۲ ھ (ا لا + ھ ما + گ) (ھ لا + ب ما + ف) + ا (ھ لا + ب ما + ف)² = ۰ ......(ب)

مزید برآں ہم جانتے ہیں کہ مخروطی کا مرکز ذیل کی دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

ا لا، + ھ ما، + گ = ۰ اور ھ لا، + ب ما، + ف = ۰

اس لئے مساواتیں ا لا + ھ ما + گ = ۰ اور ھ لا + ب ما + ف = ۰ ایسے دو خطوط کو تعبیر کرتی ہیں جو مرکز میں سے گزرتے ہیں، اس لئے مساوات (ب) جو درجہ دوم کی ایک متجانس مساوات ہے مرکز میں سے گزرنے والے دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے، اور ہونا بھی یہی چاہئے کیونکہ متقارب مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (ب) میں ضرب دینے اور رقوم کو ترتیب وار لکھنے سے طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ متقاربوں کی مساوات کی اس شکل میں اور شکل دفعہ ۱۱۰ میں صرف اتنا فرق ہے کہ اس میں ا ب − ھ² بطور ضارب

جزوِ ضربی کے ہر رقم کے ساتھ موجود ہے۔

۱۳۲- اگر نقطہ و میں سے دو وتر ثابت سمتوں میں کھینچے جائیں اور وہ ایک مخروطی سے ن، ق اور نَ، قَ پر ملیں تو ثابت کرو کہ سطوح ون × وق اور ونَ × وقَ کی باہمی نسبت و کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

فرض کرو کہ و کے محدد (لا، ما) ہیں اور وتروں کی سمتیں ولا کے ساتھ زاویے طہ اور طہَ بناتی ہیں، اگر مخروطی عام مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہو تو ون، وق کے طول مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

ر^{2} (ا جم^{2} طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب^{2} طہ)

+ ۲ ر {جم طہ (ا لا + ھ ما + گ) + جب طہ (ھ لا + ب ما + ف)}

+ ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ [دفعہ ۱۲۵]

اسلئے مسائل مساوات درجہ دوم کی رو سے

ون × وق = (ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) / (ا جم^{2} طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب^{2} طہ)

اور اسی طرح سے

ونَ × وقَ = (ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) / (ا جم^{2} طہَ + ۲ ھ جب طہَ جم طہَ + ب جب^{2} طہَ)

جس سے (ون × وق) / (ونَ × وقَ) = (ا جم^{2} طہَ + ۲ ھ جب طہَ جم طہَ + ب جب^{2} طہَ) / (ا جم^{2} طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب^{2} طہ) (۱۰)

چونکہ (ون × وق) / (ونَ × وقَ) کی قیمت میں جو اوپر معلوم ہوئی لا یا ما میں سے کوئی بھی شامل نہیں ہوتا اس لئے یہ و کے مقام پر منحصر نہیں ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ یہ قیمت صرف ان سمتوں پر موقوف ہے جن میں کہ

وتر کھینچے گئے ہیں۔

نتیجہ صریح ۔ بالخصوص جب نقطے ن اور ق ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں فرض کرو کہ نقطہ م پر اور نَ، قَ منطبق ہو جائیں مَ پر تو یہ خط مماس ہو جائیں گے، اس صورت میں اوپر کی نسبت $\frac{\text{وم}^2}{\text{ومَ}^2}$ کے مساوی ہوگی۔

مشق

۱۲۔ اگر مخروطی دائرہ ہو تو مسئلہ بالا سے حاصل کرو کہ

$$\text{ون} \times \text{وق} = \text{ونَ} \times \text{وقَ}$$ [اقلیدس م ۳ ش ۳۵، ۳۶]

۱۳۔ کسی نقطہ سے ایک مرکز دار تراشش کے جو مماس کھینچ سکتے ہیں ان کے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ان کے متوازی نیم قطروں کو آپس میں ہے۔

فرض کرو کہ مماسات وم، ومَ نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ زاویے طہ اور طہَ بناتے ہیں، نیز ل ج لَ اور ن ج نَ مخروطی کے دو قطر ہیں جو بالترتیب ان مماسوں کے متوازی ہیں تب اوپر کے عام نتیجہ کی رو سے

$$\frac{\text{وم}^2}{\text{ومَ}^2} = \frac{\text{ل ج} \times \text{ج لَ}}{\text{ن ج} \times \text{ج نَ}} = \frac{\text{ا جم}^2\text{طہَ} + ۲\,\text{ھ جب طہَ جم طہَ} + \text{ب جب}^2\text{طہَ}}{\text{ا جم}^2\text{طہ} + ۲\,\text{ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2\text{طہ}}$$

$$= \frac{\text{ج ل}^2}{\text{ج ن}^2}$$ کیونکہ ج لَ = ج ل اور ج نَ = ج ن

$$\therefore \quad \frac{\text{وم}}{\text{ومَ}} = \frac{\text{ج ل}}{\text{ج ن}}$$

دائرہ کی صورت میں یہ نتیجہ بالکل ظاہر ہے کیونکہ دائرہ کے مماس مساوی ہوتے ہیں اور قطر بھی باہم مساوی ہوتے ہیں۔

مثال ۔ نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرنے والے اُن دو خطوط کی سمتیں معلوم کرو جو منحنی $\text{لا}^2 - ۳\,\text{لا ما} + ۲\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{لا} = ۰$ کو لاتناہی پر کے ایک

نقطہ پر کاٹیں ۔ نیز جن محدود نقاط پر وہ منحنی سے ملتے ہیں اُنہیں معلوم کرو۔

ر ، مساوات اس صورت میں ہوگی

$$(۱ + ر\,جم\,ط)^{۲} - ۳(۱ + ر\,جم\,ط)(۱ + ر\,جب\,ط) + ۲(۱ + ر\,جب\,ط)^{۲} + ۲(۱ + ر\,جم\,ط) = ۰$$

$$یا\; ر^{۲}(جم^{۲}ط - ۳\,جب\,ط\,جم\,ط + ۲\,جب^{۲}ط) + ر(جم\,ط + جب\,ط) + ۲ = ۰$$

اگر ایک نقطۂ تقاطع لاتناہی پر ہو تو

$جم^{۲}ط - ۳\,جب\,ط\,جم\,ط + ۲\,جب^{۲}ط = ۰$ جس سے ظم ط = ۱ یا ۲

محدود اصل اس مساوات سے ملیگی

$$ر(جم\,ط + جب\,ط) + ۲ = ۰$$

اگر ظم ط = ۱ تو اس مساوات سے $ر\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) + ۲ = ۰$ یا $ر = -\sqrt{۲}$

اگر ظم ط = ۲ تو " " $ر\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}} + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) + ۲ = ۰$ یا $ر = -\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$

اب محدود نقاطِ تقاطع کے محدد (۱ + ر جم ط ، ۱ + ر جب ط) ہیں۔

جس صورت میں کہ ظم ط = ۱ یہ ہونگے $۱ - \sqrt{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ، $۱ - \sqrt{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ یعنی (۰ ، ۰)

" کہ ظم ط = ۲ ہونگے $۱ - \frac{۲\sqrt{۵}}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ، $۱ - \frac{۲\sqrt{۵}}{۳} \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}$ یعنی $\frac{۱}{۳}$ ، $-\frac{۱}{۳}$

اس لئے خطوط و لا کے ساتھ زاویے °۴۵ اور $ظم^{-۱}۲$ بناتے ہیں اور محدود نقاط تقاطع (۰ ، ۰) ، $(\frac{۱}{۳} ، -\frac{۱}{۳})$ ہیں۔

مشقیں

۱۳۔ دو خط نقطہ (۱ ، ۱) میں سے کھینچے گئے ہیں ، ہر خط اور منحنی $لا^{۲} - ۴\,لا\,ما + ۳\,ما^{۲} + ۲\,لا + ۶\,ما = ۰$ کے نقاط تقاطع میں سے ایک نقطہ لاتناہی پر ہے ، خطوط کی سمتیں اور اُن محدود نقطوں کے محدد

معلوم کرو جن پر یہ خط منحنی سے ملتے ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۳، ۲) میں سے صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے جس کا ایک نقطۂ تقاطع منحنی لا^{2} + ۲ لا ما + ما^{2} + ۳ لا + ما + ا = ۰ کے ساتھ لاتناہی پر ہو، اس کی کیا وجہ ہے؟ محدود نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۱۵۔ ابتدائی اصولوں سے حسب دفعہ ۱۳۱ ذیل کے منحنیات کے متقارب معلوم کرو۔

لا^{2}/ا^{2} − ما^{2}/ب^{2} = ۱ اور ۴ لا^{2} − ۲ لا ما − ۳ ما^{2} + ۳ لا + ۲ ما = ۰

۱۶۔ نتیجہ دفعہ ۱۳۲ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مرکز دار تراشش اور ایک دائرہ ایک دوسرے کو چار نقطوں پر قطع کریں تو انکے مشترک وتر مخروطی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۱۷۔ اگر ایک دائرہ ایک ناقص کو ن پر مس کرے اور نقاط ق، ر پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ن ق، ن ر اور ناقص کے محور سے ایک مثلث متساوی الساقین بنتا ہے۔

۱۸۔ ایک متغیر نقطہ و میں سے ایک خط ایک ثابت سمت میں کھینچا گیا ہے جو مخروطی سے ن اور ق پر ملتا ہے، و کا طریق معلوم کرو۔

(۱) جبکہ و ن + و ق مستقل ہو (۲) و ن × و ق مستقل ہو

دائرہ کی صورت میں نتیجہ (۲) کیا ہو جائیگا؟

[مخروطی کی مساوات عام شکل میں لو اور استعمال کرو سمتی مساوات درجہ دوم بلحاظ ر کے]

۱۳۴۔ اب ہم ایک اور طریقہ بیان کرینگے جس کی مدد سے مخروطی کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات اور علاوہ اسکے کئی اور ضروری نتائج حاصل ہو سکتے ہیں، اس طریقہ کو ابتدا میں ہم ایک سادہ منحنی کی صورت میں استعمال کرتے ہیں۔

۳۵۱ـ جس نسبت سے کہ مکافی $ما^2 = 4 ا لا$ دو نقاط کو ملانے والے خط کی تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو اور اس سے مکافی کے نقطہ ($لا_1$ ، $ما_1$) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو۔

چونکہ خط مستقیم مکافی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے اس لئے ابتدا میں ہی اسے ہم بجانب لیتے ہیں کہ اس نسبت کے لئے ہمیں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی۔

فرض کرو کہ ا ($لا_1$ ، $ما_1$) اور ب ($لا_2$ ، $ما_2$) دو مفروضہ نقطے ہیں۔ اگر ن خط ا ب کو اسطرح تقسیم کرے کہ

$$ا ن : ن ب = ک : ل$$

تو ن کے محدد ہونگے $\frac{ک\, لا_2 + ل\, لا_1}{ک + ل}$ ، $\frac{ک\, ما_2 + ل\, ما_1}{ک + ل}$ [حصہ اول، دفعہ ۳]

اس لئے ہمیں نسبت ک : ل ایسی معلوم کرنا ہے کہ یہ نقطہ ن منحنی پر واقع ہو

اس لئے $$\frac{(ک\, ما_2 + ل\, ما_1)^2}{(ک + ل)^2} = 4 ا \frac{ک\, لا_2 + ل\, لا_1}{ک + ل}$$

یا $$(ک\, ما_2 + ل\, ما_1)^2 = 4 ا (ک\, لا_2 + ل\, لا_1)(ک + ل)$$

$$\therefore ک^2 (ما_2^2 - 4 ا لا_2) + 2 ک ل (ما_1 ما_2 - 2 ا لا_1 - 2 ا لا_2) + ل^2 (ما_1^2 - 4 ا لا_1) = 0$$

جو بلحاظ نسبت $\frac{ک}{ل}$ کے مساوات درجہ دوم ہے، اس سے اُن نقاط کے لئے جہاں مکافی خط کو کاٹتا ہے $\frac{ک}{ل}$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نسبت $\frac{ک}{ل}$ کی ایک قیمت صفر ہوگی جب $ما_1^2 - 4 ا لا_1 = 0$ یعنی جب نقطہ ا ($لا_1$ ، $ما_1$) منحنی پر واقع ہو۔ اس نسبت کی دوسری قیمت صرف اُسی صورت میں صفر ہو سکتی ہے جبکہ ($لا_2$ ، $ما_2$) نقطہ ($لا_1$ ، $ما_1$) پر کے مماس پر واقع ہو، اسکے لئے شرط یہ ہے

$$ما_1 ما_2 - 2 ا لا_2 - 2 ا لا_1 = 0$$

اس لئے مماس کی مساوات حسب سابق یہ ہے

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$$

مشق

دفعہ ۱۳۵ کے طریقہ سے ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۱۳۶ — جس نسبت سے مخروطی تراش $\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ دو نقطوں کو ملانے والے خط کی تقسیم کرتی ہے اُسے معلوم کرو۔

دفعہ ۱۳۵ کے موافق اگر $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ دو معلومہ نقطے ہوں اور ک : ل مطلوبہ نسبت ہو تو نقطہ

$$\frac{\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}} \;،\; \frac{\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$$

لازماً منحنی پر واقع ہونا چاہیئے۔

اس کے لئے شرط یہ ہے

$$\text{ا}\left(\frac{\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ک}+\text{ل}}\right)^2 + ۲\text{ھ}\left(\frac{\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ک}+\text{ل}}\right)\left(\frac{\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1}{\text{ک}+\text{ل}}\right) + \text{ب}\left(\frac{\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1}{\text{ک}+\text{ل}}\right)^2$$

$$+ ۲\text{گ}\left(\frac{\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ک}+\text{ل}}\right) + ۲\text{ف}\left(\frac{\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1}{\text{ک}+\text{ل}}\right) + \text{ج} = ۰$$

یا $(\text{ک} + \text{ل})^2$ کے ساتھ ضرب دینے سے

$$\text{ا}(\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1)^2 + ۲\text{ھ}(\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1)(\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1) + \text{ب}(\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1)^2$$

$$+ ۲\text{گ}(\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1)(\text{ک} + \text{ل}) + ۲\text{ف}(\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1)(\text{ک}+\text{ل}) + \text{ج}(\text{ک}+\text{ل})^2 = ۰$$

ک اور ل میں اس مساوات کو بطور متجانس مساوات کے ترتیب دینے سے

$$ک^{۲}(ا\,لا_{۲}^{۲} + ۲ھ\,لا_{۲}\,ما_{۲} + ب\,ما_{۲}^{۲} + ۲گ\,لا_{۲} + ۲ف\,ما_{۲} + ج)$$
$$+ ۲ک\,ل\{ا\,لا_{۱}\,لا_{۲} + ھ(لا_{۱}\,ما_{۲} + لا_{۲}\,ما_{۱}) + ب\,ما_{۱}\,ما_{۲} + گ(لا_{۱} + لا_{۲}) + ف(ما_{۱} + ما_{۲}) + ج\}$$
$$+ ل^{۲}(ا\,لا_{۱}^{۲} + ۲ھ\,لا_{۱}\,ما_{۱} + ب\,ما_{۱}^{۲} + ۲گ\,لا_{۱} + ۲ف\,ما_{۱} + ج) = ۰$$

یا مختصراً اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$ک^{۲}س_{۲} + ۲ک\,ل\,م_{۱۲} + ل^{۲}س_{۱} = ۰ \qquad ....(۱۱)$$

جہاں $م_{۱۲}$ بلحاظ $لا_{۱}$، $ما_{۱}$ اور $لا_{۲}$، $ما_{۲}$ کے متشاکل ہے (یعنی یہ نہیں بدلتا اگر $لا_{۱}$ کا تبادلہ $لا_{۲}$ سے اور $ما_{۱}$ کا $ما_{۲}$ سے کر دیا جائے)

مساوات (۱۱) نسبت ک : ل میں مساوات درجہ دوم ہے جس کو حل کرنے سے مطلوبہ نسبت حاصل ہوتی ہے، اسے یوعاکمستال کا نتیجہ کہتے ہیں۔

نوٹ درجہ دوم کی عام مساوات کو جب ہم آئندہ س = ۰ سے تعبیر کرینگے تو $س_{۱} = ۰$ اُس نتیجہ کو تعبیر کریگا جو لا، ما کی بجائے جملہ س میں $لا_{۱}$، $ما_{۱}$ مندرج کرنے سے حاصل ہو۔

نتیجہ صریح - اگر مساوات $\left(\frac{ک}{ل}\right)^{۲} س_{۲} + ۲\left(\frac{ک}{ل}\right) م_{۱۲} + س_{۱} = ۰$ کی اصلیں حقیقی ہوں تو خط مستقیم منحنی سے دو حقیقی نقاط ف، ق پر ملیگا اور اگر نسبت کی قیمت $\frac{ک}{ل}$ کے جواب میں نقطہ ف ہو تو جب یہ قیمت مثبت ہوگی ف نقاط ا، ب کے درمیان واقع ہوگا اور اگر یہ منفی ہوگی تو باہر واقع ہوگا۔

اگر اصلیں مساوی ہوں تو خط مخروطی سے دو منطبقہ نقاط پر ملے گا یعنی اسے مس کریگا۔

اگر اصلیں خیالی ہوں تو خط مخروطی سے خیالی نقاط پر ملے گا۔

اب ہم چند مثالیں اس غرض سے درج کرینگے کہ طالب علم اس ضروری

اصول کی اہمیت سے جو اوپر بیان ہوا پورے طور پر واقف ہو جائے۔

مثال ۱ — جس نسبت سے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ نقاط (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔

اگر ک : ل مطلوبہ نسبت ہو تو نقطہ

$$\frac{\text{ک لا}_2 + \text{ل لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}} \text{ ، } \frac{\text{ک ما}_2 + \text{ل ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$$

خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر واقع ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}(\text{ک لا}_2 + \text{ل لا}_1) + \text{ب}(\text{ک ما}_2 + \text{ل ما}_1) + \text{ج}(\text{ک} + \text{ل}) = ۰$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{ک}}{\text{ل}} = - \frac{\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج}}{\text{ا لا}_2 + \text{ب ما}_2 + \text{ج}}$$

جس سے مطلوبہ نسبت حاصل ہوتی ہے۔

اس ضابطہ سے ایک ضروری نتیجہ مترشح ہوتا ہے، فرض کرو کہ ا$_1$ (لا$_1$، ما$_1$) ہے اور ا$_2$ (لا$_2$، ما$_2$)، اب اگر ا$_1$، ا$_2$ خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں تو یہ خط ا$_1$ ا$_2$ کو داخلاً تقسیم کریگا اور نسبت ک : ل مثبت ہوگی، اس لئے اس صورت میں ا لا$_1$ + ب ما$_1$ + ج اور ا لا$_2$ + ب ما$_2$ + ج کی علامات مختلف ہونگی۔ اگر ا$_1$ اور ا$_2$ خط کے ایک ہی جانب واقع ہوں تو نسبت ک : ل منفی ہوگی، اس صورت میں ا لا$_1$ + ب ما$_1$ + ج اور ا لا$_2$ + ب ما$_2$ + ج کی وہی علامت ہوگی۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اُن تمام نقطوں کیلئے جو خط ا لا + ب ما + ج = ۰ کے ایک ہی جانب واقع ہوں جملہ ا لا + ب ما + ج کی علامت ایک ہی ہوگی اور اُن نقطوں کے لئے جو خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں جملہ کی علامتیں مختلف ہونگی اور خط پر کے تمام نقطوں کے لئے یہ جملہ صفر ہوگا

[دیکھو حصہ اول، دفعہ ۱۳]

مثال ۲ — جس نسبت سے دائرہ لا^2 + ما^2 = ۶۵ نقاط ($\frac{۱۵}{۲}$، $\frac{۵}{۲}$)

اور (۶، ۷) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔

اگر مطلوبہ نسبت ک : ل ہو تو نقطہ $\dfrac{6\text{ک} + \frac{15}{2}\text{ل}}{\text{ک} + \text{ل}} \text{ ، } \dfrac{7\text{ک} + \frac{5}{2}\text{ل}}{\text{ک} + \text{ل}}$

دائرہ پر واقع ہوگا اور اسلئے

$$\left(6\text{ک} + \tfrac{15}{2}\text{ل}\right)^2 + \left(7\text{ک} + \tfrac{5}{2}\text{ل}\right)^2 = 65\,(\text{ک} + \text{ل})^2$$

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے $8\text{ک}^2 - 2\text{ک}\,\text{ل} - \text{ل}^2 = 0$

یا حل کرنے پر $\dfrac{\text{ک}}{\text{ل}} = \dfrac{1}{2}$ یا $-\dfrac{1}{4}$

پس ایک نقطۂ تقاطع اندرونی ہے اور دوسرا بیرونی اور پہلے نقطہ کے قریب تر ہے۔

نقاط تقاطع کے محدد معلوم کرنے کے لئے ہمیں اوپر کی نسبتیں استعمال کرنی چاہئیں۔ اندرونی نقطہ تقاطع کے محدد ہیں

$$\frac{\frac{15}{2} \times 2 + 6 \times 1}{2+1} \text{ ، } \frac{\frac{5}{2} \times 2 + 7 \times 1}{2+1}$$ یعنی ۷، ۴

اور بیرونی نقطہ کے محدد ہیں

$$\frac{\frac{15}{2} \times 4 - 6 \times 1}{4-1} \text{ ، } \frac{\frac{5}{2} \times 4 - 7 \times 1}{4-1}$$ یعنی ۸، ۱

اور اس کی بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ دونوں نقطے فی الحقیقت منحنی پر واقع ہیں۔

مشقیں

۱۹- جس نسبت سے خط مستقیم ۳لا + ما = ۱ نقاط (−۱، ۱)، (۳، ۵) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔

۲۰- خط مستقیم ۲لا + ما = ۵ ایک متحرک نقطہ اور (۱، ۱) کے ملانے

والے خط کی حقیقی تنصیف کرتا ہے، متحرک نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۲۱ — جس نسبت سے مخروطی لا۲ – ا۲ ما = ۰ نقاط (۵/۲ ، ۷/۴)، (۸/۳ ، ۵/۴) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتی ہے اُسے معلوم کرو اور نقاط تقاطع کے محدد دریافت کرو۔

۲۲ — دفعہ ۱۳۶ کے طریق کتابت کے بموجب ثابت کرو کہ (لا۱ ، ما۱) اور (لا۲ ، ما۲) کے ملانے والا خط مخروطی سے حقیقی منطبق یا خیالی نقاط پر ملتا ہے اگر بالترتیب

س۱۲ = > < س۱ س۲

۲۳ — و ایک ثابت نقطہ ہے اور کوئی نقطہ ن ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے، ثابت کرو (و کو مبدأ ماننے کے بغیر) کہ اگر و ن کو نَ پر نسبت معلومہ سے تقسیم کیا جائے تو نَ کا طریق ایک ایسا خط ہے جو ن کے طریق کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ و (ا ، ب) ہے اور نَ (لا ، ما)، تب نَ ، و ن کو معلومہ نسبت سے تقسیم کرتا ہے، اسکے محدد ا ، ب ، لا ، ما کی رقوم میں معلوم کرو اور اس شرط سے فائدہ اُٹھاؤ کہ ن ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے۔

۱۳۷ — نسبتی مساوات درجہ دوم کو استعمال کرنے سے (لا۱ ، ما۱) پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

نسبتی مساوات ہے

ک۲ س۱ + ۲ ک ل م۱۲ + ل۲ س۲ = ۰

نسبت ک : ل کی ایک قیمت صفر ہوگی جب س۲ = ۰ یعنی جب نقطہ ا۲ (لا۲ ، ما۲) منحنی پر واقع ہو اور ایسے ہی ہونا چاہیئے، نسبت ک : ل کی دونوں قیمتیں صفر ہونگی اگر ا۲ منحنی پر واقع ہو اور نیز ا۱ ا۲ ، ...

مماس پر واقع ہو۔

اسکے لئے شرط یہ ہے $م_{۱،۲} = ۰$ یعنی

$ا\ لا_۱\ لا_۲ + ھ\ (لا_۱ ما_۲ + لا_۲ ما_۱) + ب\ ما_۱ ما_۲ + گ\ (لا_۱ + لا_۲) + ف\ (ما_۱ + ما_۲) + ج = ۰$

یا $لا_۲ (ا\ لا_۱ + ھ\ ما_۱ + گ) + ما_۲ (ھ\ لا_۱ + ب\ ما_۱ + ف) + گ\ لا_۱ + ف\ ما_۱ + ج = ۰$

اب چونکہ یہ اس امر کی شرط ہے کہ $(لا_۲، ما_۲)$ نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ کے مماس پر واقع ہو اسلئے مماس کی مساوات ہے

$لا\ (ا\ لا_۱ + ھ\ ما_۱ + گ) + ما\ (ھ\ لا_۱ + ب\ ما_۱ + ف) + گ\ لا_۱ + ف\ ما_۱ + ج = ۰$ ...(۴)

جیسا ہم پہلے طریقہ سے معلوم کر چکے ہیں۔

یہ طریقہ قابل ترجیح ہے کیونکہ اس کا اطلاق دونوں صورتوں پر ہو سکتا ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل، چنانچہ مسئلہ بالا کو ثابت کرنے میں کوئی ایسی خاصیت تسلیم نہیں کر لی گئی جو قائم محوروں سے بالخصوص متعلق ہو۔

مشقیں

۲۴۔ مکافی $لا^۲ = ۸\ ما$ کے اُن نقطوں پر کے مماسات کی مساواتیں معلوم کرو جہاں $لا = ۲، ۴، ۵$ بالترتیب۔

۲۵۔ زائد $\frac{لا^۲}{۹} - \frac{ما^۲}{۴} = ۱$ کے اُن نقاط پر کے مماسات کی مساواتیں معلوم کرو جہاں $ما = ۲، ۴، \frac{۴}{۳}$ بالترتیب۔

۲۶۔ منحنیات ذیل کے اوتار خاص کے سروں پر جو مماس کھنچ سکتے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

(ا) $\frac{لا^۲}{۴} + ما^۲ = ۱$ (ب) $ما^۲ = ۸\ ف\ لا$ (ج) $ما^۲ - ۹\ لا^۲ = ۹$

۲۷۔ منحنیات (ا) $ما^۲ = ۸\ لا$، (ب) $۴\ لا^۲ + ۹\ ما^۲ = ۱۸$ میں سے

ہر ایک کے اُس مماس کی مساوات معلوم کرو جو محوروں پر مساوی طول کاٹے

۲۸ — ثابت کرو کہ زائد لا ما = ج^2 کے نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) پر جو مماس کھینچ سکتا ہے اس کی مساوات شکل لا/لا$_1$ + ما/ما$_1$ = ۲ میں لائی جا سکتی ہے۔

اس سے مستنبط کرو کہ اگر زائد کے کسی نقطہ پر کا مماس متقاربوں ج ل، ج م سے ن اور ق پر ملے تو ج ن × ج ق مستقل ہے، نیز ن ق کی نقطۂ تماس پر تنصیف ہوتی ہے۔

۲۹ — دائرہ لا^2 + ۲ لا ما جم ہ + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو۔

۱۳۸ — کسی نقطہ سے مخروطی کے جو دو مماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مشترک مساوات معلوم کرو۔

[ثبوت کی تکمیل کے لئے ضروری ہے کہ نسبتی مساوات درجہ دوم دفعہ ۱۳۶ کو تسلیم کر لینے کی بجائے دوبارہ الگ سے حاصل کر لیا جائے]

اگر نسبتی مساوات درجہ دوم کی اصلیں مساوی ہوں تو ا$_1$ (لا$_1$، ما$_1$) اور ا$_2$ (لا$_2$، ما$_2$) کو ملانے والا خط مخروطی کو مس کریگا۔ یہ تب ہی ہو سکتا ہے جبکہ ا$_2$ نقطہ ا$_1$ میں سے گزرنے والے مماس پر واقع ہو۔
مساوی اصلوں کے لئے شرط یہ ہے

م$_{12}^2$ = س$_{11}$ س$_{22}$ [ٹوٹوریل الجبرا، دوم، دفعہ ۱۵۹]

اس لئے یہ اس امر کی شرط ہے کہ (لا$_2$، ما$_2$) مخروطی کے نقطہ ا$_1$ پر کے مماس پر واقع ہو، چونکہ یہ لا$_2$، ما$_2$ میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے معلوم ہوتا ہے کہ اس میں لا$_2$، ما$_2$ کی بجائے لا، ما رکھنے سے جو مساوات حاصل ہوگی اُس سے دو مماس ملیں گے، مساوات مذکورہ یہ ہے

{ا لا لا$_1$ + ھ (لا ما$_1$ + لا$_1$ ما) + ب ما ما$_1$ + گ (لا + لا$_1$) + ف (ما + ما$_1$) + ج}^{2}

= {ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج}

× {ا لا$_1^2$ + ۲ ھ لا$_1$ ما$_1$ + ب ما$_1^2$ + ۲ گ لا$_1$ + ۲ ف ما$_1$ + ج} ...... (۱۴)

سادہ صورتوں میں یہ مساوات ذیل کی شکلیں اختیار کرتی ہے۔

مکافی $\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ ، $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ سے مماس ہیں

$$\{\text{ما}\,\text{ما}_1 - 2\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)\}^2 = (\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا})(\text{ما}_1^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1)$$

ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ، نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ سے مماس ہیں

$$\left(\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1\right)\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1\right)$$

زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ، نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ سے مماس ہیں

$$\left(\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1\right)\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1\right)$$

طالب علم کو ابتدائی اصولوں سے حسب بالا یہ سب مساواتیں حاصل کرنی چاہئیں - رہنمائی کی غرض سے ہم ناقص کی صورت میں تفصیلی عمل ذیل میں درج کرتے ہیں -

مثال — نقطہ ن $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ سے ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے جو دو مماس کھینچ سکتے ہیں اُن کی مساوات معلوم کرو۔

اگر کسی مماس پر ق $(\text{لا}_2 ، \text{ما}_2)$ ایک نقطہ ہو تو ن اور ق کے ملانے والا خط ناقص سے دو منطبقہ نقاط پر ملیگا ، اب ہم اُس نسبت کی قیمتیں معلوم کرینگے جس نسبت سے یہ ناقص اس خط کو تقسیم کرتا ہے اور اس امر کے لئے شرط دریافت کرینگے کہ یہ قیمتیں باہم مساوی ہیں - جو نقطہ ن ق کو نسبت ک : ل سے تقسیم کرتا ہے اس کے محدد ہیں

$$\frac{\text{ک}\,\text{لا}_2 + \text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}} ، \quad \frac{\text{ک}\,\text{ما}_2 + \text{ل}\,\text{ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$$

اگر یہ نقطہ ناقص پر ہو تو

$$\frac{(ک\,لا_۲ + ل\,لا_۱)^۲}{(ک+ل)^۲} \times \frac{۱}{ا^۲} + \frac{(ک\,ما_۲ + ل\,ما_۱)^۲}{(ک+ل)^۲} \times \frac{۱}{ب^۲} = ۱$$

$(ک + ل)^۲$ کے ساتھ ضرب دینے اور رقوم کو ترتیب وار اکٹھا کرنے سے

$$ک^۲\left\{\frac{لا_۲^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۲^۲}{ب^۲} - ۱\right\} + ۲ک\,ل\left\{\frac{لا_۱\,لا_۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱\,ما_۲}{ب^۲} - ۱\right\} + ل^۲\left\{\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲} - ۱\right\} = ۰$$

اگر $\frac{ک}{ل}$ میں اس مساوات کی اصلیں مساوی ہوں تو

$$\left(\frac{لا_۱\,لا_۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱\,ما_۲}{ب^۲} - ۱\right)^۲ = \left(\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲} - ۱\right)\left(\frac{لا_۲^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۲^۲}{ب^۲} - ۱\right)$$

پس معلوم ہوا کہ $(لا_۲ ، ما_۲)$ کے کسی ایک مماس پر واقع ہونے کے لئے یہی شرط ہے
پس مماسوں کی مساوات مطلوبہ ہے

$$\left(\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - ۱\right)\left(\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲} - ۱\right) = \left(\frac{لا\,لا_۱}{ا^۲} + \frac{ما\,ما_۱}{ب^۲} - ۱\right)^۲$$

مشقیں

۳۰۔ نقطہ (۱۱، −۵) سے $۳\,لا^۲ + ۷\,ما^۲ = ۳۲$ کے مماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۳۱۔ نقطہ (۰، ف) سے مکافی $ما^۲ = ۴\,ف\,لا$ کے مماسوں کی مساوات دریافت کرو۔

۳۲۔ مبدأ سے منحنی $\frac{(لا - ۳ا)^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے مماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۳۳۔ نقاط (ا) (۴، ۳) (ب) (۱، ۱) سے ناقص $\frac{لا^۲}{۹} + \frac{ما^۲}{۴} = ۱$ کے مماسوں کی مساوات معلوم کرو، دوسری صورت میں نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۱۳۴ - نقطہ (۱، ۲) سے مخروطی ۲ لا^2 - ۳ لا ما - ۲ ما^2 + لا - ما - ۲ = ۰ کے مماسوں کی مساوات معلوم کرو اور اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو -

[اگر ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ خطوط مستقیم کے جوڑے کو تعبیر کرے تو یہ خطوط ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے متوازی ہیں -]

۱۳۵ - ثابت کرو کہ نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) سے ناقص ا لا^2 + ب ما^2 = ۱ کے جو مماس کھینچ سکتے ہیں وہ خطوط

(ا لا^2 + ب ما^2) (ا لا$_1^2$ + ب ما$_1^2$ - ۱) = (ا لا لا$_1$ + ب ما ما$_1$)^2

کے متوازی ہیں -

[درجہ دوم کی رقمیں الگ کرلو]

۱۳۶ - مخروطی کے کسی دو نقاط کو ملانے والے وتر کی مساوات اور ایک نقطۂ معلومہ پر کے مماس کی مساوات -

اب ہم درجہ دوم کے منحنی کی صورت میں کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کا ایک تیسرا طریقہ بیان کرینگے، اس کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس سے منحنی کے وتر کی مساوات بھی نہایت کارآمد شکل میں حاصل ہوتی ہے -

فرض کرو کہ مخروطی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کے دو نقاط (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$) ہیں -

مساوات ذیل پر غور کرو

ا (لا - لا$_1$) (لا - لا$_2$) + ھ {(لا - لا$_1$) (ما - ما$_2$) + (لا - لا$_2$) (ما - ما$_1$)} + ب (ما - ما$_1$) (ما - ما$_2$)

= ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج ..... (۱۳)

اگرچہ دیکھنے میں یہ مساوات درجہ دوم معلوم ہوتی ہے مگر فی الحقیقت لا، ما میں یہ مساوات درجہ اول ہے (کیونکہ درجہ دوم کی رقمیں طرفین سے کٹ جاتی ہیں)، پس مساوات (۱۳) کسی خط مستقیم کی مساوات ہے -

نیز اگر اس میں رکھا جائے لا = لا$_1$ اور ما = ما$_1$ تو دائیں طرف کا رکن صفر ہوتا

ہے اور بائیں جانب کا رکن بھی صفر کے مساوی ہے کیونکہ (لا$_1$، ما$_1$) مخروطی پہ واقع ہے اس لئے (لا$_1$، ما$_1$) خط مستقیم پر واقع ہے اسیطرح (لا$_2$، ما$_2$) بھی خط پر ہے۔

اس لئے مساوات (۱۳) نقاط (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) کو ملانے والے خط کی مساوات ہے۔

اگر ہم اس میں رکھیں لا$_2$ = لا$_1$ اور ما$_2$ = ما$_1$ تو (لا$_1$، ما$_1$) پر کے مماس کی مساوات حاصل ہوگی یعنی

ا (لا − لا$_1$)^2 + ۲ھ (لا − لا$_1$) (ما − ما$_1$) + ب (ما − ما$_1$)^2 = ا لا$_1^2$ + ۲ھ لا$_1$ما + ب ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج

مربع لینے اور رقوم کو اکھٹا کرنے سے

۲ لا (ا لا$_1$ + ھ ما$_1$ + گ) + ۲ ما (ھ لا$_1$ + ب ما$_1$ + ف) = ا لا$_1^2$ + ۲ھ لا$_1$ ما$_1$ + ب ما$_1^2$ − ج

= − (۲گ لا$_1$ + ۲ف ما$_1$ + ج) − ج

چونکہ (لا$_1$، ما$_1$) منحنی پر واقع ہے تو اسلئے ۲ پر تقسیم کرنے سے مماس کی مساوات حسب سابق حاصل ہوتی ہے

لا (ا لا$_1$ + ھ ما$_1$ + گ) + ما (ھ لا$_1$ + ب ما$_1$ + ف) + گ لا$_1$ + ف ما$_1$ + ج = ۰ (۱۴)

طالب علم وتر کی مساوات میں طرفین کے جملات کو مرتب کرنے کی ترکیب پر اچھی طرح غور کرے۔

(ا) بائیں جانب ہم وہ جملہ رکھتے ہیں جسے اگر صفر کے مساوی رکھا جائے تو وہ مخروطی کی مساوات ہو جاتی ہے۔

(ب) دائیں طرف ایسے جملات رکھے جاتے ہیں جو صرف درجہ دوم کی رقموں پر موقوف ہیں۔ دائیں طرف کے جملہ کو مرتب کرنیکا قاعدہ یہ ہے:۔

درجہ دوم کی رقوم میں سے لا^2 کی بجائے (لا − لا$_1$) (لا − لا$_2$) رکھو، ما^2 کی بجائے (ما − ما$_1$) (ما − ما$_2$) اور ۲ لا ما میں سے ایک لا ما کے لئے (لا − لا$_1$) (ما − ما$_2$) اور دوسرے لا ما کے لئے (لا − لا$_2$) (ما − ما$_1$)

اس میں ہم دراصل ایک ایسا جملہ مرتب کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو $\text{لا} = \text{لا}_1$ اور $\text{ما} = \text{ما}_1$ اور نیز $\text{لا} = \text{لا}_2$ اور $\text{ما} = \text{ما}_2$ کے لئے منطابقاً صفر ہو۔ اسکے لئے ضروری ہے کہ ہر رقم میں $\text{لا} - \text{لا}_1$ یا $\text{ما} - \text{ما}_1$ اور $\text{لا} - \text{لا}_2$ یا $\text{ما} - \text{ما}_2$ بطور جزوِ ضربی کے شریک ہو۔

علاوہ ازیں یہ ضروری ہے کہ دونوں طرف درجہ دوم کی رقمیں وہی ہوں۔

مثالیں۔ (۱) مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ میں وتر کی مساوات ہے

$$(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_2) = \text{ما}^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$$

(۲) ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ میں وتر کی مساوات ہے

$$\frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا} - \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_2)}{\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - ۱$$

مشقیں

منحنیات ذیل پر نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ فرض کرکے ان کو ملانے والے وتروں کی مساواتیں دریافت کرو اور ان سے ہر صورت میں $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو، مماس کی عام مساوات کے ساتھ مقابلہ کرنے سے اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

۳۶ ـ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ ۳۷ ـ $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$

۳۸ ـ $\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}^2$ ۳۹ ـ $\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = ۱$

۴۰ ـ $\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} = ۰$

۴۱ ـ مماس کی مساوات معلوم کرنے کے تین طریقے جو اوپر دئے گئے ہیں اُن کا مقابلہ۔

ہم بتا چکے ہیں کہ پہلا طریقہ صرف قائم محوروں کی صورت میں استعمال

ہو سکتا ہے لیکن دوسرے اور تیسرے طریقہ کے لئے یہ قید نہیں ہے یہ ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں بآسانی استعمال ہو سکتے ہیں مگر یاد رہے کہ پہلے طریقہ میں خاص خوبی یہ ہے کہ اس کی مدد سے چند ضروری مسائل جو وتروں کی سطوح سے متعلق ہیں بآسانی حاصل ہوتے ہیں لیکن دوسرے طریقوں سے ان کا حاصل کرنا مقابلۃً دشوار ہے۔

دوسرا طریقہ نسبتی مساوات درجہ دوم پر موقوف ہے، اس کی مدد سے کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو مماسوں کی مساوات بآسانی حاصل ہوتی ہے

تیسرا طریقہ گو اہمیت کے لحاظ سے باقی دو سے کم درجہ پر ہے تاہم اس کے ذریعہ ہم وتر کی مساوات کو سادہ اور کارآمد صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

یہ کہنا بیجا نہ ہوگا کہ یہ تینوں طریقے یاد رکھنے چاہئیں اور اگر ایک دفعہ طالب علم ان پر حاوی ہو جائے تو مخروطیوں کا باقی علم ہندسہ اس کے لئے آسان ہو جائے گا۔

۱۴۱ — اس امر کی شرط کہ خط $ل لا + م ما + ۱ = ۰$ ایک مخروطی کو مس کرے۔

یہ شرط معلوم کرنے کے کئی طریقے ہیں جیسا دفعہ ۶۸ میں اوپر بیان ہو چکا ہے ما کو ساقط کرنے کے بعد ہم اس امر کی شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ لا میں مساوات درجہ دوم کی اصلیں مساوی ہیں، سادہ صورتوں کے لئے یہی طریقہ مناسب ہے کیونکہ یہ ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے لیکن بعض اوقات ذیل کا طریقہ بھی سودمند ثابت ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ ہے اور $ل لا + م ما + ۱ = ۰$ اس کو نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ پر مس کرتا ہے۔

چونکہ $(لا_۱، ما_۱)$ پر کا مماس $\frac{لا لا_۱}{ا^۲} + \frac{ما ما_۱}{ب^۲} = ۱$ ہے اس لئے یہ خط اور مفروضہ خط $ل لا + م ما + ۱ = ۰$ ایک ہی ہیں۔

لہذا $\frac{\text{لا}_1/\text{ا}^2}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}_1/\text{ب}^2}{\text{م}} = \frac{1}{-1}$

جس سے $\text{لا}_1 = -\text{ا}^2\,\text{ل}$ ، $\text{ما}_1 = -\text{ب}^2\,\text{م}$

لیکن $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$

$\therefore$ $\text{ا}^2\,\text{ل}^2 + \text{ب}^2\,\text{م}^2 = 1$ مطلوبہ شرط ہے

اسی طرح سے مخروطی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کی صورت میں شرط مطلوبہ ہوگی $\text{ا}^2\,\text{ل}^2 - \text{ب}^2\,\text{م}^2 = 1$

۱۴۲ — مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کی صورت میں $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کا مماس ہے

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 = 2\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$$

اور اگر یہ مساوات اور $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + 1 = 0$ ایک ہی خط کو تعبیر کریں تو

$$\frac{\text{ما}_1}{\text{م}} = -\frac{2\,\text{ا}}{\text{ل}} = 2\,\text{ا}\,\text{لا}_1$$

اس لئے $\text{لا}_1 = -\frac{1}{\text{ل}}$ ، $\text{ما}_1 = -2\,\text{ا}\,\frac{\text{م}}{\text{ل}}$

لیکن $\text{ما}_1^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1 = 0$

$\therefore$ $4\,\text{ا}^2\,\frac{\text{م}^2}{\text{ل}^2} + 4\,\text{ا} \times \frac{1}{\text{ل}} = 0$

یا $\text{ا}\,\text{م}^2 + \text{ل} = 0$

۱۴۳ — اس امر کی شرط کہ خط مستقیم مخروطی کو مس کرتا ہے۔ متبادل طریقہ۔

ایک خاص صورت میں یہی شرط معلوم کرنے کا ایک اور طریقہ ہم اس جگہ مندرج کرینگے یعنی ہم یہ معلوم کرینگے کہ کس شرط کے ماتحت خط $\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} = \text{ع}$ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو مس کرتا ہے

نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط کی مساوات یہ ہے

$$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - \left(\frac{لا\ جم\ عہ + ما\ جب\ عہ}{ع}\right)^۲ = ۰$$

یا $لا^۲\left(\frac{۱}{ا^۲} - \frac{جم^۲ عہ}{ع^۲}\right) - ۲\,لا\,ما\,\frac{جب\ عہ\ جم\ عہ}{ع^۲} + ما^۲\left(\frac{۱}{ب^۲} - \frac{جب^۲ عہ}{ع^۲}\right) = ۰$

اگر خط مستقیم ناقص کو مس کرے تو یہ دونوں خط ایک دوسرے پر منطبق ہونگے

یعنی $\frac{جب^۲ عہ\ جم^۲ عہ}{ع^۴} = \left(\frac{۱}{ا^۲} - \frac{جم^۲ عہ}{ع^۲}\right)\left(\frac{۱}{ب^۲} - \frac{جب^۲ عہ}{ع^۲}\right)$

جس سے اختصار کے بعد

$ع^۲ = ا^۲\ جم^۲\ عہ + ب^۲\ جب^۲\ عہ$ .... (۱۵)

پس جس خط کی مساوات

$$لا\ جم\ عہ + ما\ جب\ عہ = \pm\sqrt{ا^۲\ جم^۲\ عہ + ب^۲\ جب^۲\ عہ}$$

ہے وہ ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۴۱ ـ اگر $لا + ما = ج$ ناقص $۲\,لا^۲ + ۳\,ما^۲ = ۴$ کو مس کرے تو
(۱) طریقہ دفعہ ۱۴۱ نیز (۲) طریقہ دفعہ ۱۴۲ سے ج کی قیمت معلوم کرو۔

۴۲ ـ دفعہ ۱۴۳ کی طرح ثابت کرو کہ

$$لا\ جم\ عہ + ما\ جب\ عہ = \pm\sqrt{ا^۲\ جم^۲\ عہ - ب^۲\ جب^۲\ عہ}$$

زائد $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کا مماس ہے۔

۴۳ ـ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط $\frac{لا}{م} + \frac{ما}{ن} = ۱$

ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کو مس کرے۔

۴۴ – ناقص $\frac{\text{لا}^2}{2}+\frac{\text{ما}^2}{4}=1$ کے اُن مماسات کی مساواتیں دریافت کرو جو محور ما کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بنائیں۔

۴۵ – مبدأ سے منحنی $\text{ب}^2\,\text{لا}^2+\text{ا}^2\,\text{ما}^2=\text{ا}^2\,\text{ب}^2$ کے اُس مماس کا فاصلہ معلوم کرو جو محور ما کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بنائے۔

۴۶ – ثابت کرو کہ اگر $\text{ل}\,\text{لا}+\text{م}\,\text{ما}+1=0$ مخروطی

$$\text{ا}\,\text{لا}^2+2\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما}+\text{ب}\,\text{ما}^2+2\text{گ}\,\text{لا}+2\text{ف}\,\text{ما}+\text{ج}=0$$

کو مس کرے تو اس کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہیے

$$\text{ل}^2(\text{ب}\text{ج}-\text{ف}^2)+\text{م}^2(\text{ج}\text{ا}-\text{گ}^2)+\text{ن}^2(\text{ا}\text{ب}-\text{ھ}^2)+2\text{م}\text{ن}(\text{گ}\text{ھ}-\text{ا}\text{ف})$$

$$+2\text{ن}\text{ل}(\text{ھ}\text{ف}-\text{ب}\text{گ})+2\text{ل}\text{م}(\text{ف}\text{گ}-\text{ج}\text{ھ})=0$$

۱۴۴ – مخروطی کے دو علی القوائم مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق دائرہ ہوگا **اگر یہ مخروطی مرکز دار تراشش ہو** اور خطِ مستقیم ہوگا اگر یہ مکافی ہو۔

اس مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہم (لا٫ ما٫) سے مخروطی کے دو مماسوں کی مساوات حاصل کرتے ہیں اور پھر اس امر کی شرط معلوم کرتے ہیں کہ یہ خطوں کا جوڑا علی القوائم ہے، اس طرح سے ہمیں لا٫ ما٫ میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ طریق کو تعبیر کرتی ہے۔

مثلاً ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کی صورت میں (لا٫ ما٫) سے منحنی کے مماسات ذیل کی مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں

$$\left(\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2}-1\right)^2=\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1\right)\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}-1\right)$$

اور اگر یہ خط علی القوائم ہوں تو لا^2 اور ما^2 کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا

(حصہ اول دفعہ ۲۹) یعنی

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} - \frac{1}{\text{ا}^2}\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1\right) + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4} - \frac{1}{\text{ب}^2}\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1\right) = 0$$

یا مختصر کرنے پر

$$\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2\,\text{ب}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ا}^2\,\text{ب}^2}$$

$$\therefore \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

اس لئے مطلوبہ طریق دائرہ ہے۔

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہے اور جس کے نصف قطر کا مربع نصف محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اس دائرہ کو ناقص کا مرتب دائرہ کہتے ہیں

اسی طرح زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کیلئے یہ طریق دائرہ ہے جس کی مساوات ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

مکافی کی صورت میں اگر مساوات $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ لی جائے تو $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ سے منحنی کے مماسوں کی مساوات ہوگی

$$\left\{\text{ما}\,\text{ما}_1 - 2\,\text{ا}(\text{لا} + \text{لا}_1)\right\}^2 = (\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا})(\text{ما}_1^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1)$$

اس میں لا^2 اور ما^2 کے سر ہیں بالترتیب $+4\,\text{ا}^2$ اور $\text{ما}_1^2 - \text{ما}_1^2 + 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1$

اس لئے مطلوبہ طریق ہے $4\,\text{ا}^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ما}_1^2 + 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1 = 0$

یعنی

$$\text{لا} + \text{ا} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

ظاہر ہے کہ یہ منحنی کے مرتب کی مساوات ہے (دفعہ ۱۴۲) بالکل یہی عمل تمام مساواتوں کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۴۵۔ دفعہ آخر کے مسئلہ کو حل کرنے کے کئی اور کارآمد طریقے ہیں۔

مثلاً ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا ہے (دفعہ ۶۸) کہ خط $ما = م لا \pm \sqrt{ب^2 + ا^2 م^2}$ ، م کی تمام قیمتوں کے لئے ناقص کو مس کرتا ہے۔

اگر مماس $(لا_1، ما_1)$ میں سے گزرے تو

$$ما_1 - م لا_1 = \pm \sqrt{ب^2 + ا^2 م^2}$$

یا $$(ما_1 - م لا_1)^2 = ب^2 + ا^2 م^2$$

یا $$م^2 (ا^2 - لا_1^2) + 2 م لا_1 ما_1 + ب^2 - ما_1^2 = 0$$

م میں یہ مساوات درجہ دوم ہے، اس لئے اس سے $لا_1، ما_1$ میں سے گزرنے والے دو مماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں۔ اگر یہ مماس علی القوائم ہوں تو اصلوں $م_1$ ، $م_2$ کا حاصل ضرب $= -1$

$$\therefore \quad \frac{ب^2 - ما_1^2}{ا^2 - لا_1^2} = -1$$

جس سے حسب سابق $لا_1^2 + ما_1^2 = ا^2 + ب^2$

طالب علم اسیطرح کے نتائج مساوات $ما = م لا + \frac{ا}{م}$ سے مکافی کے لئے اور مساوات $ما = م لا \pm \sqrt{ا^2 م^2 - ب^2}$ سے زائد کے لئے حاصل کرے۔

۱۴۱۔ متبادل طریقہ ناقص اور زائد کی صورت میں۔

$$لا \, جم \, عہ + ما \, جب \, عہ = \sqrt{ا^2 جم^2 عہ + ب^2 جب^2 عہ}$$

عہ کی تمام قیمتوں کے لئے $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کو مس کرتا ہے۔

جو مماس اس پر عمود ہے اس کی مساوات ہوگی

$$لا \, جم (90° + عہ) + ما \, جب (90° + عہ) = \sqrt{ا^2 جم^2 (90° + عہ) + ب^2 جب^2 (90° + عہ)}$$

کیونکہ اگر مبدأ سے اس پر عمود نکالا جائے تو وہ محوروں سے زاویہ $(90^\circ + \text{عہ})$ بنائے گا۔

پس مذکورہ بالا مساوات ہے۔ $\text{لا جب عہ} + \text{ما جم عہ} = \pm\sqrt{\text{ا}^2 \text{ جب}^2 \text{ عہ} + \text{ب}^2 \text{ جم}^2 \text{ عہ}}$

نقطۂ تقاطع کا طریق عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا، ہر مساوات کا مربع اُٹھانے اور جمع کرنے سے حسب سابق $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$

۱۴۷۔ ظاہر ہے کہ جن سوالات میں مماسوں کی سمتوں سے بحث ہو اُن میں اس طرح کی مماسی مساواتوں کو استعمال کرنا زیادہ سود مند ہوگا مثلاً

$$\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{ا}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}$$

$$\text{ما} = \text{م لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$$

طالب علم دیکھے کہ کس سہولت سے ہم نے اوپر اس قسم کی مساواتوں کو علی القوائم مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرنے میں استعمال کیا ہے۔ تمام صورتوں میں ہم (لا، ما) کو ایک ایسا نقطہ خیال کر سکتے ہیں جس سے منحنی کے مماس کھینچے گئے ہیں اور مساوات ایک ایسی مساوات درجہ دوم متصور ہو سکتی ہے جس سے مماسوں کے "م" حاصل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ سے جو ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے مماس کھینچے جا سکتے ہیں اُن کا درمیانی زاویہ مطلوب ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $\text{مس طہ} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\text{م}_2}$

جہاں $\text{م}_1، \text{م}_2$ مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$(\text{ما}_1 - \text{م لا}_1)^2 = \text{ا}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2$$

$$\text{یا} \quad \text{م}^2 (\text{ا}^2 - \text{لا}_1^2) + 2 \text{ م لا}_1 \text{ما}_1 + \text{ب}^2 - \text{ما}_1^2 = 0$$

$$\therefore \text{م}_1 + \text{م}_2 = - \frac{2 \text{ لا}_1 \text{ما}_1}{\text{ا}^2 - \text{لا}_1^2} \quad ، \quad \text{م}_1 \text{م}_2 = \frac{\text{ب}^2 - \text{ما}_1^2}{\text{ا}^2 - \text{لا}_1^2}$$

اس لیے $(م_1 - م_2)^2 = (م_1 + م_2)^2 - 4 م_1 م_2$

$$= 4\,\frac{لا_1^2\, ما_1^2 - (ا^2 - لا_1^2)(ب^2 - ما_1^2)}{(ا^2 - لا_1^2)^2}$$

$$= 4\,\frac{ب^2 لا_1^2 + ا^2 ما_1^2 - ا^2 ب^2}{(ا^2 - لا_1^2)^2}$$

$$\therefore \text{مس ط} = \frac{2\sqrt{ب^2 لا_1^2 + ا^2 ما_1^2 - ا^2 ب^2}}{(ا^2 - لا_1^2)} \times \frac{(ا^2 - لا_1^2)}{ب^2 - ما_1^2 + ا^2 - لا_1^2}$$

$$= \frac{2\, ا\, ب\sqrt{\frac{لا_1^2}{ا^2} + \frac{ما_1^2}{ب^2} - 1}}{ا^2 + ب^2 - (لا_1^2 + ما_1^2)}$$

پس ط اُسی صورت میں صفر ہوگا جبکہ $(لا_1، ما_1)$ منحنی پر واقع ہو یعنی جبکہ مماس ایک دوسرے پر منطبق ہوں اور ط اُس وقت $\frac{\pi}{2}$ کے مساوی ہوگا جبکہ $(لا_1، ما_1)$ مرتب دائرہ پر واقع ہو جیسا اوپر معلوم کیا گیا ہے۔

۱۴۸۔ اگر ناقص کے ماسکہ سے کسی مماس پر عمود نکالا جائے تو اس کے پایہ کا طریق ایک ایسا دائرہ ہوگا جو محور اعظم کے قطر پر بنایا جائے۔

اس غرض کے لیے مماس کی مساوات $ما = م لا + \sqrt{ب^2 + ا^2 م^2}$ فرض کرو جہاں ناقص مذکور $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ ہے۔ ماسکہ کے محدد $(ا ز، ۰)$ ہیں۔

کسی ایسے خط کی مساوات جو مماس پر عمود ہو $م ما + لا = ک$ ہے اور اگر یہ ماسکہ مذکور میں سے گزرے تو $م \times ۰ + ا ز = ک$

یعنی $ک = ا ز$

اسلئے عمود کا پایہ خطوط $ما - م لا = \sqrt{ب^2 + ا^2 م^2}$

اور $م ما + لا = ا ز$

کا نقطۂ تقاطع ہے، اگر ہم ان سے م کو ساقط کر دیں تو ہمیں ایک مساوات

حاصل ہوگی جس کو تمام عمودوں کے پائے پورا کرینگے اور یہی طریق مطلوب ہے
دونوں مساواتوں کا مربع اٹھانے اور ان کو جمع کرنے سے

(لا^2 + ما^2) (۱ + م^2) = ب^2 + ا^2 م^2 + ا^2 ز^2

= ا^2 (۱ + م^2) چونکہ ب^2 = ا^2 (۱ - ز^2)

∴ لا^2 + ما^2 = ا^2 .... (۲۰)

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

تعریف۔ جو دائرہ محور اعظم کے قطر پر بنایا جائے اُسے **امدادی دائرہ** کہتے ہیں

اسی طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ دوسرے ماسکہ (- ا ز، ۰) سے اگر مماسوں پر عمود کھینچے جائیں تو انکے پائے بھی اسی دائرہ پر واقع ہونگے اور یہ ظاہر ہے کیونکہ عمل بالا میں صرف عمود کی مساوات ہمیں بدلنی پڑیگی م ما + لا = - ا ز اور مربع اٹھانے پر یہ اختلاف بھی جاتا رہیگا۔

مشق

۴۸۔ اسی طریقہ سے زائد کی صورت میں ثابت کرو کہ یہ طریق لا^2 + ما^2 = ا^2 ہے یعنی ایک ایسا دائرہ ہے جو قاطع محور کے قطر پر بنایا جائے۔

۱۴۹۔ مکافی کی صورت میں ثابت کرو کہ اگر ماسکہ سے کسی مماس پر عمود نکالا جائے تو اس کے پائیں کا طریق راس پر کا مماس ہے۔

فرض کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا ہے اور ماسکہ (ا، ۰)
مکافی کے کسی مماس کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{م لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$$

نقطہ (ا، ۰) سے اس پر کے عمود کی مساوات ہے

(لا - ا) + م ما = ۰

مطلوبہ طریق حاصل کرنے کے لئے ان دو مساواتوں سے م کو ساقط کرنا چاہیئے

پہلی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے　م ما − ا = م۲ لا
اور　دوسری اس طرح　م ما − ا = − لا
اسلئے　م۲ لا = − لا　اسلئے طریق مطلوب لا = ۰ ہے

۱۵۰ ۔ اگر ناقص کے ماسکوں سے کسی مماس پر عمود نکالے جائیں تو ان کا حاصل ضرب نصف محور اصغر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہے اور ماسکے (ا ز ، ۰) اور (− ا ز ، ۰) ہیں ۔

اب ناقص کا کوئی مماس　لا جم عہ + ما جب عہ = ع　سے تعبیر ہوتا ہے جہاں

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ا}^2 \text{ جم}^2 \text{عہ} + \text{ب}^2 \text{ جب}^2 \text{عہ}}$$

ماسکوں (− ا ز ، ۰) اور (ا ز ، ۰) سے اس مماس پر عمود ہیں بالترتیب

− ا ز جم عہ − ع　　اور　　ا ز جم عہ − ع

ان کا حاصل ضرب = ع۲ − ا۲ ز۲ جم۲ عہ

= ا۲ جم۲ عہ + ب۲ جب۲ عہ − ا۲ ز۲ جم۲ عہ

= ا۲ جم۲ عہ (۱ − ز۲) + ب۲ جب۲ عہ

لیکن　ب۲ = ا۲ (۱ − ز۲)

اس لئے حاصل ضرب = ب۲ (جم۲ عہ + جب۲ عہ)

= ب۲

مشقیں

۴۸ ۔ اسی طریقہ سے مسئلہ دفعہ ۱۵۰ کو زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کی صورت میں حاصل کرو ۔

ناقص کے لئے مسئلہ دفعہ ۱۵۰ کو اس صورت میں ثابت کرو جبکہ مماس کی مساوات　ما = م لا + $\sqrt{\text{ا}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}$　لی جائے ۔

باب دوازدہم پر متفرق مشقیں

۴۹ ـ اس کی شرط معلوم کرو کہ خط $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} = \text{ع}$ مخروطی $\text{ما}^2 = 2\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{لا}^2$ کو مس کرے ۔

۵۰ ـ نقطہ (۱، ۱) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا کے ساتھ زاویہ $\text{مس}^{-1}\frac{3}{4}$ بناتا ہے، نقطہ (۱، ۱) سے اُن نقاط کے فاصلے معلوم کرو جہاں یہ

(۱) ناقص $\frac{1}{2}\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 1$

(۲) قائم قطع زائد $\text{لا}\,\text{ما} = 2$

(۳) مکافی $\text{ما}^2 = \text{لا} + 2\,\text{ما} + 1$

سے ملتا ہے ۔

۵۱ ـ نقطہ و $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا سے زاویہ ط بناتا ہے، اگر یہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ سے ن اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ون} \times \text{وق} = \frac{\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1}{\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{ب}^2}}\ ،\quad \text{ون} + \text{وق} = -\frac{2\left(\frac{\text{لا}_1\,\text{جم ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{جب ط}}{\text{ب}^2}\right)}{\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{ب}^2}}$$

$$\frac{1}{\text{ون}} + \frac{1}{\text{وق}} = -\frac{2\left(\frac{\text{لا}_1\,\text{جم ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{جب ط}}{\text{ب}^2}\right)}{\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1}$$

۵۲ ـ ثابت کرو کہ اُن دو خطوط مستقیم کے جوڑے کی مساوات جو مبدأ کو خط مستقیم $\text{لا} - \text{ج} + \text{لہ}\,\text{ما} = 0$ اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}} = 0$ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں

$$\text{لا}^2\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{2}{\text{ا}\,\text{ج}}\right) - \frac{2\,\text{لہ}}{\text{ا}\,\text{ج}}\,\text{لا}\,\text{ما} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 0$$ ہے

۵۳ — دائرہ لا^2 + ما^2 − ۲ ا لا = ۰ کے نقطہ {ا (۱ + جم طہ)، ا جب طہ} پر جو مماس کھینچ سکتا ہے اُس کی مساوات دریافت کرو۔

۵۴ — اگر مکافی ما^2 = ف لا کے نقاط (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$) سے مماس کھینچے جائیں تو اُنکے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۵۵ — نقطہ و (لا$_1$، ما$_1$) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو و لا سے زاویہ طہ بناتا ہے، اگر یہ عام مخروطی سے ن اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ا جم}^2\text{ طہ} + 2\text{ ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2\text{ طہ}}{\text{ا لا}_1^2 + 2\text{ ھ لا}_1\text{ ما}_1 + \text{ب ما}_1^2 + 2\text{ گ لا}_1 + 2\text{ ف ما}_1 + \text{ج}}$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر و میں سے دو علی القوائم خط ون ق اور ور س کھینچے جائیں تو

$$\frac{1}{\text{ون} \times \text{وق}} + \frac{1}{\text{ور} \times \text{وس}}$$

صرف نقطہ و کے مقام پر موقوف ہے اور عمودی وتروں کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۵۶ — معلوم کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ لا کا کونسا نقطہ خط ما = لا + ۲ کے قریب ترین ہے، یہ کم سے کم فاصلہ معلوم کرو۔

۵۷ — اگر مکافی کے دو مماس محور سے زاویے طہ اور طہَ بنائیں تو اُنکے تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ مم طہ − مم طہَ = ن

۵۸ — مخروطی ۲ لا^2 + ۴ لا ما + ۳ ما^2 + ۵ لا − ۶۴ ما + ۱۲۷ = ۰
کے اُس وتر کا طول اور میلان (محور کے ساتھ) معلوم کرو جس کی تنصیف نقطہ (۱، ۳) پر ہوتی ہے

۵۹ — ثابت کرو کہ نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) سے مخروطی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کے مماس خطوط ذیل کے جوڑے کے متوازی ہیں

(ا لا$_{1}^{2}$ + ۲ ھ لا$_{1}$ ما$_{1}$ + ب ما$_{1}^{2}$ + ۲ گ لا$_{1}$ + ۲ ف ما$_{1}$ + ج) (ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2})

= {ا لا لا$_{1}$ + ھ (لا ما$_{1}$ + لا$_{1}$ ما) + ب ما ما$_{1}$ + گ لا + ف ما}^{2}

اس کے لیئے شرط معلوم کرو کہ مماس علی القوائم ہیں اور اس سے مرتب دائرہ کی مساوات صورت ذیل میں حاصل کرو۔

(ا + ب) (ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) = (ا لا + ھ ما + گ)^{2} + (ھ لا + ب ما + ف)^{2}

۶۰ ـ ثابت کرو کہ لا^{2} + لا ما + ما^{2} + لا + ما = ۰ کا مرتب دائرہ

۳ (لا^{2} + ما^{2}) + ۲ (لا + ما − ۱) = ۰ ہے

۶۱ ـ زائد کا مرتب دائرہ کب خیالی ہوگا۔ اپنے نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۶۲ ـ مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کے اُن نقاط پر جن کے معین نسبت ف^{2} : ق^{2} میں ہوں مماس کھینچے گئے ہیں، انکے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۳ ـ ایک ہی محور اعظم پر کئی ناقص بنائے گئے ہیں اور انہیں ایک مشترک معین سے قطع کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ نقاط تقاطع پر کے مماس ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۴ ـ ثابت کرو کہ مکافی ما^{2} = ۴ ا لا پر کے نقاط (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) میں سے گزرنے والا وتر رأس پر کے مماس کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا معین ماَ اور ماً کا موسیقی اوسط ہے۔

۶۵ ـ لا ما = ک^{2} کے نقاط (لا$_{1}$، ما$_{1}$) اور (لا$_{2}$، ما$_{2}$) پر جو مماس کھینچ سکتے ہیں اُن کا نقطہ تقاطع معلوم کرو۔

۶۶ ـ نقطہ (ھ، ک) سے ما^{2} = ۴ ا لا کے دو مماس کھینچے گئے ہیں جو محور کیساتھ زاویئے طہ اور طہَ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ اگر ک مستقل ہو تو مم طہ + مم طہَ مستقل ہے۔

۶۷ ـ ثابت کرو کہ نقطہ (لا$_{1}$، ما$_{1}$) میں سے گزرنے والے خطوط جو منحنی

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

سے لاتناہی پر ملتے ہیں ا (لا − لا$_{1}$)^{2} + ۲ ھ (لا − لا$_{1}$) (ما − ما$_{1}$) + ب (ما − ما$_{1}$)^{2} = ۰ ہیں

اس کی مدد سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ زائد ۲ لا^{2} - لا ما - ۶ ما^{2} + ۷ ما - ۶ = ۰
کے متقارب لا - ۲ ما + ۱ = ۰ اور ۲ لا + ۳ ما - ۲ = ۰ ہیں۔

۶۸ - اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۵) میں سے گزرے اور منحنی ۴ لا^{2} - ۱۲ لا ما + ۹ ما^{2} + ۲ لا + ما - ۶۴ = ۰ سے لامتناہی پر ملے۔
نیز اُس دوسرے نقطہ کے محدد بھی معلوم کرو جہاں یہ خط منحنی سے ملتا ہے

۶۹ - مکافی کے دو نقاط کے معینوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ اِن نقطوں پر کے مماس ایک ایسے مکافی پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں جس کا وتر خاص اصلی مکافی کے وتر خاص کے مساوی ہے۔

۷۰ - ثابت کرو کہ جن نقطوں پر منحنی ۲ لا^{2} + ۳ ما^{2} = ۴، ۳ لا^{2} - ۳ ما^{2} = ۱ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اُن پر کے مماس ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔

۷۱ - ثابت کرو کہ اگر مبدأ سے منحنی لا^{2} + ۲ ھ لا ما - ما^{2} = ج کے کسی مماس پر عمود کھینچا جائے تو اس کا طول بالعکس متناسب ہے اُس فاصلہ کے جو نقطۂ تماس اور مبدأ کے درمیان ہو۔

۷۲ - ثابت کرو کہ مکافی کا مماس وتر خاص اور مرتب سے ایسے دو نقاط پر ملتا ہے جن کے فاصلے ماسکہ سے مساوی ہوتے ہیں۔

۷۳ - ثابت کرو کہ مکافی ما^{2} = ا لا اور لا^{2} = ا ما ایک دوسرے کو ایسے زاویہ پر قطع کرتے ہیں جس کا مماس $\frac{3}{4}$ ہے۔

۷۴ - ایک مکافی پر نقطے ن، ق، ر ایسے ہیں کہ ان کے فصلے سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، ثابت کرو کہ ن اور ر پر کے مماس ق کے معین پر قطع کرتے ہیں۔

۷۵ - مکافی کے ایسے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق دریافت کرو جو ایک دوسرے سے زاویہ ع بنائیں۔

۷۶ - اگر (لا$_{1}$، ما$_{1}$) اور (لا$_{2}$، ما$_{2}$) کو ملانے والا خط مستقیم خط ف لا + ق ما + ر = ۰
اور مخروطی ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
کے مشترک نقطہ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ مساواتیں
ک (ف لا$_{1}$ + ق ما$_{1}$ + ر) + ل (ف لا$_{2}$ + ق ما$_{2}$ + ر) = ۰ اور ک^{2} س$_{1}$ + ۲ ک ل م$_{12}$ + ل^{2} س$_{2}$ = ۰۔

ایک مشترک اصل رکھتی ہیں۔
یہ حاصل کرو کہ مشترک نقاط اور (لا$_1$، ما$_1$) کے ملانے والے خطوط کی مساوات ہے

(ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) (ف لا$_1$ + ق ما$_1$ + ر)^۲

− ۲ (ف لا$_1$ + ق ما$_1$ + ر) {لا (ا لا$_1$ + ب ما$_1$ + گ) + ما (ھ لا$_1$ + ب ما$_1$ + ف)

+ گ لا$_1$ + ف ما$_1$ + ج} (ف لا + ق ما + ر)

+ {ا لا$_1^۲$ + ۲ ھ لا$_1$ ما$_1$ + ب ما$_1^۲$ + ۲ گ لا$_1$ + ۲ ف ما$_1$ + ج} {ف لا + ق ما + ر}^{۲} = ۰

دفعہ ۴۸ حصہ اول کی مدد سے اس نتیجہ کی اُس صورت میں تصدیق کرو جبکہ (لا$_1$، ما$_1$) مبدا ہو۔

باب سیزدہم

متوازی وتروں کے نقاطِ تنصیف

مزدوج قطر

۱۵۱ـ درجہ دوم کی عام مساوات سے جو مخروطی تراش تعبیر ہوتی ہے اس کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے نقاطِ تنصیف کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سب وتر ما = م لا کے متوازی ہیں۔

مخروطی کے نقاط (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کو ملانے والے وتر کی مساوات ہے

ا (لا - لا۱) (لا - لا۲) + ھ {(لا - لا۱) (ما - ما۲) + (لا - لا۲) (ما - ما۱)} + ب (ما - ما۱) (ما - ما۲)

= ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج [دفعہ ۱۳۹]

اس لئے پھیلانے، رقوم کو اکٹھا کرنے اور تمام مساوات میں علامات بدلنے سے

لا {ا (لا۱ + لا۲) + ھ (ما۱ + ما۲) + ۲ گ} + ما {ھ (لا۱ + لا۲) + ب (ما۱ + ما۲) + ۲ ف}

= ا لا۱ لا۲ + ھ (لا۱ ما۲ + لا۲ ما۱) + ب ما۱ ما۲ - ج

یہ خط ما = م لا کے متوازی ہوگا اگر

{ا (لا۱ + لا۲) + ھ (ما۱ + ما۲) + ۲ گ} / {ھ (لا۱ + لا۲) + ب (ما۱ + ما۲) + ۲ ف} = - م [حصہ اول دفعہ ۱۹]

لیکن اگر (لا، ما) وتر کا نقطۂ تنصیف ہو تو

لا۱ + لا۲ = ۲ لا اور ما۱ + ما۲ = ۲ ما [حصہ اول دفعہ ۳ نتیجہ صریح]

اس لئے اوپر کی مساوات ہو جاتی ہے

(ا لا + ھ ما + گ) / (ھ لا + ب ما + ف) = - م

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مطلوبہ طریق کی مساوات ہے

ا لا + ھ ہا + گ + م (ھ لا + ب ہا + ف) = ۰ .... (۱)

۱۵۲ - متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کے طریق معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ -

باب ماقبل سے پہلے طریقہ کو ہم اس جگہ استعمال کرینگے

فرض کرو کہ متوازی وتر محور لا سے زاویہ طہ بناتے ہیں اور ہا = م لا کے متوازی ہیں یعنی م = مس طہ نیز فرض کرو کہ ان میں سے ایک وتر کا نقطۂ تنصیف (لاَ، ہاَ) ہے تب (لاَ، ہاَ) سے اُن نقاط کے فاصلے جہاں یہ وتر مخروطی سے ملتا ہے ذیل کی ر، مساوات درجہ دوم سے حاصل ہوتے ہیں

ر۲ (ا جم۲ طہ + ۲ ھ جب طہ جم طہ + ب جب۲ طہ)

+ ۲ ر {جم طہ (ا لاَ + ھ ہاَ + گ) + جب طہ (ھ لاَ + ب ہاَ + ف)}

+ ا لاَ۲ + ۲ ھ لاَ ہاَ + ب ہاَ۲ + ۲ گ لاَ + ۲ ف ہاَ + ج = ۰

چونکہ وتر کی تنصیف (لاَ، ہاَ) پر ہوتی ہے اس لئے یہ فاصلے مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں یعنی ان کا مجموعہ صفر ہے -

اس کے لئے یہ شرط ہے کہ ر کا سر اوپر کی مساوات میں صفر ہو یعنی

جم طہ (ا لاَ + ھ ہاَ + گ) + جب طہ (ھ لاَ + ب ہاَ + ف) = ۰

اس لئے چونکہ م = مس طہ

ا لاَ + ھ ہاَ + گ + م (ھ لاَ + ب ہاَ + ف) = ۰

یعنی (لاَ، ہاَ) کا طریق ایک خط مستقیم ہے جس کی مساوات ہے

ا لا + ھ ہا + گ + م (ھ لا + ب ہا + ف) = ۰ ...(۱)

نتیجہ صریح - م کی تمام قیمتوں کے لئے یہ خط خطوط

ا لا + ھ ہا + گ = ۰ اور ھ لا + ب ہا + ف = ۰

کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے -

اب ہم جانتے ہیں کہ مرکز دار تراش کی صورت میں یہ خط مرکز میں سے گذرتے ہیں کیونکہ مرکز ان دونوں خطوں پر واقع ہے پس معلوم ہوا کہ مرکز دار مخروطی میں متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ہمیشہ منحنی کا قطر ہوتا ہے [دیکھو دفعہ ۹۶]

اگر مخروطی قطع مکانی ہو تو خط

$\text{ل لا} + \text{ہ ما} + \text{گ} = ۰$ اور $\text{ہ لا} + \text{ب ما} + \text{ف} = ۰$

باہم متوازی ہیں پس م کی مختلف قیمتوں کے لئے طریق متوازی خطوط مستقیم سے تعبیر ہوتے ہیں۔

مکانی $\text{ما}^2 - ۴\,\text{ا لا} = ۰$ اور ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$
کی صورت میں اس جگہ ہم اوپر کی تحقیق کا جداگانہ اضافہ کرینگے۔

(۱) مکانی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا لا}$ کے لئے ر مساوات درجہ دوم ہوگی

$$(\text{ما} + \text{ر جب طہ})^2 = ۴\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{ر جم طہ})$$

یا $\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} + ۲\,\text{ر}\,(\text{ما جب طہ} - ۲\,\text{ا جم طہ}) + \text{ما}^2 - ۴\,\text{ا لا} = ۰$

اگر (لا، ما) وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہونگی
یعنی $\text{ما جب طہ} - ۲\,\text{ا جم طہ} = ۰$

$$\therefore\ \text{ما} = ۲\,\text{ا حم طہ}$$

اسلئے اگر مکانی کے متوازی وتروں کا نظام ایسا ہو کہ اس کے وتر محور سے زاویہ طہ بنائیں تو انکے نقاط تنصیف کا طریق $\text{ما} = ۲\,\text{ا حم طہ}$ ہوگا۔

(۲) ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے لئے ر مساوات ہوگی

$$\frac{(\text{لا} + \text{ر جم طہ})^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ما} + \text{ر جب طہ})^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

یا $\text{ر}^2\left(\frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2}\right) + ۲\,\text{ر}\left(\frac{\text{لا جم طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما جب طہ}}{\text{ب}^2}\right) + \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - ۱ = ۰$

اگر (لا، ما) وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو ر کا سر لازماً صفر ہوگا یعنی

$$\frac{\text{لا جم طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما جب طہ}}{\text{ب}^2} = ۰$$

اسلئے ایسے وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو محور اعظم سے زاویہ طہ بنائیں
خط $\frac{\text{لا جم طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما جب طہ}}{\text{ب}^2} = ۰$ ہے

اگر وتر $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا}$ کے متوازی ہوں تو $\text{مس طہ} = \text{م}$

اور طریق مطلوب ہوگا $\text{ما} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جم طہ}}{\text{جب طہ}}\,\text{لا}$ یعنی $\text{ما} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{م}}\,\text{لا}$

۱۵۳- مخروطی کا صرف ایک ہی وتر ایسا ہوسکتا ہے جسکی تنصیف ایک نقطہ معلومہ پر ہوتی ہے

فرض کرو کہ (لا٫، ما٫) میں سے گذرنیوالے وتر کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{جم طہ}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{جب طہ}}$$

اگر اسکی تنصیف (لا٫، ما٫) پر ہوتی ہو تو

$$\text{مس طہ} = -\frac{\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ھ}\,\text{ما}_1 + \text{گ}}{\text{ھ}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ف}} \qquad [\text{دفعہ ۱۵۱}]$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط کی صرف ایک ہی سمت ہوسکتی ہے یعنی ایسا وتر صرف ایک ہی ہے اور اسکی مساوات ہے $\text{ما} - \text{ما}_1 = (\text{لا} - \text{لا}_1)\,\text{مس طہ}$
جہاں مس طہ کی قیمت اوپر مندرج ہے، پس اس وتر کی مساوات ہوگی

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ھ}\,\text{ما}_1 + \text{گ}) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ھ}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ف}) = 0 \quad (۲)$$

وتر کی مساوات کی یہ شکل بعض اوقات بہت کارآمد ہوتی ہے۔
ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}$$

ہے اور مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کی صورت میں

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا} = \text{ما}_1^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}_1$$

اس مساوات کو لکھنے کا عام طریقہ یہ ہے "دوائیں رکن کو اسطرح لکھہ جاؤ گویا مماس کی مساوات لکھہ رہے ہو اور بائیں جانب کی رقم مطلق کو اس طرح منتخب کرو کہ اس مساوات سے تعبیر ہونیوالا خط مستقیم (لا٫، ما٫) میں سے گذرے"

اس کے استعمال کی توضیح کے لئے دیکھو مثال ۱ صفحہ ۲۵۱

مشقیں

۱- ابتدائی اصولوں کی بنا پر ہر دو قاعدوں (دفعات ۱۵۱، ۱۵۲) سے لا² + لا ما + لا + ما = ۰ کے اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق دریافت کرو جو (۱) ما = لا (۲) ما = ۰ سے متوازی ہوں۔

۲- ثابت کرو کہ مکافی ما² = ۴ ا لا میں اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ما = م لا سے متوازی ہوں خط مستقیم ما = ۲ا/م ہے۔

۳- زائد لا²/ا² − ما²/ب² = ۱ کی صورت میں دونوں قاعدوں سے ثابت کرو کہ مطلوبہ طریق خط مستقیم ما = ب² لا/ا² م ہے۔

۴- عام صورت میں ثابت کرو کہ اُن تمام وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ثابت نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں ذیل کی مخروطی تراش ہے

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + لا (گ − ا لا − ھ ما)

+ ما (ف − ھ لا − ب ما) − لا گ − ما ف = ۰

[اشارہ - اسکے لئے شرط لکھو کہ وہ وتر جسکی تنصیف لا، ما پر ہوتی ہے (لا، ما) میں سے گزرتا ہے]

۱۵۴- اوپر ہم نے اجمالی طور پر اُن طریقوں کو بیان کیا جو عام مساوات کی صورت میں استعمال ہو سکتے ہیں، اب ہم بالخصوص ناقص، زائد اور مکافی کی صورت میں متوازی وتروں کے نظاموں کی خاصیتوں پر بالتفصیل بحث کرینگے۔
اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں بالعموم خاص مشابہت پائی جاتی ہے تاہم یاد رہے کہ اِن میں ضروری فرق بھی موجود ہیں، مثلاً ہم جانتے ہیں کہ اُنکی مساواتیں بلحاظ اصلی محوروں کے بہت متشابہ ہیں مگر اُن مساواتوں سے جو منحنیات کی شکلیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایکدوسرے سے کہیں مختلف ہیں، نیز یہ ضروری فرق اگلے چند صفحات میں اکثر زیر بحث رہیگا کہ زائد کا ایک محور منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔
اس کتاب میں جہاں تک مکافی کی خاصیتوں پر بحث ہوگی وہ مرکزدار تراشوں کی خاصیتوں سے بالکل جداگانہ ہیں۔

۱۵۵- اگر مرکزدار مخروطی تراشوں کے دو قطروں میں سے ایک قطر دوسرے قطر

کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا۔

مرکز کو مبدأ مانو، اس طرح مخروطی کی مساوات اس شکل کی ہوگی

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱

فرض کرو کہ ما = م لا اور ما = م۱ لا دو قطر ہیں۔

فرض کرو کہ (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً) ایسے وتر کے سرے ہیں جو ما = م لا کے متوازی ہے جیسا ہم نے دفعہ ۱۵۱ میں دیکھا اس وتر کی مساوات ہوگی

و (لا - لاَ) (لا - لاً) + ھ {(لا - لاَ) (ما - ماً) + (لا - لاً) (ما - ماَ)} + ب (ما - ماَ) (ما - ماً)

= ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² - ۱

چونکہ یہ ما = م لا کے متوازی ہے اس لئے

لا کا سر / ما کا سر = - م

یا [ا (لاَ + لاً) + ھ (ماَ + ماً)] / [ھ (لاَ + لاً) + ب (ماَ + ماً)] = - م

پس اگر (لا، ما) وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو یہ مساوات ہوگی

(ا × ۲ لا + ھ × ۲ ما) / (ھ × ۲ لا + ب × ۲ ما) = - م

پس ما = م لا کے متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ہے

ا لا + ھ ما + م (ھ لا + ب ما) = ۰ یا لا (ا + ھ م) + ما (ھ + ب م) = ۰

حسب مفروض یہ ہے ما = م۱ لا ∴ م۱ = - (ا + ھ م) / (ھ + ب م)

یا ا + ھ (م + م۱) + ب م م۱ = ۰ ....(۲۹۰)

اسی طرح اگر ما = م۱ لا، ما = م لا کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو

ب م۱ م + ھ (م۱ + م) + ا = ۰

اور یہ وہی شرط ہے جو اوپر معلوم کی گئی ہے اس لئے مسئلہ ثابت ہوا۔

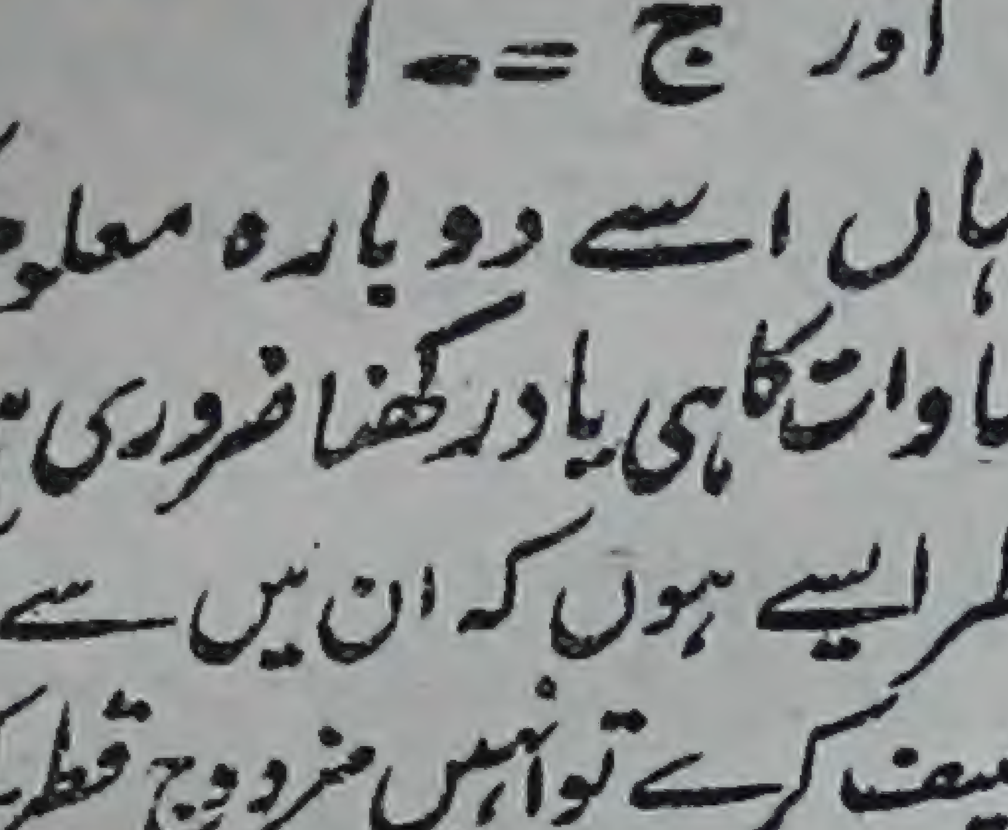
شرط (۴) یاد رکھنی چاہیئے۔

نوٹ اُس قطر کی مساوات جو ما = م لا کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے عام نتیجہ میں گ = ف = ۰ اور ج = -۱ رکھنے سے حاصل ہو سکتی تھی، لیکن یہاں اسے دوبارہ معلوم کرلینا مناسب ہے، اس طرح پر صرف وتر کی مساوات کا ہی یاد رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

۱۵۶- مزدوج قطر- تعریف- اگر دو قطر ایسے ہوں کہ ان میں سے کوئی سا ایک قطر دوسرے کے تمام متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو انہیں مزدوج قطر کہتے ہیں۔

مزدوج قطروں کی نہایت سادہ صورت دائرہ کے دو علی القوائم قطر ہیں، ان میں سے ہر ایک قطر دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۵۷- کسی قطر کے سروں پر کے مماس اسکے مزدوج کے متوازی ہوتے ہیں۔



شکل ۵۸

فرض کرو کہ ق ق'، ق ق'، ق ق' متوازی وتروں کا ایک نظام ہے اور قطر ج ن انکی تنصیف کرتا ہے، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ن پر کا مماس ہر ایک وتر کے متوازی ہے۔

اب نقاط ق اور ق'، ق اور ق'، ق' ق اور ق' قطر ج ن کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں، نیز ہم جانتے ہیں کہ جب ایک وتر کے سرے ایکدوسرے کے لاانتہا قریب ہوں تو اسوقت وہ مماس بن جاتا ہے پس چونکہ وتر کے سرے ہمیشہ ج ن کی متقابل جانبوں میں واقع ہونگے اس لئے معلوم ہوا کہ اگر وہ ایکدوسرے پر منطبق ہوں تو انہیں نقطہ ن پر منطبق ہونا چاہیئے، اس لئے ن پر کا مماس ایک وتر کا انتہائی مقام ہے اسلئے یہ ق ق' وغیرہ کے متوازی ہے۔

مشقیں

۵- ناقص $\frac{لا^2}{ل^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے اُس وتر کی مساوات جسکی تنصیف (لا'، ما') پر ہوتی ہے

$$\frac{\text{لا لا}_۱}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما ما}_۱}{\text{ب}^۲} = \frac{\text{لا}_۱^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}_۱^۲}{\text{ب}^۲}$$ ہے۔

۶۔ ابتدائی اصولوں سے حسب دفعہ ۱۵۵ ثابت کرو کہ اگر ما = م لا ناقص $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱$ کے اُن سب وتروں کی تنصیف کرے جو ما = مَ لا کے متوازی ہوں تو $\text{م مَ} = -\frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}$

۷۔ زائد $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} - \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱$ کی صورت میں اسیطرح ثابت کرو کہ یہ شرط ہونی چاہیئے $\text{م مَ} = \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}$

۸۔ تحلیلی طریقہ سے دفعہ ۱۵۷ کے مسئلہ کو ثابت کرو۔

[فرض کرو کہ مخروطی ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ = ۱ ہے (لا$_۱$، ما$_۱$) پر کا مماس ہے
لا (ا لا$_۱$ + ح ما$_۱$) + ما (ح لا$_۱$ + ب ما$_۱$) = ۱
ما = م لا کے متوازی ہوگا اگر (ا لا$_۱$ + ح ما$_۱$) + م (ح لا$_۱$ + ب ما$_۱$) = ۰
یعنی اگر (لا$_۱$، ما$_۱$) مزدوج وتر پر واقع ہو]

۹۔ اگر ما = م لا اور ما = مَ لا مخروطی لا^۲ + لا ما + ما^۲ = ۱ کے مزدوج قطر ہوں تو اس کے لئے کیا شرط ہونی چاہئے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ = ۱ کے متقارب ا$_۱$ لا^۲ + ۲ ح$_۱$ لا ما + ب$_۱$ ما^۲ = ۱ کے مزدوج قطر ہونگے اگر ا ب$_۱$ + ب ا$_۱$ − ۲ ح ح$_۱$ = ۰

۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر ناقص کی مساوات ۲ لا^۲ + ۳ ما^۲ = ۴ ہو تو قطر ما = ۲ لا اور لا + ۳ ما = ۰ ایکدوسرے کے مزدوج ہیں۔

۱۲۔ مثال ۶ کے نتیجہ کو استعمال کرنے سے اس امر کی شرط معلوم کرو کہ خطوط ا$_۱$ لا^۲ + ۲ ح$_۱$ لا ما + ب$_۱$ ما^۲ = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱$ کے مزدوج قطر ہوں۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ خطوط ا$_۱$ لا^۲ + ۲ ح$_۱$ لا ما + ب$_۱$ ما^۲ = ۰ مخروطی ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ = ۱ کے مزدوج قطر ہوں گے اگر

ا ب$_۱$ + ا$_۱$ ب − ۲ ح ح$_۱$ = ۰

[دیکھو دفعہ ۱۵۵، اس نتیجہ کو یاد رکھنا چاہیئے]

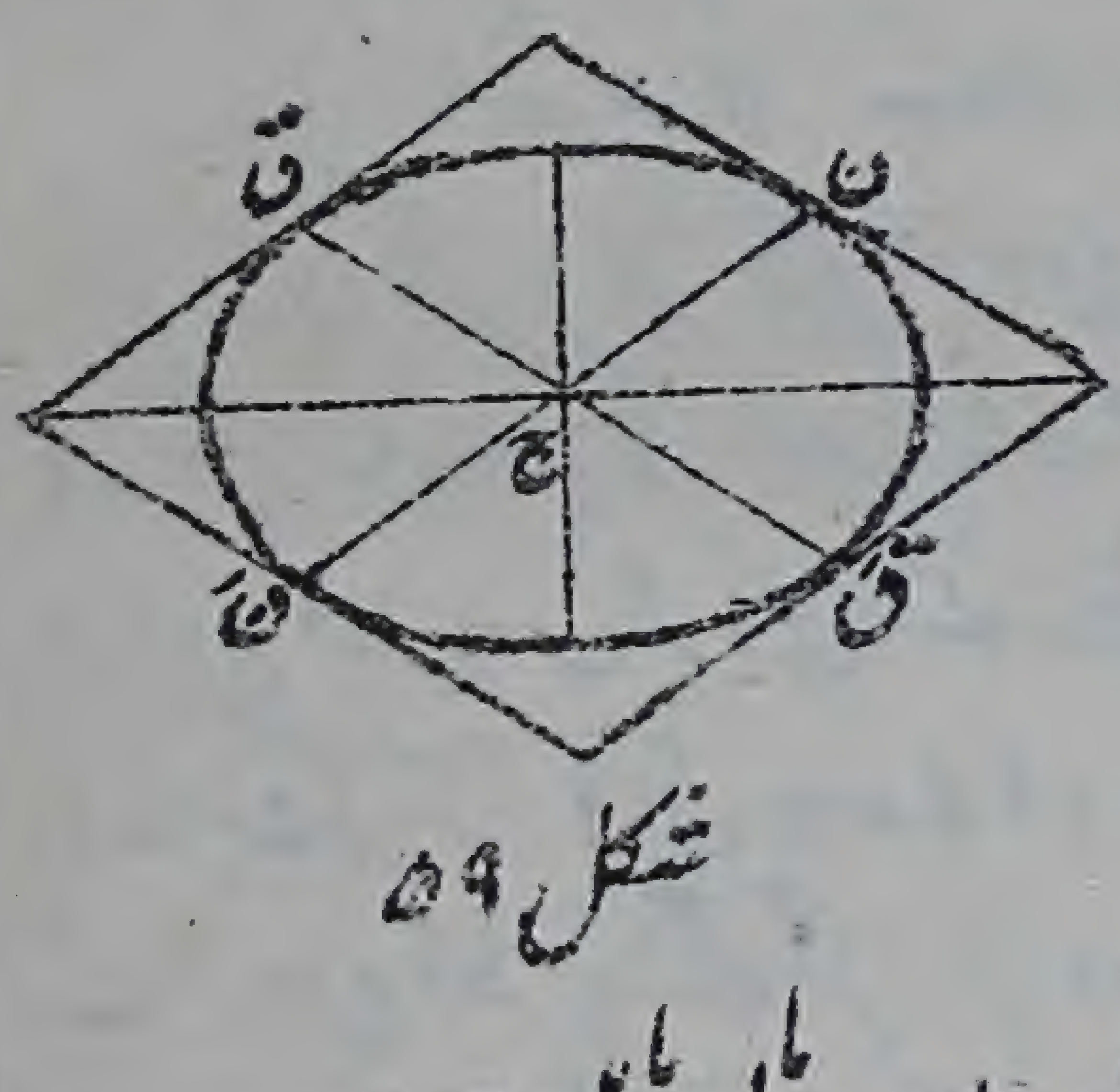
۱۴- ثابت کرو کہ قائم قطع زائد کے مزدوج قطر کسی ایک متقارب سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔
[زائد کی مساوات $لا\ ما = ج^2$ فرض کرو]

۱۵- اگر دائرہ کو مرکز دار تراشش خیال کیا جائے تو اس کے مزدوج قطر کیا ہونگے؟ اس دفعہ کے ضابطوں سے ثابت کرو کہ یہ علی القوائم ہیں۔

۱۵۸- ناقص کے مزدوج قطروں کی خاصیتیں۔

فرض کرو کہ ن ج نَ اور ق ج قَ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے مزدوج قطر ہیں جہاں اَ، ب ناقص کے نصف محور ہیں اور ن کے محدد $(لا_1، ما_1)$ ہیں اور ق کے $(لا_2، ما_2)$ اسطرح نقطہ نَ $(-لا_1، -ما_1)$ ہوگا اور قَ $(-لا_2، -ما_2)$۔ خاصیتیں حسب ذیل ہیں

(۱) $\frac{لا_1 لا_2}{ا^2} + \frac{ما_1 ما_2}{ب^2} = 0$ ....(۵)



شکل ۵۹

کیونکہ فرض کرو کہ ج ن کی مساوات $ما = ص_1 لا$ ہے اور ج قَ کی $ما = ص_2 لا$، اب چونکہ یہ مزدوج قطر ہیں اسلئے $ص_1 ص_2 = -\frac{ب^2}{ا^2}$

لیکن $ص_1 = \frac{ما_1}{لا_1}$ اور $ص_2 = \frac{ما_2}{لا_2}$

پس $\frac{ما_1 ما_2}{لا_1 لا_2} = -\frac{ب^2}{ا^2}$ یا $\frac{لا_1 لا_2}{ا^2} + \frac{ما_1 ما_2}{ب^2} = 0$

(۲) $\frac{لا_1}{ا} = \pm \frac{ما_2}{ب}$ اور $\frac{ما_1}{ب} = \mp \frac{لا_2}{ا}$ .... (۶)

جہاں دونوں نچلی یا دونوں اوپر کی علامتیں ایک ساتھ لینی چاہئیں۔

(۱) کی رو سے $\frac{لا_1/ا}{ما_2/ب} = -\frac{ما_1/ب}{لا_2/ا}$ اور تناسب کے خواص کی رو سے

ان میں سے ہر نسبت $= \frac{\sqrt{\frac{لا_1^2}{ا^2} + \frac{ما_1^2}{ب^2}}}{\sqrt{\frac{لا_2^2}{ا^2} + \frac{ما_2^2}{ب^2}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \pm 1$

اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ مشتبہ علامت کے پیدا ہونے کا باعث یہ ہے کہ اگر ایک قطر کا سرا ن متعین کرلیا جائے تو ق دوسرے قطر کا کوئی سا سرا ہو سکتا ہے۔ شکل میں اوپر کی علامت ق سے متعلق ہے نچلی ق' سے۔

نتیجہ صریح۔ $\text{ما}_۲ = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \text{لا}_۱$ ، $\text{لا}_۲ = \mp \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \text{ما}_۱$

(۳) دو مزدوج نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ نصف محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ . . . . (۷)

کیونکہ $\text{ج ن}^۲ = \text{لا}_۱^۲ + \text{ما}_۱^۲$ اور $\text{ج ق}^۲ = \text{لا}_۲^۲ + \text{ما}_۲^۲$

لیکن $\text{لا}_۲^۲ = \frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲} \text{ما}_۱^۲$ اور $\text{ما}_۲^۲ = \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲} \text{لا}_۱^۲$ ....(۲) کی رو سے

اس لئے

$$\text{ج ن}^۲ + \text{ج ق}^۲ = \text{لا}_۱^۲ + \text{ما}_۱^۲ + \frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲} \text{ما}_۱^۲ + \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲} \text{لا}_۱^۲$$

$$= \text{لا}_۱^۲ \left(1 + \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}\right) + \text{ما}_۱^۲ \left(1 + \frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{لا}_۱^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}_۱^۲}{\text{ب}^۲}\right)\left(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲\right)$$

$$\therefore \text{ج ن}^۲ + \text{ج ق}^۲ = \text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ \quad . . . . . (۷)$$

(۴) ج ن اور ج ق کو متصل اضلاع مان کر جو متوازی الاضلاع بنایا جائے اس کا رقبہ = ا ب . . . . . . (۸)

$$\text{متوازی الاضلاع} = ۲\triangle \text{ج ن ق} = ۲ \times \tfrac{1}{2}(\text{لا}_۱\text{ما}_۲ - \text{لا}_۲\text{ما}_۱) = \text{لا}_۱\text{ما}_۲ - \text{لا}_۲\text{ما}_۱$$

$$= \text{لا}_۱ \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \text{لا}_۱ + \text{ما}_۱ \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \text{ما}_۱ = \text{ا ب}\left(\frac{\text{لا}_۱^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}_۱^۲}{\text{ب}^۲}\right)$$

= ا ب اور یہی مطلوب تھا

(۵) $\text{ج ق}^۲ = \text{س ن} \times \text{س' ن}$

ہم طرفین کو لا۱ کی رقوم میں بیان کریں گے جو ن کا فصلہ ہے۔

$$\text{ج ق}^{۲} = \text{لا}'^{۲} + \text{ہا}'^{۲} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\,\text{ہا}^{۲} + \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\,\text{لا}^{۲} = \text{ا}^{۲}\left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\right) + \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\,\text{لا}^{۲}$$

$$= \text{ا}^{۲} - \frac{\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\,\text{لا}^{۲} = \text{ا}^{۲} - \text{ز}^{۲}\,\text{لا}^{۲}$$ [دفعہ ۵۵]

نیز $\text{س ن} \times \text{س}'\text{ ن} = (\text{ا} + \text{ز لا})(\text{ا} - \text{ز لا}) = \text{ا}^{۲} - \text{ز}^{۲}\,\text{لا}^{۲}$ [دفعہ ۶۳]

$$\therefore\ \text{ج ق}^{۲} = \text{س ن} \times \text{س}'\text{ ن} \quad \ldots\ldots (۹)$$

(۶) اگر اُس عمود کا طول جو مرکز سے ن پر کے مماس پر کھینچا جائے ع ہو تو ع × ج ق = ا ب

ن $(\text{لا}', \text{ہا}')$ پر کا مماس $\frac{\text{لا لا}'}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ہا ہا}'}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ ہے

$$\therefore\ \text{ع} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{\text{لا}'^{۲}}{\text{ا}^{۴}} + \frac{\text{ہا}'^{۲}}{\text{ب}^{۴}}}}$$

$$\text{ج ق}^{۲} = \text{لا}'^{۲} + \text{ہا}'^{۲} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\,\text{ہا}'^{۲} + \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\,\text{لا}'^{۲} = \text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}\left(\frac{\text{لا}'^{۲}}{\text{ا}^{۴}} + \frac{\text{ہا}'^{۲}}{\text{ب}^{۴}}\right)$$

اسلئے $\text{ع} \times \text{ج ق} = \text{ا ب} \quad \ldots\ldots (۱۰)$

(۶) نتیجہ (۴) سے بھی حاصل ہو سکتا ہے کیونکہ ن اور ق پر کے مماس ج ن اور ج ق کے ساتھ مل کر نتیجہ (۴) کا متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

۱۵۹ — مساوی مزدوج قطر۔ اگر ناقص کے دو قطر مزدوج ہوں اور باہم مساوی بھی ہوں تو انہیں مساوی مزدوج قطر کہتے ہیں۔

طالب علم اِن کی حسب ذیل خاصتیں خود حاصل کرے۔

مشقیں

۶۱۵۔ اگر ناقص میں محوروں کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو ان سے ایک مستطیل بنتا ہے ثابت کرو کہ اس مستطیل کے قطر مساوی مزدوج قطر ہیں اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۷- اگر ج ن، ج ق مساوی مزدوج قطر ہوں تو
(۱) ج ن^2 = ج ق^2 = $\frac{1}{2}$(ا^2 + ب^2) (۲) < ن ج ق = ۲ مس$^{-1}$($\frac{ب}{ا}$)
۱۸- ثابت کرو کہ دو مزدوج قطروں کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا اُسوقت ہوگا جب وہ مساوی ہوں۔
۱۹- ثابت کرو کہ نقطہ ن (۱، ۲) ناقص ۲ لا^2 + ۳ ما^2 = ۱۴ پر واقع ہے۔
(۱) ج ن کا طول (۲) مزدوج نیمقطر ج ق کا طول (۳) مرکز سے ن پر کے مماس پر جو عمود نکالا جائے اس کا طول معلوم کرو۔
ن کے ماسکی فاصلے اور ج ن، ج ق کا درمیانی زاویہ معلوم کرو اور اسطرح خواص ۳، ۴، ۵، ۶ دفعہ ۱۵۸ کی تصدیق کرو۔
۲۰- اس کی تصدیق کرو کہ نقطہ (۱، ۱) ناقص لا^2 + لا ما + ما^2 = ۳ پر واقع ہے اور ج ن کا جو مزدوج قطر ہے اسکے سروں کے محدد معلوم کرو۔
۲۱- اگر عہ، بہ دو مزدوج نیم قطر ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ثابت کرو کہ
عہ^2 + بہ^2 = ا^2 + ب^2، عہ بہ جیب سہ = اب
اسلئے اگر دو مزدوج قطر بلحاظ مقدار اور سمت کے معلوم ہوں تو نیم محوروں کے طول معلوم کرو۔
۲۲- اگر مشق ۲۱ میں عہ = ۲، بہ = ۱ اور سہ = ۳۰° تو ا، ب کو اعشاریہ کے دو مقامات تک معلوم کرو۔
۲۳- اگر مساوی مزدوج نیمقطروں کا طول ۳ اور اُن کا درمیانی زاویہ ۴۵° ہو تو نیم محوروں کو اعشاریہ کے دو مقامات تک معلوم کرو۔
۱۶۰- ناقص کی مساوات اُس صورت میں جبکہ دو مزدوج قطروں کو محور مانا جائے۔
چونکہ مرکز مبدأ ہے اسلئے مساوات اس شکل کی ہوگی (دفعہ ۹۴)
ا، لا^2 + ۲ حہ لا ما + ب، ما^2 = ۱
لیکن خط ما = ۰ اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہوں، پس لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ہونگی (یعنی لا کو کوئی قیمت دینے سے

ما میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اسمیں ما کا سر صفر ہونا چاہیئے) اسلئے
ھ = ۰ پس مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$\text{ﻟ}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 1$$

اگر قطروں کے طول ۲ اَ ، ۲ بَ ہوں تو مساوات $\text{ﻟ}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 1$ میں
ما = ۰ رکھنے سے لا کی قیمتیں لازماً ± اَ حاصل ہونی چاہئیں

$$\therefore\ \text{ﻟ} = \frac{1}{\text{اَ}^2} \quad \text{اسیطرح} \quad \text{ب} = \frac{1}{\text{بَ}^2}$$

پس مساوات مطلوبہ ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{اَ}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{بَ}^2} = 1 \quad \cdots\cdots (11)$$

جو بعینہٖ اُس شکل کی مساوات ہے جو اصلی محوروں کو حوالہ کے محور ماننے سے حاصل ہوتی ہے، لیکن یاد رہے کہ موجودہ صورت میں محور مائل ہیں۔

نوٹ اس صورت میں بھی مماس کی مساوات، اُس قطر کی مساوات جو ما = م لا کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے اور دو قطروں کے باہم مزدوج ہونیکی شرط سب وہی ہونگی جو قائم محوروں کی صورت میں۔

مشق

۴۴۔ ناقص کی مساوات بلحاظ اس کے مساوی مزدوج قطروں کے
$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ ہوگی۔

۱۶۱۔ زائد کے مزدوج قطر۔ اگر زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہو تو دوسرا اسے خیالی نقاط پر ملیگا۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{اَ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بَ}^2} = 1$$

تب ما = م لا منحنی سے حقیقی نقاط پر ملیگا اگر م تعداداً $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ سے کم ہو کیونکہ ما = $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ لا منحنی کا متقارب ہے اور کوئی خط جو متقارب اور قاطع محور کے درمیانی زاویہ سے بڑا زاویہ قاطع محور کے ساتھ بنائے

منحنی سے نہیں مل سکتا (دفعہ ۷۶)

اب $\text{ما} = \text{م}_1 \text{لا}$ اور $\text{ما} = \text{م}_2 \text{لا}$ زائد کے مزدوج قطر ہونگے اگر

$$\text{م}_1 \text{م}_2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

پس اگر $\text{م}_1 < \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ تو $\text{م}_2 > \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور اگر $\text{م}_1 > \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ تو $\text{م}_2 < \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اس لئے ایک قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقاط پر۔
نوٹ۔ زائد کی صورت میں متوازی وتروں کا نظام ایسا ہو سکتا ہے کہ اس کے کسی وتر کے سرے منحنی کی ایک ہی شاخ پر یا مختلف شاخوں پر واقع ہوں، پہلی صورت میں صریحاً وتر کو اس کے متوازی حرکت دینے سے ہم اسے منحنی کا مماس بنا سکتے ہیں، اس لئے نقطۂ تماس میں سے گذرنے والا مزدوج قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور ان میں سے ایک نقطہ ایک شاخ پر واقع ہوتا ہے اور دوسرا دوسری شاخ پر، لیکن اگر وتر کے سرے مختلف شاخوں پر واقع ہوں تو وتر کا طول کبھی لا انتہا کم نہیں ہو سکتا کیونکہ شاخیں کبھی ایک دوسرے کے لا انتہا قریب نہیں آسکتیں، اسلئے مزدوج قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔

۱۶۲۔ ناقص کی صورت میں اگر ایک قطر دیا ہوا ہو تو اس کے مزدوج قطر کے سروں سے ہم نے وہ نقطے مراد لئے ہیں جہاں یہ منحنی سے ملتا ہے لیکن زائد کی صورت میں چونکہ دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے (دفعہ ۱۶۱) اس لئے اس کے سروں کی حسب بالا تعریف نہیں ہو سکتی، پس اسجگہ ہمیں بالکل نئے تخیلات سے کام لینا ہوگا انہیں ہم اگلی دفعات میں بیان کرینگے۔

۱۶۳۔ **مزدوج قطع زائد۔** تعریف۔ جس زائد کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1 \quad \ldots\ldots \quad (۱۲)$$

ہے اس کو زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کا **مزدوج قطع زائد** کہتے ہیں

۱۶۴- زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خواص۔

(۱) دونوں منحنیات کے محور وہی ہوتے ہیں لیکن ایک کا قاطع محور دوسرے کا مزدوج محور ہوتا ہے اور برعکس اسکے۔

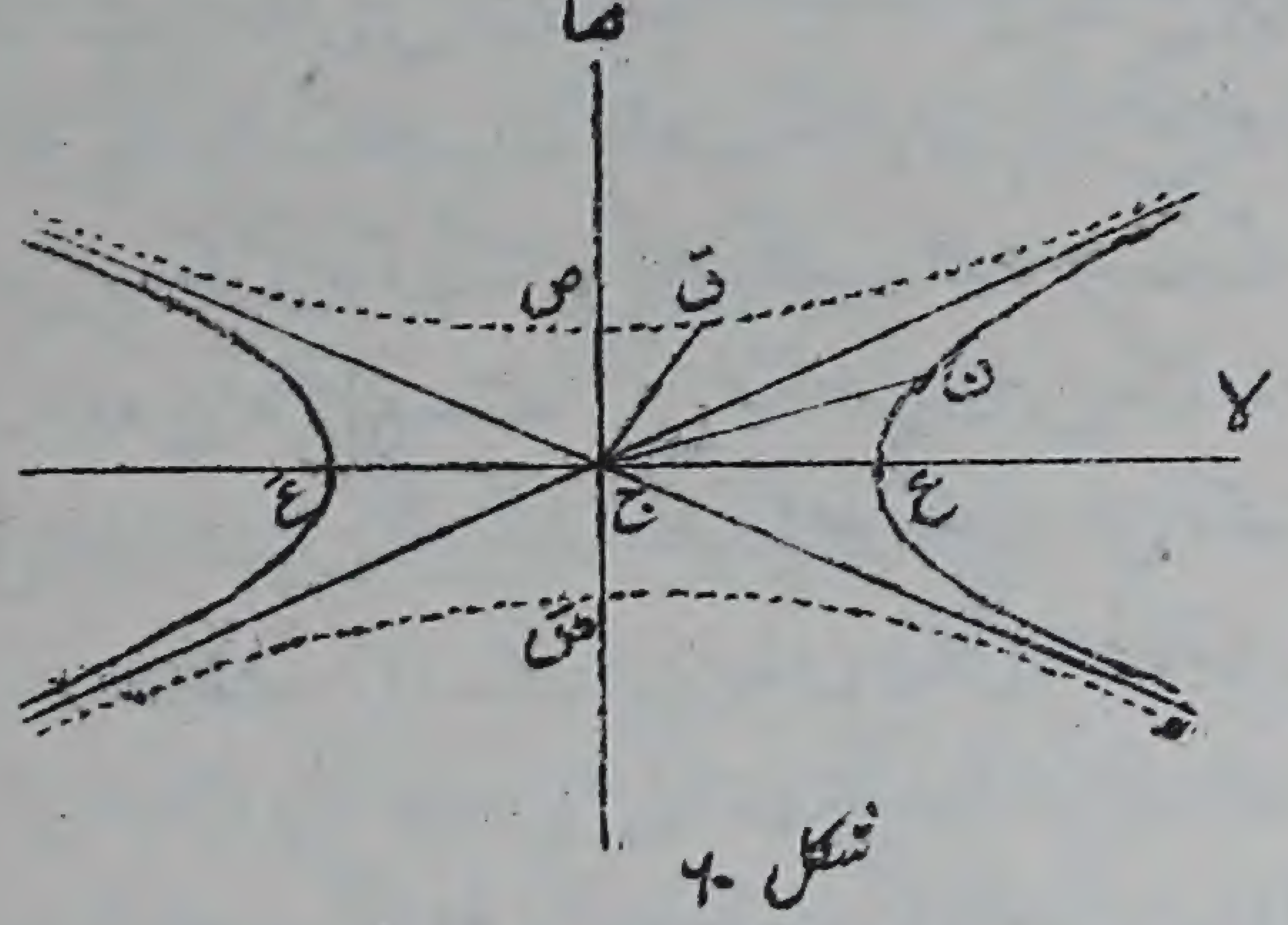
قاطع محور وہ محور ہے جو منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے - اس تعریف کو ملحوظ رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ما = ۰

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = +1$$

کا قاطع محور ہے اور

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1$$

کا مزدوج محور ہے کیونکہ اس سے یہ خیالی نقاط پر ملتا ہے، صریحاً لا = ۰ موخر الذکر کا قاطع محور ہے۔



شکل ۶۰

(۲) دونوں منحنیات کے متقارب وہی ہوتے ہیں

دونوں کے متقارب صریحاً $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \pm \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ ہیں کیونکہ متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم درجہ دوم کی رقوم کو صفر کے مساوی رکھتے ہیں [دفعہ ۱۶۰]

(۳) مرکز میں سے گذرنیوالا کوئی خط ایک زائد سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرے سے خیالی نقاط پر بشرطیکہ یہ دونوں کا مشترک متقارب نہ ہو۔

کیونکہ $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا}$ پہلے زائد سے ملیگا جہاں

$$\text{لا}^2 \left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2} \right) = +1$$

اور دوسرے سے ملیگا جہاں

$$\text{لا}^2 \left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2} \right) = -1$$

یہ خط پہلے زائد سے حقیقی نقاط پر ملیگا یعنی لا^2 کی قیمت مثبت ہوگی اگر

$\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}$ مثبت ہو

اور یہ خط دوسرے سے حقیقی نقاط پر ملیگا اگر

$\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}$ منفی ہو

اس لئے اگر $\text{م} \neq \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کے مساوی نہ ہو تو خط مذکور ایک منحنی سے حقیقی نقاط پر ملیگا اور دوسرے سے خیالی نقاط پر۔

دونوں منحنیات کی شکلیں تصویر ۶۰ میں دکھائی گئی ہیں۔ مسلسل منحنی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = +1$ کی ترسیم ہے اور نقطوں والا منحنی

$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1$ کی۔

(۴) اگر دو قطر بلحاظ ایک زائد کے مزدوج ہوں تو وہ بلحاظ مزدوج زائد کے بھی مزدوج ہوں گے۔

$\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا}$ اور $\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا}$ بلحاظ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے مزدوج ہوں گے اگر $\text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1$ یا $\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} = 1$ کیلئے قطروں کے ازدواج کی

متناظر شرط لا اور ما کا ا اور ب کا باہم تبادلہ کرنے اور م کی بجائے $\frac{1}{\text{م}_1}$ اور م$_2$ کی بجائے $\frac{1}{\text{م}_2}$ لکھنے سے حاصل ہوگی [کیونکہ اس صورت میں ما = م$_1$ لا محور ما کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس $\frac{1}{\text{م}_1}$ ہے]

شرط مطلوبہ اس لئے یہ ہے

$$\frac{1}{\text{م}_1} \times \frac{1}{\text{م}_2} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \quad \text{یا} \quad \text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

جو پہلی صورت میں اوپر بیان کی گئی ہے، اس لئے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا قطر اسکے مزدوج زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔

پس مزدوج قطروں کی ایک نئی تعریف ہم حسب ذیل وضع کرتے ہیں۔

۱۶۵۔ **مزدوج نیمقطر۔ تعریف۔** اگر ایک قطر ن ج نَ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ سے حقیقی نقاط ن اور نَ پر ملے تو

اس کا مزدوج قطر مزدوج زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1$ سے حقیقی نقاط ق اور قَ پر ملیگا۔ ج ق کو ج ن کا مزدوج نیمقطر بلحاظ مقدار اور سمت کے کہتے ہیں۔

پس مزدوج قطر کے سرے وہ نقطے ہیں جہاں یہ مزدوج زائد سے ملتا ہے۔

۱۶۶۔ ایک زائد دیا ہوا ہے، اس کے مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔

سادہ سے سادہ صورت میں زائد اس کے متقاربوں اور اس کے مزدوج زائد کی مساواتیں بالترتیب یہ ہیں

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \text{ ، } \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1$$

اب کسی اور محوروں کے لحاظ سے (خواہ یہ محور قائم ہوں یا مائل)

ان مساواتوں کو تحویل کرنے کے لئے ہمیں اس قسم کے اندراج کرنے ہونگے

$$\text{لا} = \text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1 \qquad \text{ما} = \text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2$$ [حصہ اول، دفعہ ۳۸]

اوپر کی تین مساواتیں ہو جائینگی

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{ا}^2} - \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2)^2}{\text{ب}^2} = 1$$

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{ا}^2} - \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2)^2}{\text{ب}^2} = 0$$

$$\frac{(\text{ل}_1\,\text{لا} + \text{م}_1\,\text{ما} + \text{ن}_1)^2}{\text{ا}^2} - \frac{(\text{ل}_2\,\text{لا} + \text{م}_2\,\text{ما} + \text{ن}_2)^2}{\text{ب}^2} = -1$$

اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ زائد کی مساوات سے متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم زائد کی رقم مستقل سے ایک خاص مقدار مثلاً له تفریق کرتے ہیں اور مزدوج زائد کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم متقاربوں کی مساوات سے وہی مقدار له تفریق کرتے ہیں۔ یاد رہے کہ له کا ایک کے مساوی ہونا ضروری نہیں کیونکہ ہر ایک مساوات کو انکا باہمی تعلق بدلنے کے بغیر ایک ہی مقدار سے ضرب دیا جاسکتا ہے [دفعہ ۹۰]

مثال۔ زائد $\text{لا}\,\text{ما} + \text{لا} + \text{ما} - 4 = 0$ کے مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔

اوپر کی مساوات اسطرح لکھی جاسکتی ہے

$$(\text{لا} + 1)(\text{ما} + 1) - 5 = 0$$

متقارب ہیں $(\text{لا} + 1)(\text{ما} + 1) = 0$

اسلئے مزدوج منحنی کی مساوات ہے $(\text{لا} + 1)(\text{ما} + 1) + 5 = 0$

یا $\text{لا}\,\text{ما} + \text{لا} + \text{ما} + 6 = 0$

مشقیں

۲۵۔ اُن زائدوں کی مساواتیں معلوم کرو جو بالترتیب

$\frac{1}{4}$ لا^2 - ما^2 = ۱ ، ۳ لا^2 - ما^2 = ۲ ، ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 = ج ،
لا ما + ۲ لا + ۳ ما + ۱ = ۰
کے مزدوج ہوں۔

۲۶- لا^2 + ۴ لا ما - ما^2 + ۲ لا + ۴ ما = ۰ کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو اور اس سے مزدوج زائد کی مساوات حاصل کرو۔

۲۷- اگر ج ن ، ج ق ایک زائد کے مزدوج قطر ہوں جہاں ق مزدوج زائد پر واقع ہے تو ثابت کرو کہ ق پر کا مماس ج ن کے متوازی ہوگا۔

۱۶۷- زائد کے مزدوج قطروں کی خاصیتیں۔

فرض کرو کہ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے مزدوج نیمقطروں ج ن اور ج ق کے سرے (لا$_1$ ، ما$_1$) اور (لا$_2$ ، ما$_2$) ہیں جہاں ن زائد پر واقع ہے اور اس لئے ق مزدوج زائد پر ہے۔

تب $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$ اور $\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} = -1$

خواص ذیل کے ثبوت بالکل ویسے ہی ہیں جیسے ناقص کی صورت میں (دفعہ ۱۵۸) اور طالب علم اُنہیں مشق کے طور پر حل کرے۔

(۱) $\frac{\text{لا}_1 \text{لا}_2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1 \text{ما}_2}{\text{ب}^2} = 0$ . . . . . (۱۳)

(۲) $\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} = \pm \frac{\text{ما}_2}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} = \pm \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}}$ . . . . (۱۴)

(۳) ج ن^2 - ج ق^2 = ا^2 - ب^2 . . . . . . (۱۵)

(۴) ج ن اور ج د کو متصل اضلاع مان کر جو متوازی الاضلاع بنایا جائے اس کا رقبہ = ا ب . . . . . . (۱۶)

(۵) ج ق^2 = س ن × س' ن . . . . . (۱۷)

(۶) اگر اُس عمود کا طول جو مرکز سے ن پر کے مماس پر کھینچا جائے ع ہو تو

ع × ج ق = ا ب . . . . . . (۱۸)

۱۶۸- زائد کی مساوات جبکہ مزدوج قطروں کو حوالہ کے محور مانا جائے۔
چونکہ مرکز مبدأ ہے اس لئے مساوات اس شکل کی ہوگی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱

اب محور لا ہر ایک ایسے وتر کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہو، اس لئے لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہونی چاہئیں اس لئے ھ = ۰

اس لئے مساوات ہو جاتی ہے ا لا^2 + ب ما^2 = ۱
اس لئے متقاربوں کی مساوات جو مبدأ میں سے گذرنیوالے دو خطوط مستقیم ہیں یہ ہے ا لا^2 + ب ما^2 = ۰
اس لئے دفعہ ۱۶۶ کی رو سے مزدوج زائد کی مساوات ہے

ا لا^2 + ب ما^2 = −۱

اب فرض کرو کہ اُس قطر کا طول جو محور لا پر منطبق ہوتا ہے اور منحنی کو کاٹتا ہے ۲ اَ ہے اور دوسرے کا طول جو مزدوج زائد کو قطع کرتا ہے ۲ بَ ہے۔
اس لئے اگر ہم مساوات ا لا^2 + ب ما^2 = ۱ میں ما کو صفر کے مساوی رکھیں تو لا = اَ حاصل ہونا چاہیئے لا = ± اَ اور اگر مساوات ا لا^2 + ب ما^2 = −۱ میں ہم لا = ۰ رکھیں تو حاصل ہونا چاہیئے

ما = ± بَ

اس لئے ا اَ^{2} = ۱ اور ب بَ^{2} = −۱

اس لئے مساوات ہوگی $\frac{\text{لا}^2}{\text{اَ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بَ}^2} = 1$ . . . . . . (۱۹)

مشقیں

۲۸- زائد لا^2 + لا ما − ما^2 = ۱ کا وہ قطر معلوم کرو جو لا + ۲ ما = ۰ کا مزدوج ہو اور فی الحقیقت اس کی تصدیق کرو کہ دو قطروں میں سے ایک منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقاط پر۔

۲۹- ثابت کرو کہ اگر متوازی الاضلاع ج ن ل ق کی تکمیل کی جائے تو ل ایک متقارب پر واقع ہوگا۔

۳۰- اگر زائد کے مزدوج نیم قطر عہ اور بہ ہوں اور انکا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ² - بہ² = ا² - ب² اور عہ بہ جیب سہ = اب

اس لئے اگر مزدوج قطروں کا ایک جوڑا دیا ہوا ہو اور ان کا درمیانی زاویہ بھی معلوم ہو تو بتاؤ کہ محوروں کے طول کسطرح معلوم کئے جائیں۔

۳۱- مشق ۳۰ میں اگر عہ = ۳، بہ = ۱، سہ = ۳۰° تو اعشاریہ کے دوسرے مقام تک ا اور ب کے طول معلوم کرو۔

۳۲- نقطہ ن (۱، ۱) زائد ۳ لا² - ۲ ما² = ۱ پر واقع ہے مزدوج قطروں ج ن اور ج ق کے طول اور انکا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

س ن اور سَ ن کی قیمتیں فی الحقیقت معلوم کرنے سے اسکی تصدیق کرو کہ

س ن × سَ ن = ج ق²

۱۶۹- مکافی کے متوازی وتر- مکافی کے متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو منحنی کے محور کے متوازی ہے۔ اس جگہ ہم عام نتیجہ کو استعمال کر سکتے ہیں لیکن ابتدا سے ہی عمل کرنا بہتر ہوگا۔

فرض کرو کہ محور قائم ہیں اور مکافی کی مساوات ما² = ۴ ا لا ہے۔ منحنی پر کے نقاط (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کو ملانے والے وتر کی مساوات ہوگی

(ما - ما۱) (ما - ما۲) = ما² - ۴ ا لا

یا ما (ما۱ + ما۲) - ۴ ا لا = ما۱ ما۲

اگر یہ وتر ما = م لا کے متوازی ہو تو

م = ۴ ا / (ما۱ + ما۲)

چونکہ ½ (ما۱ + ما۲) وتر کے نقطۂ تنصیف کا معین ہے اس لئے نقطۂ تنصیف

خط ما / ۲ ا = ۱ / م یا ما = ۲ ا / م

پر واقع ہے جس سے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

۱۷۰ - مکافی کا قطر۔ تعریف۔ ایسا خط جو مکافی کے محور کے متوازی ہو مکافی کا قطر کہلاتا ہے۔

مرکز دار تراشوں کے سب قطر ایک نقطہ میں آکر ملتے ہیں جسے تراش کا مرکز کہتے ہیں، لیکن یاد رہے کہ مکافی کے قطر سب ایکدوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ پس مشابہت کو قائم رکھنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ مکافی کے سب متوازی قطر لا انتہا فاصلے پر ایکدوسرے کو ایک نقطہ پر ملتے ہیں، اس نقطہ کو ہم مکافی کا مرکز خیال کر سکتے ہیں۔

۱۷۱ - مکافی کا قطر اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو اسکے سرے پر کے مماس کے متوازی ہوں۔

اس صورت میں ثبوت بالکل ویسا ہے جو ناقص کی صورت میں، اسے بطور مشق کے طالب علم کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔

مشقیں

۳۳۔ مکافی $ما^۲ = ۳ لا$ کی صورت میں اُس قطر کی مساوات معلوم کرو جو $ما = لا$ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے، اس کے سرے کے محدد بھی معلوم کرو۔

۳۴۔ مکافی $ما^۲ = ۴ لا + ۳$ میں وہ قطر معلوم کرو جو $۲ لا - ما = ۰$ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے، اس کے سرے کے محدد معلوم کرو اور اسکی تصدیق کرو کہ سرے پر کا مماس وتروں کے نظام کے متوازی ہے۔

۱۷۲ - مکافی کی مساوات جبکہ کوئی قطر اور اس کے سرے پر کا مماس حوالہ کے محور ہوں۔

فرض کرو کہ قطر محور و لا ہے اور مماس و ما۔

ہم معلوم کرتے ہیں کہ عام مساوات

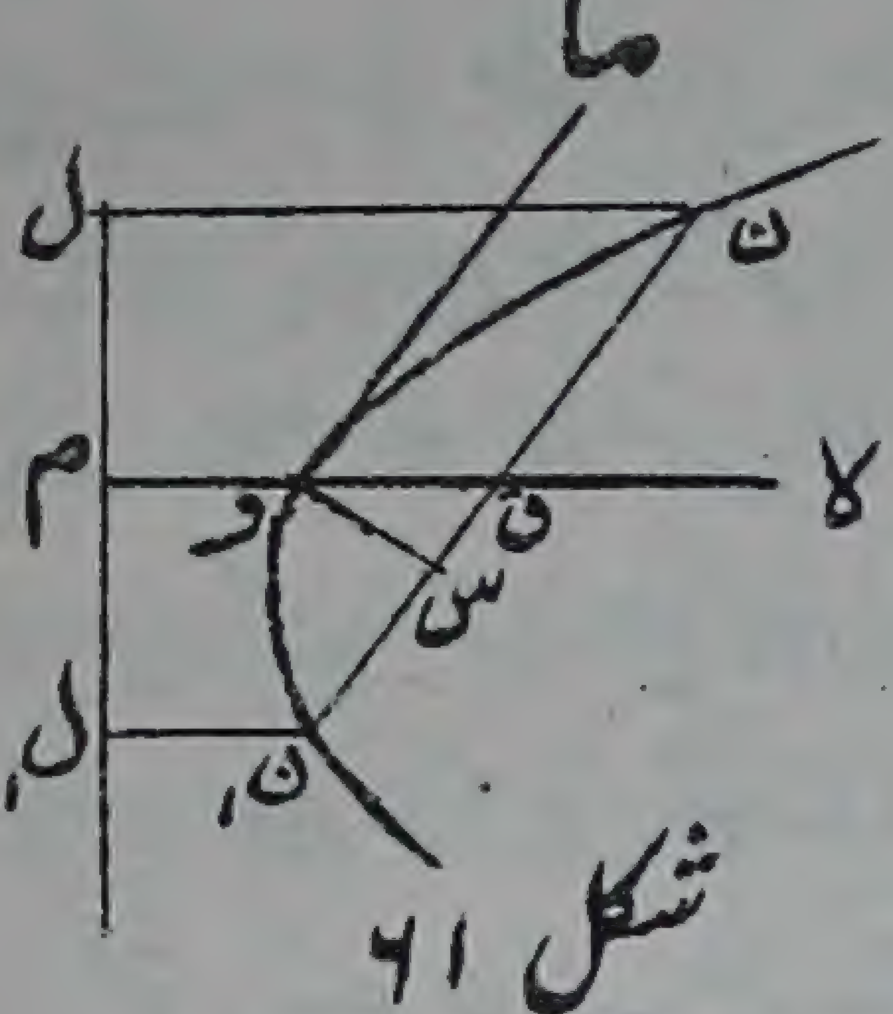
$$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

اس صورت میں کیا ہو جاتی ہے؟ امور ذیل توجہ طلب ہیں

ا- مبدأ منحنی پر واقع ہے

۲- لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہونی چاہئیں

۳- کوئی ایسا خط جو و لا کے متوازی ہو منحنی کو دو ایسے نقطوں پر کاٹتا ہے جن میں سے ایک نقطہ لا تناہی پر واقع ہوتا ہے [دفعہ ۹۴]



شکل ۶۱

(۱) کی رو سے ج = ۰

(۲) کی رو سے ھ = ۰ اور ف = ۰

اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

ا لا^2 + ب ما^2 + ۲گ لا = ۰

(۳) کی رو سے اگر ما = ۰ تو لا کی قیمتیں صفر اور ∞ ہونی چاہئیں۔

اس لئے ا = ۰ [ٹیوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۶]

پس مساوات ہو جاتی ہے ب ما^2 + ۲گ لا = ۰

جسے ہم صریحاً اس شکل میں لکھ سکتے ہیں ما^2 = ۴ اَ لا

(یہ امر کہ ا = ۰ اس سے بھی ظاہر ہے کہ درجہ دوم کی رقموں کو مربع کامل ہونا چاہیے اس لئے ا ب = ۰ اور ب ≠ ۰ کیونکہ اس صورت میں منحنی دو خطوط مستقیم کو تعبیر کریگا)

مساوات ما^2 = ۴ اَ لا میں یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ اَ نقطہ تماس کا ماسکی فاصلہ س و ہے۔

و ما کے متوازی ماسکی وتر ن ق س ن، کھینچو جو منحنی سے ن ن، پر اور محور لا سے ق پر ملے۔ ن ل ن، ل، مرتب پر عمود نکالو اور فرض کرو کہ و لا مرتب سے م پر ملتا ہے

تب ن ق^2 = ۴ اَ × و ق

لیکن ن ق = $\frac{1}{2}$ ن ن، = $\frac{1}{2}$(س ن + س ن،) = $\frac{1}{2}$(ن ل + ن، ل،)

= ق م = ۲ و م   [مشق ۱۱، دفعہ ۱۲۹ کی رو سے]

= ۲ س و

∴ ۴ س وَ = ۴ اَ × و ق = ۴ اَ × و م = ۴ اَ × س و

∴ اَ = س و

۱۷۳- دفعات ۱۶۰، ۱۶۸، ۱۷۲ کے نتائج کا مقابلہ اگر مرکز دار تراشوں کی ان مساواتوں کے ساتھ کیا جائے جبکہ اصلی محور حوالہ کے محور ہوں تو ظاہر ہے کہ مساواتیں

لا² / اَ² + ما² / ب² = ۱ ، لا² / اَ² − ما² / ب² = ۱ ، ما² = ۴ اَ لا

کی شکلیں دونوں صورتوں میں وہی ہیں، فی الحقیقت اصلی محور دفعات ۱۶۰، ۱۶۸ اور ۱۷۲ کے محاور کی خاص صورتیں ہیں مثلاً ناقص کے محور اعظم اور اصغر فی الحقیقت منحنی کے دو علی القوائم مزدوج قطر ہیں۔

مشق

۳۵- مکافی کے نقاط ن اور نَ پر کے مماس ایکدوسرے کو ت پر قطع کرتے ہیں، ن نَ کا وسطی نقطہ ص ہے، ت ص مکافی سے ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ت ق = ق ص

[ن نَ کے تنصیف کرنے والے قطر کو محور لا اور اس کے سرے پر کے مماس کو محور ما مانو۔ اس طرح مکافی کی مساوات ہوگی ما² = ۴ اَ لا، ق مبدأ ہے اور نقاط ن اور نَ ہیں بالترتیب (لا، ما) اور (لا، − ما)]

توضیحی مثالیں

(۱) مکافی کے ماسکی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ما² = ۴ اَ لا کے ایک وتر کے نقطۂ تنصیف کے محدد (لا، ما) ہیں، دفعہ ۱۵۲ کی رو سے وتر کی مساوات ہوگی

ما ما - ۲ اَ لا = ما² - ۲ اَ لا

اسے لازماً ماسکہ (ا، ۰) میں سے گذرنا چاہیے، اس لئے

$$\text{ما}^{۲} - ۲\,\text{ا}\,\text{لا} = -۲\,\text{ا}^{۲}$$

اس لئے طریق کی مساوات ہے $\text{ما}^{۲} = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} - \text{ا})$

پس طریق مطلوب مکافی ہے جس کا محور وہی ہے جو اصلی مکافی کا ہے لیکن اس کا راس (ا، ۰) ہے جو دیے ہوئے مکافی کا ماسکہ ہے، نیز اس کا وتر خاص ۲ ا ہے۔

(۲) مخروطی تراش $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ خط مستقیم $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ سے جو حصہ کاٹتی ہے اُس کا نقطۂ تنصیف معلوم کرو۔

ذیل کے طریقہ کا اطلاق عام صورتوں پر ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ خط اور منحنی کے نقاط تقاطع $(\text{لا}_{۱}، \text{ما}_{۱})$ اور $(\text{لا}_{۲}، \text{ما}_{۲})$ ہیں، ان نقطوں کے فصلے معلوم کرنے کے لئے ہم اوپر کی دو مساواتوں سے ما کو ساقط کرتے ہیں، اس طرح ہمیں ذیل کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے

$$\frac{(\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} = ۱$$

یا

$$\text{لا}^{۲}\left(\frac{۱}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right) + \frac{۲\,\text{م}\,\text{ج}}{\text{ب}^{۲}}\,\text{لا} + \frac{\text{ج}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱ = ۰$$

اس لئے $\text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۲} = -\frac{۲\,\text{م}\,\text{ج}}{\text{ب}^{۲}} \Big/ \left(\frac{۱}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right)$

لیکن اگر نقطۂ تنصیف کے محدد (ع، ب) ہوں تو

$$\text{ع} = \frac{\text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۲}}{۲} = -\frac{\text{م}\,\text{ج}}{\text{ب}^{۲}} \Big/ \left(\frac{۱}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right)$$

$$\text{ب} = \text{م}\,\text{ع} + \text{ج} = -\frac{\text{م}^{۲}\,\text{ج}}{\text{ب}^{۲}} \Big/ \left(\frac{۱}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right) + \text{ج}$$

چونکہ نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ع}}$ کا انحصار ج پر نہیں ہے، اس سے اس امر کا ایک اور ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ متوازی وتروں کے نقاطِ تنصیف کا طریق

ایک قطر ہے۔

(۳) ناقص کا ایک مماس مرتب دائرہ سے ن اور ق پر ملتا ہے
اگر ج مرکز ہو تو ثابت کرو کہ ج ن، ج ق مخروطی کے مزدوج قطر ہیں

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات ہے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots (1)$

مرتب دائرہ کی مساوات ہوگی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 \quad \ldots (2)$

$(\text{لا}'، \text{ما}')$ پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا}\,\text{لا}'}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}'}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots (3)$

چونکہ ج مبدأ ہے اسلئے ج ن، ج ق کی مساوات (۲) اور (۳) کو
اسطرح ملانے سے حاصل ہوگی کہ مساوات متصلہ لا، ما میں متجانس ہو جائے۔

یہ متجانس مساوات ہوگی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\left(\frac{\text{لا}\,\text{لا}'}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}'}{\text{ب}^2}\right)^2$

یا $\text{لا}^2\left\{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)\frac{\text{لا}'^2}{\text{ا}^4} - 1\right\} + 2\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{لا}'\text{ما}'}{\text{ا}^2\text{ب}^2}(\text{ا}^2+\text{ب}^2) + \text{ما}^2\left\{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)\frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}^4} - 1\right\} = 0$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\text{ما} - \text{م}\,\text{لا} = 0$ اور $\text{ما} - \text{م}'\,\text{لا} = 0$ باہم مزدوج ہونگے
اگر $\text{م}\,\text{م}' = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

اور $\text{م}\,\text{م}' = -\frac{\text{لا}^2 \text{ کا سر}}{\text{ما}^2 \text{ کا سر}}$ مساوات بالا میں اسلئے یہ خطوط
مزدوج قطر ہونگے اگر

$$\frac{1}{\text{ا}^2}\left\{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)\frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}^4} - 1\right\} + \frac{1}{\text{ب}^2}\left\{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)\frac{\text{لا}'^2}{\text{ا}^4} - 1\right\} = 0$$

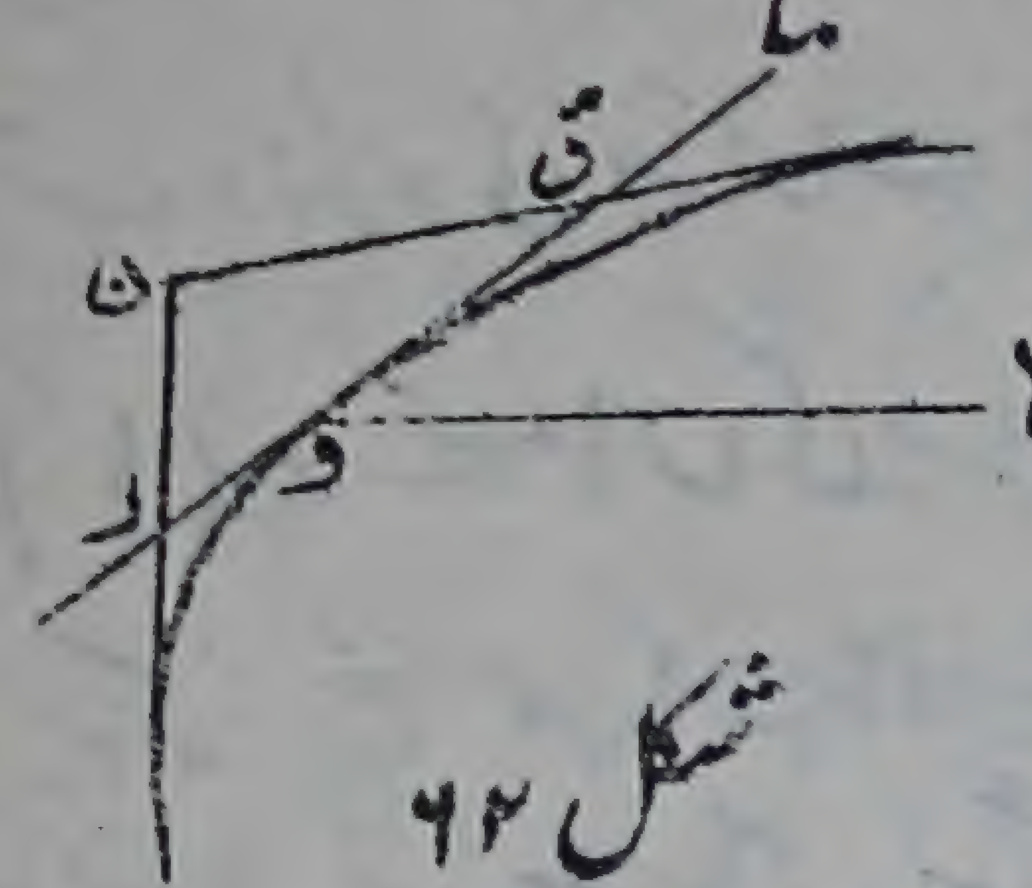
یعنی اگر $\left(\frac{\text{لا}'^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}^2}\right)\frac{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{\text{ا}^2\text{ب}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}$

اور یہ شرط پوری ہوتی ہے کیونکہ $(\text{لا}'، \text{ما}')$ مخروطی پر واقع ہے۔

(۴) مکافی کے دو مماس ایک ثابت نقطہ و پر کے مماس سے

ق اور ر پر ملتے ہیں اور و ق × و ر ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔ مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

و میں سے گذرنیوالے قطر اور و پر کے مماس کو محور مانو، اسطرح مکانی کی مساوات ہوگی $با^۲ = ۴ ا لا$



شکل ۶۲

فرض کرو کہ نقطہ ن مطلوبہ طریق پر ہے،

تبب و ق × و ر = مستقل = ک۲ (فرض کرو)

فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں۔

نقطہ (لا، ما) سے منحنی کے مماسات کی مساوات ہے،

$\{ما ما - ۲ ا (لا + لا)\}^۲ = (ما^۲ - ۴ ا لا) (ما^۲ - ۴ ا لا)$

اُن نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے جہاں یہ مماس ثابت مماس سے ملتے ہیں ہمیں لا = ۰ رکھنا چاہیئے، اسطرح ہم دیکھتے ہیں کہ و ق اور و ر ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلیں ہیں

$(ما ما - ۲ ا لا)^۲ = ما^۲ (ما^۲ - ۴ ا لا)$

یا $ما^۲ × ۴ ا لا - ۴ ا لا ما × ما + ۴ ا^۲ لا^۲ = ۰$

$\therefore$ و ق × و ر = $\frac{۴ ا^۲ لا^۲}{۴ ا لا}$ = ا لا

لیکن و ق × و ر = ک۲

اس لئے طریق مطلوب ہے ا لا = ک۲ یا آخری ہندسہ کو حذف کرنے سے ا لا = ک۲ جو ایک خط مستقیم ہے اور ثابت مماس کے متوازی ہے۔

باب سیزدہم پر متفرق مشقیں

۲۶۔ مخروطی $لا^۲ + لا ما + ما^۲ + ۲ لا = ۰$ کے اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو جو لا = ما کے متوازی ہوں۔

۲۷۔ کسی طرح سے ثابت کرو کہ مخروطی

$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$

سے اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو محور لا کے متوازی ہوں
ا لا + ھ ما + گ = ۰ ہے۔

۳۸۔ ایک زائد کی مساوات لا ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ہے
اسکے متقاربوں اور اسکے مزدوج زائد کی مساواتیں معلوم کرو۔

۳۹۔ اگر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے ماسکوں سے ن پر کے
ماس پر عمود س ما اور سَ ماَ کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ
س ما × سَ ماَ = ب^2 اور س ن × سَ ن = ج قَ^{2}
جہاں ج قَ، ج ن کا مزدوج نیم قطر ہے۔

۴۰۔ نقطہ و (لاَ، ماَ) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$
سے نقاط ن اور ق پر ملتا ہے۔ اگر ن ق کا نقطۂ تنصیف ر
ہو اور یہ خط و لا کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{و ر} = -\left(\frac{\text{لاَ جم طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ماَ جب طہ}}{\text{ب}^2}\right) \Big/ \left(\frac{\text{جم}^2\text{ طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{ طہ}}{\text{ب}^2}\right)$$

ر کے محدد حاصل کرو

۴۱۔ اسکے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ خطوط ا لا + ب ما + ج = ۰، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰
ناقص ۴ لا^2 + ۹ ما^2 = ۳۶ کے دو مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ مخروطی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
کے وہ نقطے جن پر کے ماس ما = م لا کے متوازی ہیں قطر
(ا لا + ھ ما + گ) + م (ھ لا + ب ما + ف) = ۰ کے سرے ہیں۔

۴۳۔ ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ
۶۰° ہے ثابت کرو کہ منحنی کا خروج المرکز $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ $\sqrt{۲}$ ہے۔

۴۴۔ ناقص کے ایک ماسکہ سے ایک مزدوج قطر پر اور دوسرے
ماسکہ سے دوسرے قطر پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ عمودوں کے نقطۂ
تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۴۵- منحنی لا ما = ب لا + ا ما کو مرتسم کرو اور اس کے اُن وتروں کے نقاطِ تنصیف کا طریق معلوم کرو جو ا ما = لا کے متوازی ہوں۔

۴۶- مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کے ماسکی وتر کے نقطۂ تنصیف کا طریق معلوم کرو۔

۴۷- اسکی شرط معلوم کرو کہ ما = م لا اور ما = م′ لا مخروطی

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔

۴۸- منحنی ا لا^{2} + ۲ ب لا ما + ج ما^{2} = ۱ میں اُن خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو محاور لا اور ما کے بالترتیب مزدوج ہوں، اگر یہ خط ایکدوسرے پر منطبق ہوں تو اس کے لئے ضروری شرائط معلوم کرو اور انکی ہندسی تعبیر لکھو۔

۴۹- مائل محوروں کے لحاظ سے جن کا درمیانی زاویہ سمہ ہو مساواتوں لا^{2} ± ما^{2} = ا^{2} کو تعبیر کرو اور نصف محوروں کے طول معلوم کرو۔

۵۰- اگر محور مائل ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات ما^{2} = ۲ ج لا - ک لا^{2} قطع ناقص، مکافی، زائد کو تعبیر کرتی ہے اگر ک بالترتیب مثبت، صفر یا منفی ہو۔ نیز ثابت کرو کہ محور لا منحنی کا قطر ہے اور محور ما اس کے راس پر کا مماس ہے۔

۵۱- ایک متغیر نقطہ ن سے ایک مخروطی کے مماس کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت نقطہ ا میں سے گذرنیوالے مماس کو ق اور ر پر قطع کرتے ہیں جہاں ا ق × ا ر ہمیشہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو ا پر کے مماس کے متوازی ہے۔

۵۲- ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا ایک جوڑا ن ج ن′ اور ق ج ق′ ہے، اگر ن ق کا نقطۂ تنصیف ص ہو تو ص کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ن ق ن′ ق′ کا رقبہ مستقل ہے۔

۵۳- اگر ایک مرکزدار مخروطی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ع ع′ محور اعظم کے

سرے ہوں تو ثابت کرو کہ ن ع اور ن عَ مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

کیا یہی خاصیت ن ص اور ن صَ کیلئے بھی درست ہوگی؟

۵۴۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ق سے ایک قطر ن ج نَ کے سروں تک وتر کھینچے گئے ہیں جو مزدوج قطر ق ج قَ سے ل اور م پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ج ل × ج م = ج قَ^{2}

۵۵۔ کئی ایسے متوازی الاضلاع ایک ناقص کے اندر بنائے گئے ہیں جن کے ضلعے ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں ثابت کرو کہ اِن سب متوازی الاضلاعوں کے لئے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۵۶۔ اگر دو مخروطی تراشوں میں سے ایک کے متقارب دوسری کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ دوسری کے متقارب پہلی تراش کے مزدوج قطروں کے متوازی ہونگے۔

۵۷۔ مخروطی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے اُن تمام وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو جو مبدأ میں سے گذرتے ہوں۔

۵۸۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = م لا زائد لا ما = ک^2 کے اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ما = − م لا کے متوازی ہوں۔

۵۹۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم

(ھَ ا − ھ اَ) لا^2 + (ا بَ − اَ ب) لا ما + (ھ بَ − ھَ ب) ما^2 = ۰

مخروطی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ کے اور نیز اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۱ کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

[دیکھو مشق ۱۳، دفعہ ۱۵۷]

۶۰۔ ناقص کے کسی ایک محور کے متوازی ایک ثابت خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ناقص کے مزدوج قطروں سے ک اور ل پر ملتا ہے ثابت کرو کہ اگر ک ل کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو یہ دوسرے محور پر کے

دو ثابت نقطوں میں سے گذریگا۔

۶۱- اگر ناقص کے محور اعظم کے سروں پر مماس کھینچے جائیں اور ناقص کے کوئی دو مزدوج نیمقطر ان مماسات سے ق اور ر پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق ر ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۱- اگر ناقص کے محور اعظم کے سروں پر مماس کھینچے جائیں اور ناقص کے کوئی دو مزدوج نیمقطر ان مماسات سے ق اور ر پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق ر ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۲- ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکافی کے کئی وتر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان سب کے وسطی نقطے ایک ایسے مکافی پر واقع ہوتے ہیں جس کا وتر خاص دئے ہوئے مکافی کے وتر خاص کا نصف ہے۔

۶۳- ما = م لا کے متوازی قطع ناقص کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہے اور اس نظام کا ایک وتر ل م ہے اگر ل م پر ایک نقطہ ن ایسا لیا جائے کہ ل ن : ن م = ۱ : ۳ تو ن کا طریق ایک ہم مرکز قطع ناقص ہوگا۔

باب چہاردہم

مخروطی تراشوں کے عماد

[اس باب میں شروع سے آخر تک محددوں کے محور قائم فرض کئے جائینگے]

۱۷۴- عماد- تعریف- مخروطی کے کسی نقطہ پر کا **عماد** وہ خط مستقیم ہے جو اس نقطہ میں سے گذرنیوالے مماس پر اس نقطہ میں سے عمود کھینچا جائے۔
عماد کی یہ تعریف ہر منحنی کے لئے درست ہے مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ خط مستقیم کے کسی نقطہ پر کا عماد ایک خط ہے جو اس نقطہ میں سے مفروضہ خط مستقیم پر عمود ہو اور ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گذرنیوالا نصف قطر ہے۔

۱۷۵- مخروطی ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
کے نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو
نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات ہے

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰ [دفعہ ۱۲۷]

اب جس خط کی مساوات

لا / (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) − ما / (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) = ک

ہے وہ ک کی تمام قیمتوں کے لئے مماس پر عمود ہے [حصہ اول، دفعہ ۱۹]
اگر یہ خط (لا۱، ما۱) میں سے گذرے تو لازماً

لا۱ / (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) − ما۱ / (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) = ک۱

پس شرط مطلوبہ ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ھ}\,\text{ما}_1 + \text{گ}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ھ}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ف}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جسے ہم فوراً لکھ سکتے تھے۔

۱۷۶۔ خاص صورتیں

طالب علم ذیل کے نتائج کو ابتدائی اصولوں سے حاصل کرے۔

(۱) مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$

عماد $۲\,\text{ا}\,(\text{ما} - \text{ما}_1) + \text{ما}_1(\text{لا} - \text{لا}_1) = ۰$

(۲) ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$، عماد $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}$

(۳) زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$، عماد $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}} = -\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}$

۱۷۷۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے عماد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1/\text{ا}^2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1/\text{ب}^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ا}^2\,\text{لا}}{\text{لا}_1} - \text{ا}^2 = \frac{\text{ب}^2\,\text{ما}}{\text{ما}_1} - \text{ب}^2$$

یعنی

$$\frac{\text{ا}^2\,\text{لا}}{\text{لا}_1} - \frac{\text{ب}^2\,\text{ما}}{\text{ما}_1} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots (۲)$$

اس شکل میں اسے یاد رکھنا چاہئے، اسی طرح زائد کے عماد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ا}^2\,\text{لا}}{\text{لا}_1} + \frac{\text{ب}^2\,\text{ما}}{\text{ما}_1} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots (۳)$$

مثال۔ نقطہ (۱، ۲) مخروطی $\text{لا}^2 + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2 + \text{لا} + \text{ما} = ۱۰$ پر واقع ہے، اس نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔

$(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی عام مساوات ہے

$$\text{لا}(\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ھ}\,\text{ما}_1 + \text{گ}) + \text{ما}(\text{ھ}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ف}) + \text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰$$

اس صورت میں یہ ہو جائیگی

لا (لا$_1$ + $\frac{1}{2}$ ما$_1$ + $\frac{1}{2}$) + ما ($\frac{1}{2}$ لا$_1$ + ما$_1$ + $\frac{1}{2}$) + $\frac{1}{2}$ لا$_1$ + $\frac{1}{2}$ ما$_1$ − ۱۰ = ۰

یا لا (۲ لا$_1$ + ما$_1$ + ۱) + ما (لا$_1$ + ۲ ما$_1$ + ۱) + لا$_1$ + ما$_1$ − ۲۰ = ۰

۵ لا + ۶ ما − ۱۷ = ۰

یعنی (۱، ۲) پر کا مماس ہے

۶ (لا − ۱) − ۵ (ما − ۲) = ۰

اس لئے مطلوبہ عماد ہے

۶ لا − ۵ ما + ۴ = ۰

یا

اپنے نتیجہ کی صحت جانچنے کے لئے طالب علم کو ہمیشہ اس امر کی تصدیق کرنی چاہئے کہ عماد فی الحقیقت نقطۂ مفروضہ میں سے گذرتا ہے یا نہیں۔

مشقیں

۱۔ مخروطی لا^2 + ۲ ما^2 + لا + ما = ۵ کے نقطہ (۱، ۱) پر جو عماد کھینچ سکتا ہے اُس کی مساوات معلوم کرو۔

۲۔ مخروطی ۲ لا^2 + ۶ لا ما + ۹ ما^2 + لا + ما = $\frac{1}{4}$ کے نقطہ ($\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$) پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ مخروطی تراش ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما = ۰ مبدأ میں سے گذرتی ہے اور مبدأ پر کا عماد ف ما − گ لا = ۰ ہے۔

۴۔ مخروطی ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 = ۱ کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ عماد مبدأ میں سے گذرتا ہے اور اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۵۔ اگر ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد س س′ سے گ پر ملے اور ن سے س س′ پر عمود ن ل کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ

ج گ = ز^2 × ج ل

۶۔ ن پر کا عماد ن کے ماسکی فاصلوں کے داخلی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ج گ = ز^2 × ج ل زائد کے لئے بھی درست ہے لیکن اس صورت میں عماد ماسکی فاصلوں کے خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۸۔ اگر مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملے اور ن ل معین ہو تو زیر عماد ل گ مستقل ہوگا۔

۹- اگر مکافی کے کسی نقطہ پر مماس اور عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ محور سے ایسے دو نقاط پر ملینگے جو ماسکہ سے متساوی الفصل ہوں۔

۱۰- مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے نقطہ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ پر کا عماد منحنی سے دوبارہ ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کے محدد $\frac{(\text{ما}_1^2 + 8\,\text{ا}^2)^2}{4\,\text{ا}\,\text{ما}_1^2}$ ، $-\frac{(\text{ما}_1^2 + 8\,\text{ا}^2)}{\text{ما}_1}$ ہیں

[مساوات (۱) میں لا اور لا_1 کی بجائے $\frac{\text{ما}^2}{4\,\text{ا}}$ اور $\frac{\text{ما}_1^2}{4\,\text{ا}}$ رکھو]

۱۱- اگر مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے نقطہ ن $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ پر کا عماد منحنی سے دوبارہ ق پر ملے تو ن ق کا طول معلوم کرو۔

۱۲- اگر ناقص کے وتر خاص کے ایک سرے پر کا عماد محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرے تو $\text{ا}^2 + \text{ا}\,\text{ب} - \text{ب}^2 = 0$۔
اس سے حاصل کرو کہ خروج المرکز ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے
$$\text{ز}^4 + \text{ز}^2 - 1 = 0$$

۱۳- اگر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے نقطہ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ پر کا عماد محور لا سے حادہ زاویہ ط بنائے اور اس نقطہ پر کے مماس پر مرکز سے جو عمود کھینچا جائے اس کا طول د ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط} = \frac{\text{د}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} \text{ ، } \text{جب ط} = \frac{\text{د}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2}$$

عماد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1/\text{ا}^2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1/\text{ب}^2}$$

اس کا خط کی شکل ذیل کے ساتھ مقابلہ کرنے سے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{جب ط}}$$ [حصۂ اول، دفعہ ۱۰، ب]

حاصل ہوتا ہے $\dfrac{\text{جم طہ}}{\text{لا}_1/\text{ا}^2} = \dfrac{\text{جب طہ}}{\text{ما}_1/\text{ب}^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{لا}_1^2/\text{ا}^4 + \text{ما}_1^2/\text{ب}^4}}$

اس لئے جم طہ $= \dfrac{\dfrac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}}{\sqrt{\dfrac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \dfrac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4}}}$ اور جب طہ $= \dfrac{\dfrac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}{\sqrt{\dfrac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \dfrac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4}}}$

اب چونکہ (لا۱، ما۱) پر کا مماس ہے $\dfrac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \dfrac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$

اس لئے $\text{د} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \dfrac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4}}}$

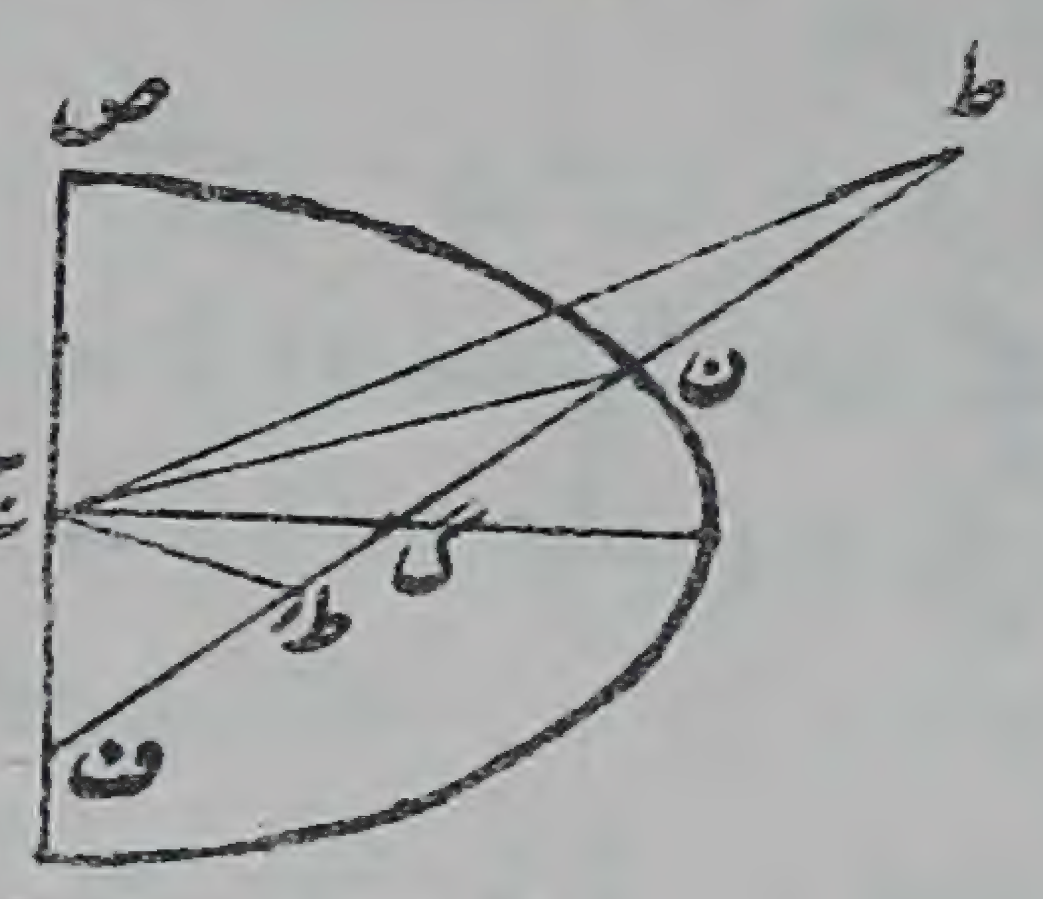
چونکہ طہ جادہ ہے اسلئے جم طہ $= \dfrac{\text{د لا}_1}{\text{ا}^2}$ اور جب طہ $= \dfrac{\text{د ما}_1}{\text{ب}^2}$ ....(۲)

اسی طرح زائد $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے لئے

جم طہ $= \dfrac{\text{د لا}_1}{\text{ا}^2}$ ، جب طہ $= -\dfrac{\text{د ما}_1}{\text{ب}^2}$

طالب علم اس کی بآسانی تصدیق کرسکتا ہے۔

۱۷۹- جب طہ اور جم طہ کے لئے جو ضابطے اوپر معلوم کئے گئے ہیں ان سے کئی نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔



شکل ۶۳

(۱) اگر ن پر کا عماد محاور سے گ اور ف پر ملے تو

$\text{ن گ} = \dfrac{\text{ب}^2}{\text{د}}$ ، $\text{ن ف} = \dfrac{\text{ا}^2}{\text{د}}$

عماد پر کے ایک ایسے نقطہ کے محدد جو نقطہ ن سے فاصلہ ر پر اندر کی طرف واقع ہو یہ ہونگے

لا۱ − ر جم طہ ، ما۱ − ر جب طہ

اور یہ حسب دفعہ ۱۷۸ ہیں

$$لا - ر\frac{د\,لا}{ا^2}،\quad ما - ر\frac{د\,ما}{ب^2}$$

اگر ر = ن گ تو دوسرا محدد صفر ہونا چاہیئے' اس لئے

$$\frac{ر\,د}{ب^2} = ۱ \quad یا \quad ر = \frac{ب^2}{د}$$

اگر ر = ن ھ تو پہلا صفر ہونا چاہیئے' اس لئے

$$\frac{ر\,د}{ا^2} = ۱ \quad یا \quad ر = \frac{ا^2}{د}$$

(۲) اگر ہم نقطہ ن (لا' ما) سے ج ق کے مساوی طول ن ط اور ن طَ عماد پر باہر اور اندر کیطرف ناپیں جہاں ج ق' ج ن کا مزدوج نیمقطر ہے تو

$$ج\,ط = ا + ب ،\quad ج\,طَ = ا - ب$$

اور ج ط' ج طَ محوروں سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ نقطہ ط (لہ' مہ) ہے اور طَ (لَہ' مَہ)' تب اگر ج ق = س تو

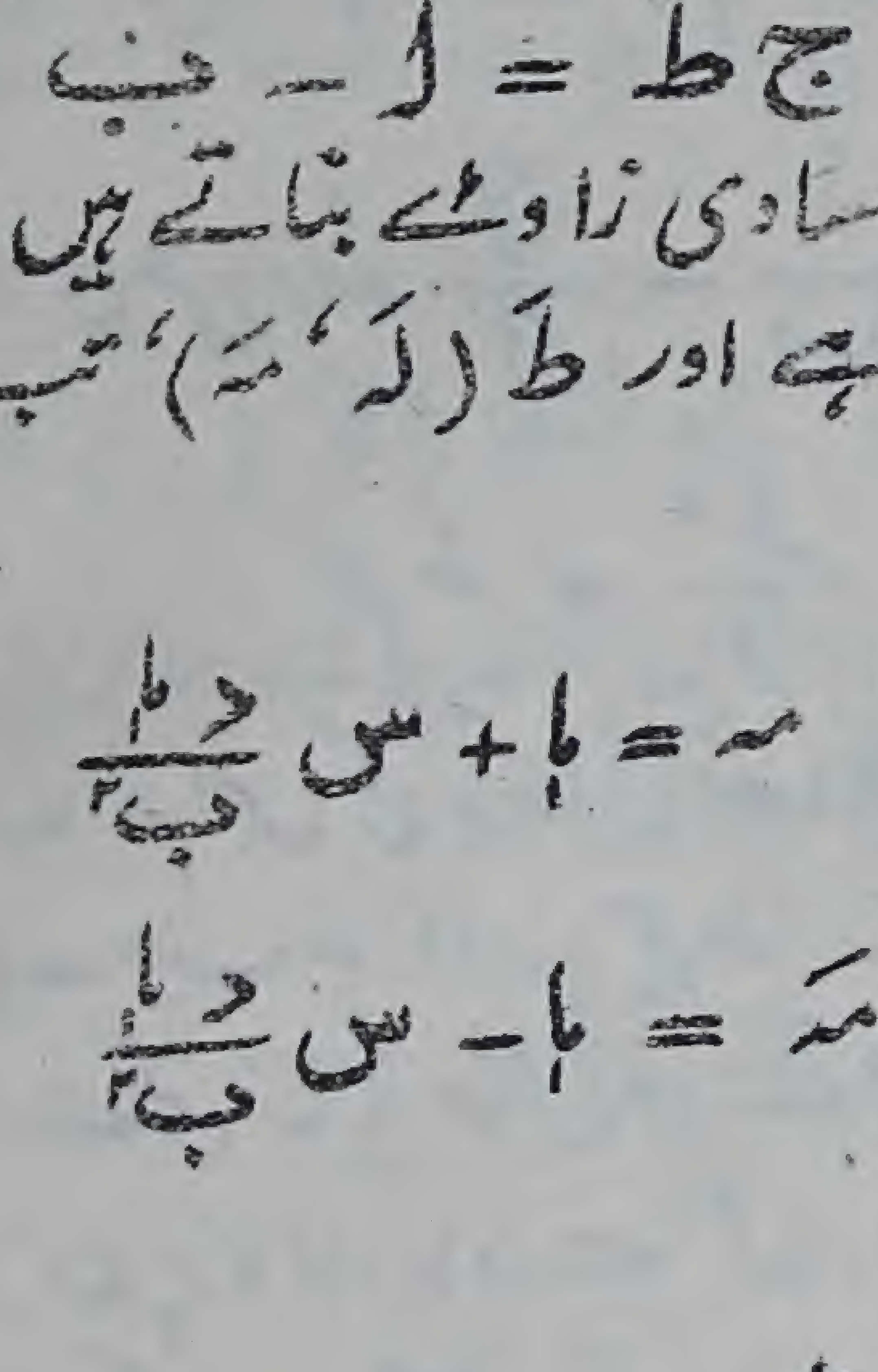
$$لہ = لا + س\frac{د\,لا}{ا^2}،\quad مہ = ما + س\frac{د\,ما}{ب^2}$$

$$لَہ = لا - س\frac{د\,لا}{ا^2}،\quad مَہ = ما - س\frac{د\,ما}{ب^2}$$

لیکن د س = ا ب

$$لہ = لا\left(۱ + \frac{ب}{ا}\right) = \frac{لا}{ا}(ا + ب)$$

$$مہ = ما\left(۱ + \frac{ا}{ب}\right) = \frac{ما}{ب}(ا + ب)$$



اسیطرح سے

$$لَہ = \frac{لا}{ا}(ا - ب)$$

$$مَہ = -\frac{ما}{ب}(ا - ب)$$

شکل ۶۴

اس لئے $ج ط^2 = ل^2 + م^2$

$= (ا + ب)^2 \left\{ \frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} \right\} = (ا + ب)^2$

$\therefore$ ج ط = ا + ب، اسیطرح ج طَ = ا − ب

اور چونکہ $\frac{م}{ل} = -\frac{مَ}{لَ}$

اس لئے خطوط ج طَ، ج ط محاور سے مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

(۳) ناقص کے دو مزدوج قطر بلحاظ مقدار اور محل کے معلوم ہیں، ناقص کے محور کھینچو۔

فرض کرو کہ ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہیں۔

چونکہ ن پر کا عماد ج ق پر عمود ہے (دفعہ ۱۵۰) اس لئے ہم ط اور طَ کے مقام بآسانی معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ

ن ط = ن طَ = ج ق

اب (۲) کی رو سے ناقص کے محور ج ط اور ج طَ کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف ہیں اور

۲ا = ج ط + ج طَ، ۲ب = ج ط − ج طَ

زائد کی صورت میں جب ط اور جم ط کے لئے جو متناظر ضابطے حاصل کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے سے بعینہٖ ایسے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں، یہ مشق کے طور پر طالب علم کے لئے چھوڑے گئے ہیں۔

۱۸۰۔ ثابت کرو کہ ایک نقطۂ معلومہ سے مکافی کے تین عماد کھینچ سکتے ہیں۔

نقطہ (لا'، ما') پر کے عماد کی مساوات ہے

$۲ا ما + لا ما' = لا' ما' + ۲ا ما'$

یا چونکہ $لا' = \frac{ما'^2}{۴ا}$ اس لئے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$۲ا ما + لا ما' = \frac{ما'^3}{۴ا} + ۲ا ما'$

اگر عماد نقطہ (ف، گ) میں سے گذرے تو

$۲ا گ + ف ما' = \frac{ما'^3}{۴ا} + ۲ا ما'$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{ما}^3}{4\text{ا}} + \text{ما}\,(2\text{ا} - \text{فت}) - 2\,\text{ا}\,\text{گ} = 0$$

جو ما میں درجہ سوم کی مساوات ہے، اس مساوات کی تین اصلیں ہیں (ٹیوٹوریل الجبرا، دوم، دفعہ ۳۷۱) اور ہر اصل کے لئے منحنی پر ایک نقطہ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ منحنی پر تین ایسے نقطے ہیں کہ ان پر کے عماد ایک نقطۂ معلومہ میں سے گذرتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۔ اگر مکافی کے تین نقطوں پر کے عماد ایک ہی نقطہ میں سے گذریں تو انکے معینوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

اوپر کی مساوات میں رقم ما^2 موجود نہیں، اس لئے اصلوں کا مجموعہ صفر ہے (ٹیوٹوریل الجبرا، دوم، دفعہ ۳۷۴)

مشقیں

۱۳۔ ناقص $\text{لا}^2 + 3\,\text{ما}^2 = 4$ کے نقطہ (۱، ۱) پر کا عماد محور اعظم سے زاویہ عہ بناتا ہے، جم عہ اور جب عہ کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۴۔ $\text{لا}^2 + 4\,\text{ما}^2 = 2$ کے نقطہ $(1, \frac{1}{2})$ پر کا عماد جو زاویہ محور اعظم سے بناتا ہے اس کی جیب اور جیب التمام معلوم کرو۔

۱۵۔ قائم زائد کا ایک وتر جس کے محاذی ایک نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے اُس نقطہ پر کے عماد کے متوازی ہے۔

۱۶۔ مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{لا}$ پر کے اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ $(\frac{15}{4}, -\frac{3}{4})$ میں سے گذریں اور ایک شکل میں ان تین متراکز عمادوں کو دکھاؤ۔

[ما کے لئے کعبی مساوات حاصل کرو اور دیکھو کہ اس کی ایک اصل ایک ہے باقی دو اصلیں مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں]

۱۷۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو

جن پر کے عماد محور لا سے ۴۵° کا زاویہ بنائیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ سے مکافی کا کم از کم ایک حقیقی عماد کھنچ سکتا ہے

[تیسرے درجہ کی مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے]

۱۸۱۔ مکافی کے عماد کی مساوات شکل ما = م لا + ج میں۔

اب ہم مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کے عماد کی مساوات اُس زاویہ کے مماس کی رقوم میں معلوم کریں گے جو عماد محور لا سے بناتا ہے۔

عماد کی مساوات اس شکل کی ہے　ما = م لا + ج

چونکہ یہ نقطہ (لاَ، ماَ) پر کا عماد ہے، اس لئے

ماَ = م لاَ + ج

یہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس　ما ماَ = ۲ ا (لا + لاَ)　پر عمود ہے

اسلئے　م = − ماَ/۲ا　یا　ماَ = − ۲ ا م

اور لاَ = ماَ^۲/۴ا = ا م^۲

∴ ج = ماَ − م لاَ = − ۲ ا م − ا م^۳

اسلئے عماد کی مساوات ہے

ما = م لا − ۲ ا م − ا م^۳ .... (۵)

مشقیں

۱۹۔ ثابت کرو کہ مکافی کے کسی نقطہ پر کے عماد کا وہ حصہ جو منحنی اور محور کے درمیان کٹے اُس معین کے مساوی ہے جو زیر عماد کے نقطۂ تنصیف میں سے کھینچا جائے۔

۲۰۔ ما^۲ = ۴ ا لا کے اُن عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور لا سے بالترتیب زاویے (۱) ۳۰° (۲) ۴۵° (۳) ۱۲۰° بنائیں۔

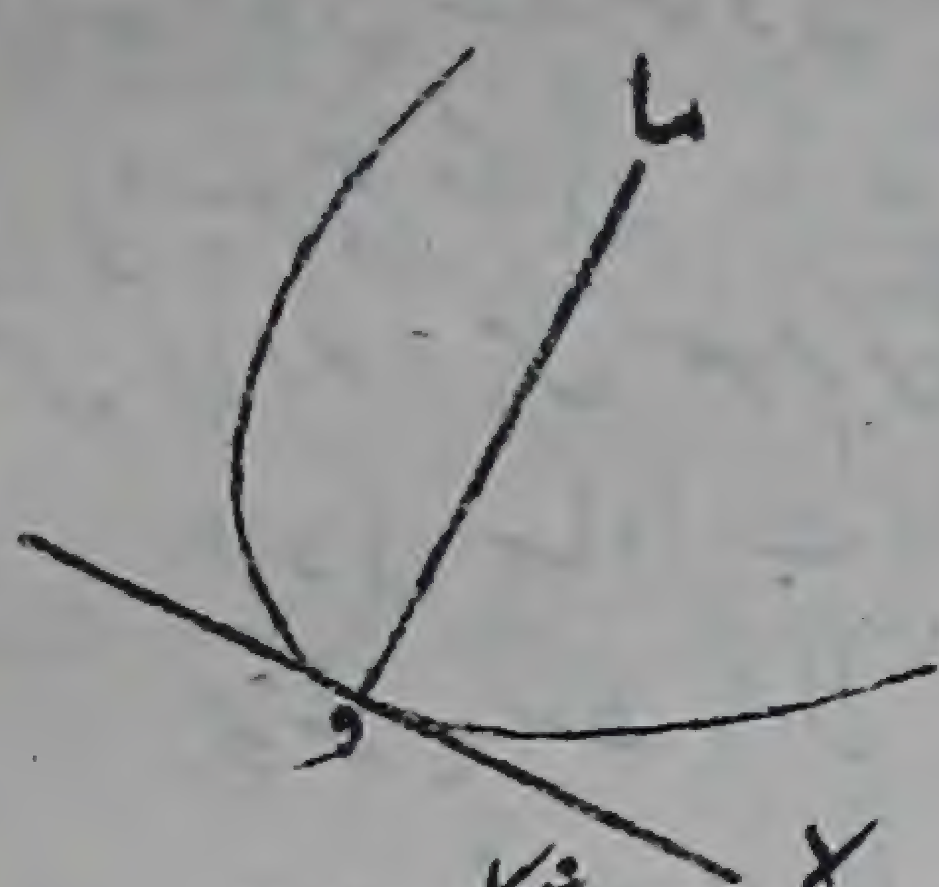
۲۱۔ ما^۲ = ۴ ا (لا − ا) کے اُس عماد کی مساوات معلوم کرو جو محور سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔

[مبدأ کو نقطہ (ا، ۰) پر لیجاؤ اور پھر ابتدائی نقطہ پر واپس لے آؤ]

۲۲- عمادی مساوات ما = م لا − ۲ ا م − ا م^3 سے دفعہ ۱۸۰ کے نتائج حاصل کرو۔

۱۸۲- مخروطی کی مساوات جبکہ کسی نقطہ پر کا مماس اور عماد حوالہ کے محور ہوں۔

فرض کرو کہ نقطہ و پر کا مماس محور لا ہے اور عماد محور ما۔



شکل ٦٥

عام مخروطی کی مساوات اس شکل کی ہے

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰۔

لیکن چونکہ محور لا (ما = ۰) منحنی سے ایسے دو نقاط پر ملتا ہے جو مبدأ پر منطبق ہوتے ہیں اس لئے مساوات ا لا^2 + ۲ گ لا + ج = ۰ کی دونوں اصلیں صفر ہونی چاہئیں۔

اس لئے گ = ۰ اور ج = ۰

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ ف ما = ۰ ...... (٦)

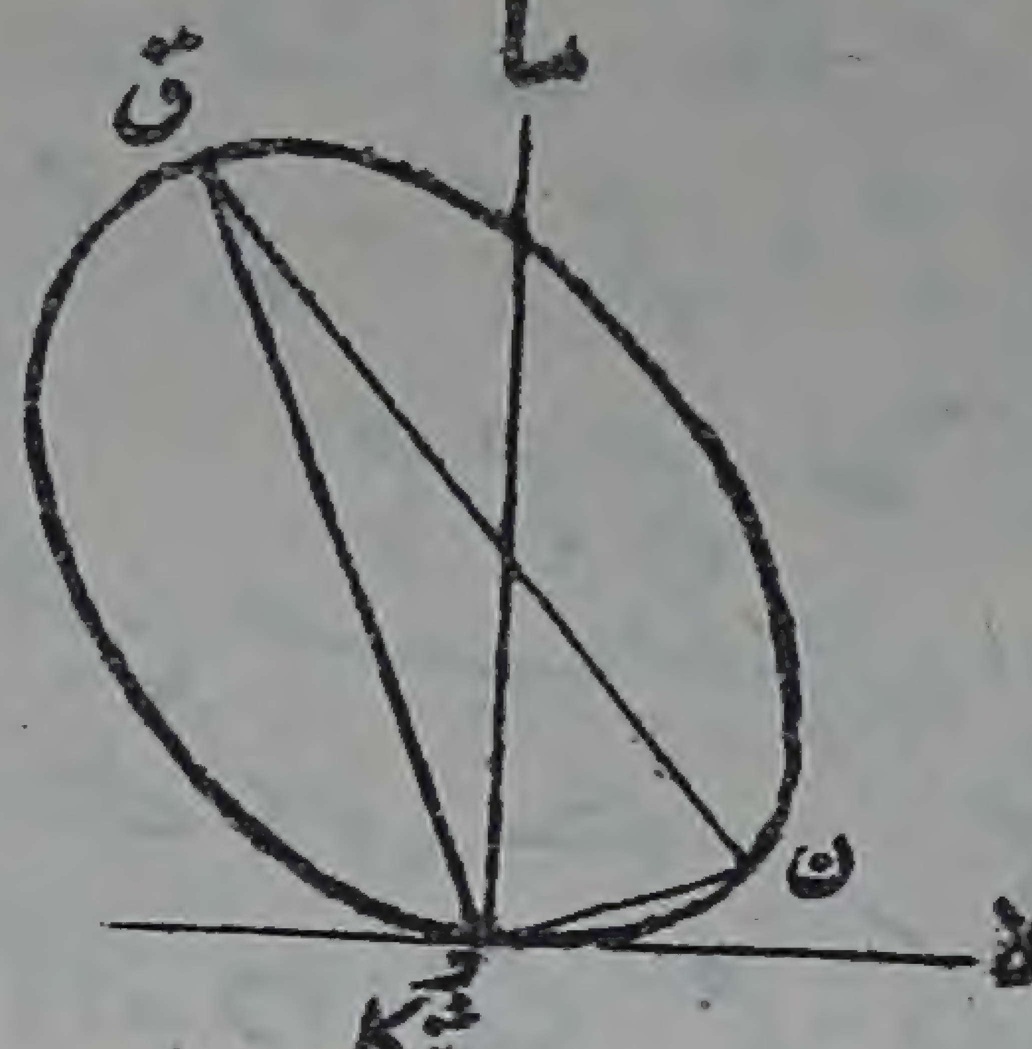
مساوات کی یہ شکل اکثر کارآمد ہوتی ہے صریحاً ایک فائدہ تو یہ ہے کہ محور قائم ہیں۔ مخروطیوں کی کئی خاصیتیں ان محوروں کو استعمال کرنے سے بآسانی حاصل ہوسکتی ہیں مثلاً ملاحظہ ہوں ذیل کی مثالیں۔

توضیحی مثالیں

(۱) مخروطی کے جن وتروں کے محاذی منحنی کے ایک ثابت نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے وہ سب کے سب اس نقطہ میں سے گذرنیوالے عماد کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

صریحاً اس صورت میں ہمیں ثابت نقطہ پر کے مماس اور عماد کو حوالہ کے محور فرض کرنا چاہیئے۔

فرض کرو کہ مخروطی ہے ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ ف ما = ۰۔



شکل ۹۶

اور ایک وتر ہے　$\text{ل لا} + \text{م ما} = ۱$

جو خط اس وتر کے سروں ن، ق کو مبدأ سے ملاتے ہیں انکی مساوات ہے (حصہ اول، دفعہ ۳۸ کی رو سے)

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{2} + ۲\,\text{ف}\,\text{ما}\,(\text{ل لا} + \text{م ما}) = ۰$$

یا

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + ۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,(\text{ھ} + \text{ف ل}) + \text{ما}^{2}\,(\text{ب} + ۲\,\text{ف م}) = ۰$$

لیکن چونکہ یہ مساوات دو علی القوائم خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس لئے

$$\text{ا} + \text{ب} + ۲\,\text{ف م} = ۰ \qquad \text{(حصہ اول، دفعہ ۲۹)}$$

یا $\text{م} = -\dfrac{\text{ا} + \text{ب}}{۲\,\text{ف}}$

اسلئے معلوم ہوا کہ ان تمام وتروں کے لئے م کی ایک ہی قیمت ہے۔ لیکن $\text{ل لا} + \text{م ما} = ۱$ عماد $(\text{لا} = ۰)$ سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کا معین مساوات $\text{م ما} = ۱$ سے حاصل ہوتا ہے پس $\text{ما} = \dfrac{۱}{\text{م}}$ جو مستقل ہے، اسلئے ثابت ہوا کہ تمام ایسے وتر عماد پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

(۲) مکافی $\text{ما}^{2} = ۴\,\text{ا لا}$ کے دو علی القوائم عمادوں کے تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عماد کی مساوات ہے　$\text{ما} = \text{م لا} - ۲\,\text{ا م} - \text{ا}\,\text{م}^{3}$

اگر عماد (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$\text{ک} = \text{م ھ} - ۲\,\text{ا م} - \text{ا}\,\text{م}^{3}$$

اس سے م کی تین قیمتیں $(\text{م}_1، \text{م}_2، \text{م}_3)$ حاصل ہوتی ہیں اور اگر مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جائے

$$\text{م}^{3} + \frac{۲\,\text{ا} - \text{ھ}}{\text{ا}}\,\text{م} + \frac{\text{ک}}{\text{ا}} =$$

تو مساواتوں کے مسائل کی رو سے

$$\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = ۰ \quad \ldots (۱)$$

$$\text{م}_1\text{م}_2 + \text{م}_1\text{م}_3 + \text{م}_2\text{م}_3 = \frac{۲\text{ا} - \text{ھ}}{\text{ا}} \quad \ldots (۲)$$

$$\text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3 = -\frac{\text{ک}}{\text{ا}}$$

لیکن حسب مفروض دونوں عماد علی القوائم ہیں، اسلئے $\text{م}_1\text{م}_2 = -۱$

اسلئے (۳) سے $\text{م}_3 = \frac{\text{ک}}{\text{ا}}$

(۱) اور (۲) میں م_3 کی یہ قیمت رکھنے سے

$$\text{م}_1 + \text{م}_2 = -\frac{\text{ک}}{\text{ا}}$$

اور $-۱ + (\text{م}_1 + \text{م}_2)\frac{\text{ک}}{\text{ا}} = \frac{۲\text{ا} - \text{ھ}}{\text{ا}}$

$\text{م}_1 + \text{م}_2$ کو ساقط کرنے سے

$$-۱ - \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2} = \frac{۲\text{ا} - \text{ھ}}{\text{ا}} \quad \text{یا} \quad \text{ک}^2 + ۳\text{ا}^2 - \text{اھ} = ۰$$

اس لئے (ھ، ک) کا طریق ہے

$$\text{ما}^2 = \text{الا} - ۳\text{ا}^2$$

باب چہاردہم پر متفرق مشقیں

۲۳- اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کا عماد ہو۔

۲۴- ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے عماد محور اعظم کے ایک نقطۂ معلومہ (گ، ۰) میں سے گذریں۔

۲۵- ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے نقطہ ن پر جو عماد ہے اس پر

اتنا فاصلہ ر اندر کیطرف ناپا گیا ہے کہ د ر = م^2 جہاں د اُس عمود کا طول ہے جو مرکز سے ن پر کے مماس پر کھینچا جائے۔ ن کے محددوں کی رقوم میں اس نقطہ محمعلہ کے محدد معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ہے ناقص

$$\frac{\text{ا}^2\,\text{لا}^2}{(\text{ا}^2-\text{م}^2)^2}+\frac{\text{ب}^2\,\text{ما}^2}{(\text{ب}^2-\text{م}^2)^2}=1$$

۲۶- $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے اُن عمادوں کا طول دریافت کرو جو محور کے اُس نقطہ سے جس کا فاصلہ ماسکہ سے ۸ ا ہو کھینچے جائیں۔

۲۷- مکانی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے نقطہ ن پر عماد کھینچا گیا ہے اس عماد اور نقطہ ق میں سے گذرنیوالے متوازی المحور خط مستقیم کے تقاطع کا طریق معلوم کرو جہاں ن اور ق محور کی متقابل جانبوں میں دو متساوی الفصل نقطے ہیں۔

۲۸- عام مخروطی کے نقطہ (لا′، ما′) میں سے گذرنیوالا عماد ایک ایسے نقطہ میں سے گذرتا ہے جس کے محدد

$$\text{لا}'-\frac{2}{\text{ا}+\text{ب}}(\text{ا}\,\text{لا}'+\text{ھ}\,\text{ما}'+\text{گ})،\quad \text{ما}'-\frac{2}{\text{ا}+\text{ب}}(\text{ھ}\,\text{لا}'+\text{ب}\,\text{ما}'+\text{ف})$$ ہیں۔

۲۹- ثابت کرو کہ خط ل لا + م ما = ۱ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کا عماد ہوگا اگر

$$\frac{\text{ا}^2}{\text{ل}^2}+\frac{\text{ب}^2}{\text{م}^2}=(\text{ا}^2-\text{ب}^2)^2$$

دائرہ کی صورت میں یہ شرط کیا ہو جائیگی؟

۳۰- اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ ل لا + م ما = ۱ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کا عماد ہو

۳۱- مکانی کے ماسکہ سے ایک عماد پر عمود نکالا گیا ہے اس کے پایہ کا طریق معلوم کرو۔

۳۲- مکانی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے دو نقطوں سے عماد نکالے گئے ہیں جو محور سے

زاویے ط اور ف بناتے ہیں جہاں مس ط × مس ف = ۲، ثابت کرو کہ یہ عماد ایکدوسرے کو مکافی پر قطع کرتے ہیں۔

۳۳- مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے عماد ن گ کا جو وسطی نقطہ ہے اس کا طریق دریافت کرو۔

۳۴- $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے عماد کا جو حصہ محاور لا اور ما کے درمیان کٹتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کے محدد (لا، ما) ہیں، ثابت کرو کہ

$$ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 = \frac{۱}{۴}(ا^2 - ب^2)^2$$

۳۵- ثابت کرو کہ مکافی کے ایک مماس اور اس کے متوازی عماد کا فاصلہ ا قم ط قط^2 ط ہے جہاں ط وہ زاویہ ہے جو انہیں سے کوئی خط محور سے بناتا ہے۔

۳۶- ن کوئی نقطہ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر ہے، خط ن ق محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے اور ناقص سے دوبارہ ق پر ملتا ہے، ن ر محور ما کے متوازی کھینچا گیا ہے اور منحنی سے دوبارہ ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ خط ق ر اور ن پر کے عماد کا نقطۂ تقاطع ذیل کا ناقص ہے

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = \left(\frac{ا^2 - ب^2}{ا^2 + ب^2}\right)^2$$

۳۷- و ن اور و نَ ایک مخروطی کے دو وتر ہیں جو و پر کے عماد سے زاویے ط اور طَ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ اگر مس ط × مس طَ مستقل ہو تو ن نَ عماد کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۳۸- قائم زائد میں ثابت کرو کہ عماد کے اُس حصہ کی تنصیف جو محوروں کے درمیان کٹتا ہے منحنی پر ہوتی ہے۔

۳۹- مخروطی کا ایک وتر اسطرح حرکت کرتا ہے کہ خطوط و ن، و ق جو اس کے

سروں کو مخروطی کے ایک ثابت نقطہ د سے ملاتے ہیں د پر کے عماد کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں، ثابت کرو کہ وتر، د پر کے مماس سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۴۰۔ اگر (لا، ما) ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^6} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^6} = \left(\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}\right)\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^4}\right) - \frac{1}{\text{ا}^2\text{ب}^2}$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر ن (لا، ما) پر کا عماد ناقص سے دوبارہ ق پر ملے تو

$$\text{د ر}\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^6} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^6}\right) = 2\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^4}\right)$$

جہاں د اُس عمود کا طول ہے جو مرکز سے ن پر کے مماس پر کھینچا جائے اور ر = ن ق

یعنی $\text{ر} = \frac{2\,\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{د}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{د}^2)}$

[ق کے محدد ہیں $\text{لا} - \frac{\text{د لا}}{\text{ا}^2}\,\text{ر}$، $\text{ما} - \frac{\text{د ما}}{\text{ب}^2}\,\text{ر}$، اس کیلئے شرط لکھو کہ ق منحنی پر واقع ہے۔]

۴۱۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے عماد ن گ کے وسطی نقطہ کا طریق ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{(1+\text{ز}^2)^2\,\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \frac{(1+\text{ز}^2)^2}{4}$$

۴۲۔ اگر قائم زائد کے متغیر نقطہ ن پر کا عماد منحنی سے دوبارہ ق پر ملے تو ن ق $\propto$ ج ن² جہاں ج مرکز ہے۔

۴۳۔ مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا لا}$ کے تین عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے کھینچے گئے ہیں اور محور سے بالترتیب گ۱، گ۲، گ۳ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

ا گ۱ + ا گ۲ + ا گ۳ = ۲ (ھ + ا) جہاں ا منحنی کا راس ہے۔
۴۴۔ ایک نقطہ معلومہ ق سے مکانی ما² = ۴ ا لا کے عماد کھینچے گئے ہیں جو محور سے زاوئے ط۱، ط۲، ط۳ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ

ی ق = ا قط ط۱ قط ط۲ قط ط۳

آزمائشی پرچہ ۴

۱۔ (ا) منحنی م لا ما + ب ما² - ۲ گ لا + ۲ ف ما - ج = ۰ کے نقاط (ف، ق) اور (فَ، قَ) کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو اور اس سے نقطہ (ف، ق) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو۔

(ب) نقطہ (لا، ما) سے منحنی لا²/ا² + ما²/ب² = ۱ کے مماسات کی مساوات معلوم کرو۔ اس سے مرتب دائرہ کی مساوات حاصل کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ زائد کے مماس کے اُس حصہ کی تنصیف جو متقاربوں کے درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر ہوتی ہے۔
نیز اس طرح جو مثلث کٹتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے۔

۳۔ مکانی ما² = ۴ ا لا کے نقطہ (ھ، ک) پر مماس کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ایک اور صرف ایک مماس کھینچ سکتا ہے جو محور تشاکل کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائے۔
ثابت کرو کہ مکانی کے وہ مماس جو ایکدوسرے سے ۴۵° کا زاویہ بنائیں ایک دوسرے کو قائم زائد پر قطع کرتے ہیں۔

۴۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ۳ لا² + ۲ لا ما + ۴ لا + ۷ ما + ۱ = ۰ کے اُن متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو جو ما = ۳ لا کے متوازی ہوں۔

۵۔ مزدوج قطر، مزدوج قطع زائد کی تعریفات لکھو اور ثابت کرو کہ اگر مرکز دار تراش کے ایک قطر کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو وہ مزدوج قطر

کے متوازی ہوں گے۔

اُس زائد کی مساوات دریافت کرو جو ۳ لا² − ۴ لا ما + ۲ لا − ۳ ما + ۷ = ۰ کا

مزدوج ہو۔

۶۔ اگر ایک متقارب کے کسی نقطہ سے ایک زائد اور اس کے مزدوج کے مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تماس مزدوج قطروں کے سرے ہونگے۔

۷۔ ثابت کرو کہ زائد کے ایک قطر اور اس کے مزدوج کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

۸۔ مکافی کی مساوات دریافت کرو جبکہ اس کا ایک قطر اور قطر کے سرے پر کا مماس حوالہ کے محور ہوں۔

۹۔ منحنی درجہ دوم کی مساوات کی شکل کیا ہو جاتی ہے جبکہ اس کا کوئی مماس اور متناظر عاد حوالہ کے محور ہوں؟

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے عاد ایک ایسے خط مستقیم پر ملتے ہیں جو اس وتر کے نقطۂ تنصیف میں سے محور کے متوازی کھینچا جائے۔

باب پانزدہم

قطب اور قطبی

۱۸۳۔ ثابت کرو کہ کسی ایک نقطہ سے مخروطی کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں، اِن کے نقاط تماس معلوم کرو۔

اس مسئلہ کا پہلا حصہ اِس سے قبل ثابت ہو چکا ہے کیونکہ ہم نے دو مماسوں کی مساوات دفعہ ۱۳۸ میں معلوم کی ہے۔

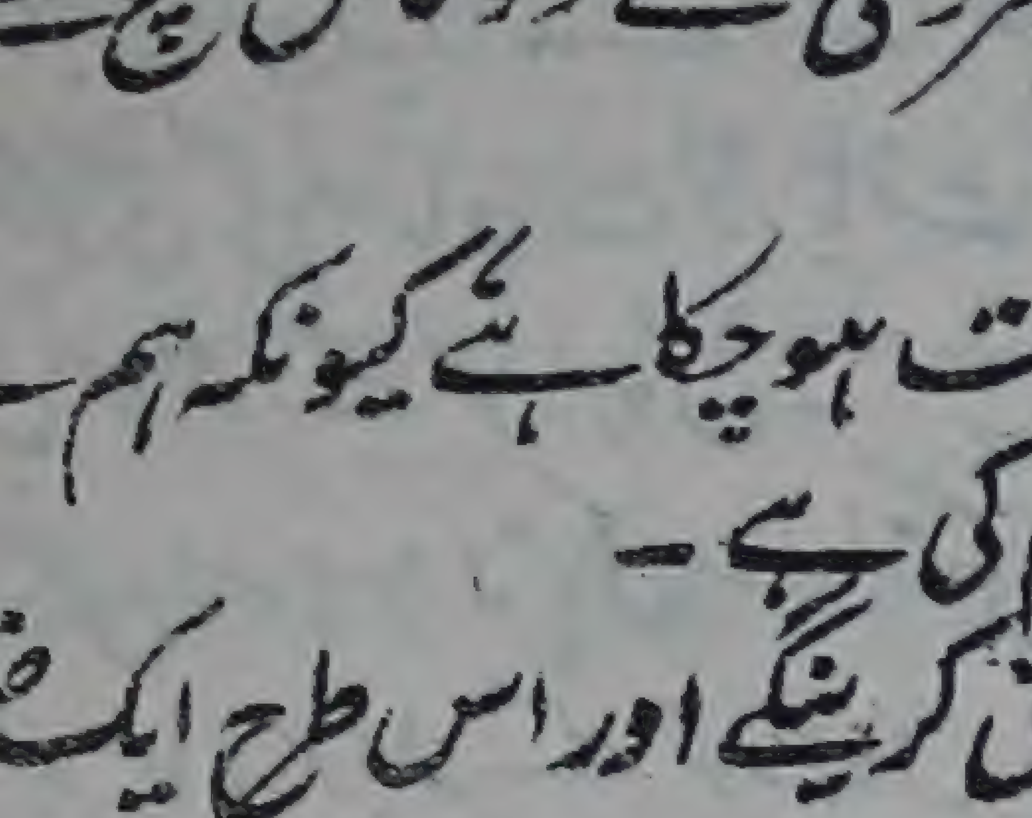
اب ہم ایک اور طرح سے اس کی تحقیق کرینگے اور اس طرح ایک ضروری نتیجہ پر پہنچینگے جو کارآمد ہوگا۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ہے

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

فرض کرو کہ جس نقطہ سے مخروطی کے مماس کھینچے گئے ہیں اُسکے محدد (لا۱، ما۱) ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ایک مماس کا نقطۂ تماس (ل، م) ہے، تب نقطہ (ل، م) پر کے مماس کی مساوات ہے [دفعہ ۱۲۷]



شکل ۶۷

لا (ا ل + ھ م + گ) + ما (ھ ل + ب م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰

اب یہ مماس نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گذرے گا اگر

لا۱ (ا ل + ھ م + گ) + ما۱ (ھ ل + ب م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰

یا ترتیب بدلنے سے

ل (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ص (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰ ......(ا)

پس دو مجہول مقادیر ل اور ص میں یہ ایک مساوات ہے، ایک اور مساوات یہ ہوگی

ا ل۲ + ۲ ھ ل ص + ب ص۲ + ۲ گ ل + ۲ ف ص + ج = ۰ ....(ب)

پس نقاط تماس معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو مساواتوں (ا) اور (ب) کو ل اور ص کے لئے ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

چونکہ (ا) نامعلوم مقادیر میں درجہ اول کی مساوات ہے اور (ب) درجہ دوم کی اس لئے (ا) کی مدد سے ہم (ب) میں سے ل کو ساقط کرکے ص میں ایک مساوات درجہ دوم حاصل کرسکتے ہیں۔ اسطرح ہمیں دو حل حاصل ہوتے ہیں جن کو اگر ہم چاہیں تو آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں۔ پس اس بناء پر ہمیں دو مماس ملیں گے۔ ہم ان کے نقاطِ تماس کو معلوم شدہ قرار دیتے ہیں کیونکہ ہمارے پاس ان کے محدد معلوم کرنے کے لئے کافی مساواتیں موجود ہیں۔

۱۸۴۔ ان مساواتوں کی ہندسی تعبیر۔ متذکرۂ بالا دو مساواتوں (ا) اور (ب) کو نہایت آسان ہندسی معنی پہنائے جاسکتے ہیں۔ (ب) کا مفہوم یہ ہے کہ نقطہ (ل، ص) مخروطی پر واقع ہے لیکن مساوات (ا) اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ نقطۂ تماس (ل، ص) جس خطِ مستقیم پر واقع ہے اس کی مساوات

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰

ہے۔ اس سے ہم فوراً یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ نقاطِ تماس وہ نقطے ہیں جہاں یہ خط مخروطی کو قطع کرتا ہے۔

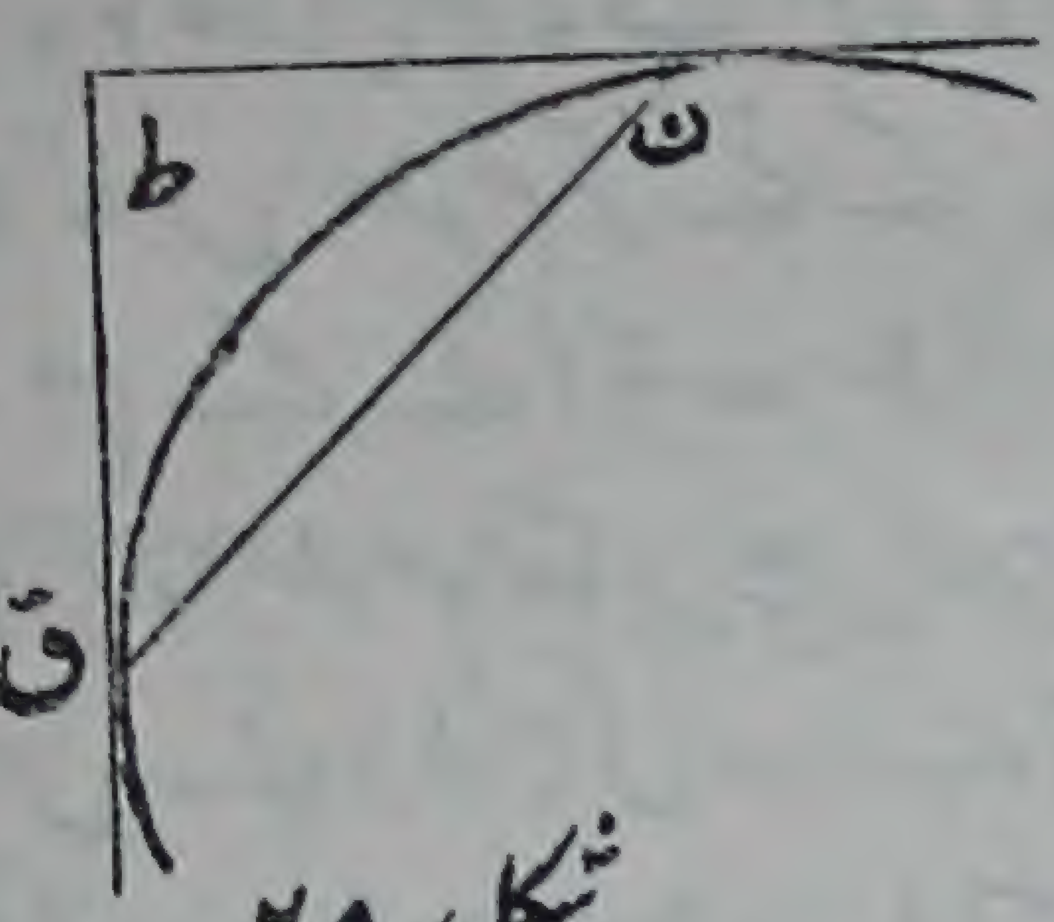
پس اگر نقطہ (لا۱، ما۱) سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کے نقاطِ تماس کے خطِ وصل کی مساوات

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰ ......(۱)

ہے۔

[یہ مساوات دونوں صورتوں میں درست رہتی ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل]

۱۸۵- قطبی - تعریف - اگر کسی نقطۂ معلومہ سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو اِن مماسوں کے نقاط تماس کے ملانے والے خط کو بلحاظ اس مخروطی کے اس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔



شکل ۶۸

شکل ۶۸ میں ط کا قطبی ن ق ہے۔

قطب - اگر مخروطی کے کسی وتر کے سروں میں سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کا نقطۂ تقاطع وتر مذکور کا قطب کہلاتا ہے۔ شکل ۶۸ میں ن ق کا قطب ط ہے۔

پس اگر ایک خط ایک نقطہ کا قطبی ہو تو وہ نقطہ اس خط کا قطب ہوگا۔

نوٹ - احتیاط سے دیکھا جائے کہ قطبی کی مساوات بعینہ اُس شکل کی ہے جس شکل کی کہ مماس کی مساوات ہے۔ پس اس کو الگ یاد رکھنے کی ضرورت نہیں۔ اِن دونوں خطوط میں ضروری فرق یہ ہے کہ مماس کی صورت میں نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع تھا لیکن اس صورت میں نقطہ پر اس قسم کی کوئی قید نہیں لگائی گئی۔

پس ظاہر ہے کہ جب نقطہ منحنی پر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی ہوگا جو اس نقطہ پر کا مماس ہے۔

ہندسی نقطۂ نظر سے بھی یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ جیسے نقطہ ط منحنی کے نزدیک آتا جاتا ہے، مماسوں کے نقاط تماس بھی ایک دوسرے کے قریب آتے جاتے ہیں اور بالآخر جب نقطہ ط عین منحنی پر واقع ہوتا ہے تو نقاط مذکورہ کو ملانے والا خط انتہا میں مماس بن جاتا ہے۔

پس مماس قطبی کی ایک خاص صورت ہے۔

۱۸۶- اسی سلسلہ میں ایک اور بات قابل ذکر ہے جس کی طرف

طالب علم کو توجہ کرنی چاہئے۔ ہم نے اوپر بیان کیا ہے کہ کسی نقطہ کے قطبی سے وہ خط مراد ہے جو اس نقطہ میں سے گذرنے والے مماسوں کے نقاطِ تماس کو وصل کرے۔ اب اگر مخروطی قطع ناقص ہو اور نقطہ اس کے اندر واقع ہو تو ظاہر ہے کہ مماس خیالی ہوں گے لیکن قطبی کی مساوات کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ یہ اس صورت میں ایک حقیقی خط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس امر کی تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ اگرچہ خط حقیقی ہے لیکن یہ منحنی کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا، اس لئے نقاطِ تماس خیالی ہیں اگرچہ اِن کو ملانے والا خط حقیقی ہے۔

عددی مثال کے ذریعہ ہم اس کی مزید توضیح کرتے ہیں، نقطہ (۳، ۳) قطع ناقص لا² + ۲ ما² = ۳۶ کے اندر واقع ہے، اس لئے منحنی کے وہ مماس جو اس نقطہ میں سے گزرینگے خیالی ہوں گے۔ ہم یہاں فی الحقیقت نقاطِ تماس کو معلوم کرتے ہیں اور ان سے اِنکے خط وصل کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ (لا₁، ما₁) ایک نقطۂ تماس ہے، تب اس پر کے مماس کی مساوات

لا لا₁ + ۲ ما ما₁ = ۳۶ ہے، اس لئے ۳ لا₁ + ۶ ما₁ = ۳۶

یعنی لا₁ + ۲ ما₁ = ۱۲، پس ہمیں دو مساواتوں

لا₁ + ۲ ما₁ = ۱۲، لا₁² + ۲ ما₁² = ۳۶

کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے

لا₁ کو ساقط کرنے اور ما₁ میں درجہ دوم کی مساوات کو حل کرنے سے

ما₁ = ۴ ± √‎-۲

لہٰذا پہلی مساوات سے لا₁ = ۴ ∓ ۲ √‎-۲

پس نقاطِ تماس (۴ + ۲√‎-۲، ۴ - √‎-۲) اور (۴ - ۲√‎-۲، ۴ + √‎-۲) ہیں، اور یہ خیالی ہیں جو ہمیں پہلے ہی سے معلوم تھا۔

اِن کے ملانے والے خط کی مساوات

(لا - ۴ - ۲√‎-۲) / (۴√‎-۲) = (ما - ۴ + √‎-۲) / (-۲√‎-۲)

ہے جو اختصار کے بعد لا + ۲ ما − ۱۲ = ۰ ہو جاتی ہے اور ایک حقیقی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۸۷۔ جو اشارات دفعہ گذشتہ میں درج کئے گئے ہیں وہ کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم کے قطب کے لئے بھی صادق آتے ہیں۔ ہم نے کسی خط کے قطب کی تعریف یہ کی ہے کہ قطب اُن نقطوں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ہے جن پر خطِ مذکور منحنی کو قطع کرتا ہے۔ اگر خطِ مذکور منحنی سے نہ ملے تو مماس خیالی ہوں گے لیکن ہم دیکھیں گے کہ اس صورت میں بھی وہ ایک دوسرے کو حقیقی نقطہ پر قطع کریں گے اور خطِ مذکور کا قطب حقیقی ہوگا۔ مثلاً خط لا + ۲ ما = ۱۲ قطع ناقص لا² + ۲ ما² = ۳۶ کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ بااین ہمہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس خط کا قطب حقیقی نقطہ (۳، ۳) ہے۔

۱۸۸۔ سادہ صورتوں میں قطبی کی مساوات۔

ذیل کی خاص صورتوں میں ہم قطبیوں کی مساواتیں یہاں درج کرتے ہیں۔

قطع مکافی ما² − ۴ ا لا = ۰ ، قطبی ما ما₁ − ۲ ا (لا + لا₁) = ۰ .....(۲)

$$\text{قطع ناقص}\quad \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 ،\quad \text{قطبی}\quad \frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\text{قطع زائد}\quad \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 ،\quad \text{قطبی}\quad \frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\text{قطع زائد}\quad \text{لا ما} = \text{ج}^2 ،\quad \text{قطبی}\quad \text{لا ما}_1 + \text{لا}_1\text{ ما} = 2\,\text{ج}^2 \quad \ldots\ldots (5)$$

سب صورتوں میں قطبی کی مساوات ہر دو قائم اور مائل محوروں کے لئے درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے اس کو مماس کی مساوات سے اخذ کیا ہے جو مائل محوروں کی صورت میں بھی درست ہے۔

اب ہم ابتدائی اصولوں کی بناء پر قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے

لحاظ سے نقطہ (لا، ہا) کا قطبی معلوم کرینگے۔

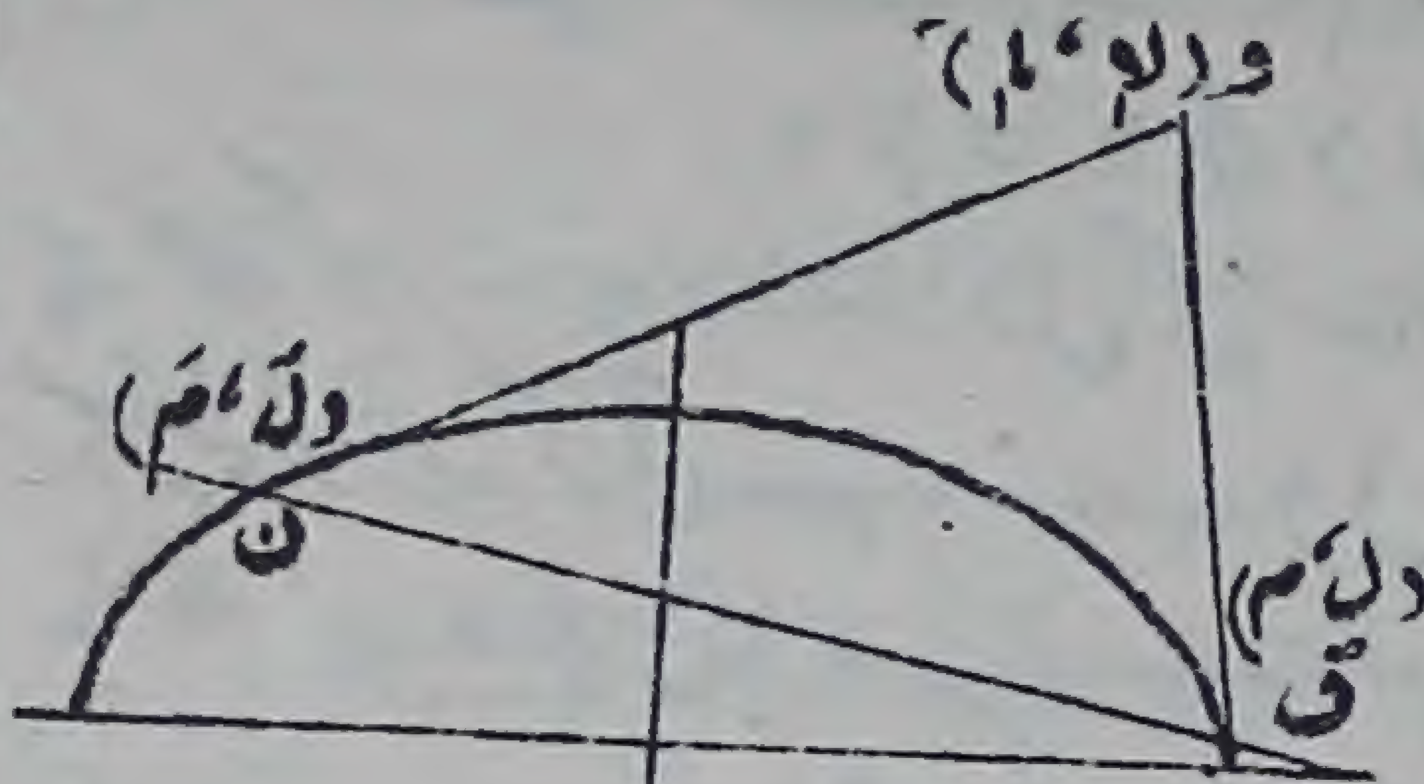
[انتباہ ۔ قطع زائد لا ما = ج^۲ کی صورت میں یہ بات قابلِ غور ہے کہ اگرچہ (لا، ہا) پر کے مماس کی مساوات دونوں شکلوں لا ہا + لا، ما = ۲ج^۲ اور لا/لا، + ما/ہا = ۲ میں لکھی جاسکتی ہے لیکن موخر الذکر مساوات باعموم قطبی کو تعبیر نہیں کرتی]

۱۸۹ ۔ کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱ کے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطۂ معلومہ و (لا، ما) ہے اور و میں سے جو مماسات و ن، و ق کھینچے گئے ہیں اُن کے نقاطِ تماس (ل، م)، (لَ، مَ) ہیں۔

مساوات لا لا، / ا^۲ + ما ما، / ب^۲ = ۱ .... (ج)

پر غور کرو۔



شکل ۶۹

یہ درجہ اول کی مساوات ہے اس لئے کسی نہ کسی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
اب ن اور ق پر کے مماسوں کی مساواتیں یہ ہیں

لا ل / ا^۲ + ما م / ب^۲ = ۱ اور لا لَ / ا^۲ + ما مَ / ب^۲ = ۱

اور چونکہ یہ مماس (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں، اس لئے

لا، ل / ا^۲ + ما، م / ب^۲ = ۱ اور لا، لَ / ا^۲ + ما، مَ / ب^۲ = ۱ .... (د)

مساواتوں (د) سے ظاہر ہے کہ مساوات (ج) بالترتیب ہر دو جوڑوں

لا = ل، ما = م اور لا = لَ، ما = مَ سے پوری ہوتی ہے۔

اس لئے $\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$ سے جو خطِ مستقیم تعبیر ہوتا ہے وہ (ل، م)، (لَ، مَ) میں سے گزرتا ہے یعنی یہ خطِ مستقیم ن ق ہے۔ دوسرے الفاظ میں و (لا₁، ما₁) کے قطبی کی مساوات حسبِ ذیل ہے:-

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

۱۹۰- قطع مکافی کے لئے ہم دفعات ۱۸۳، ۱۸۴ کا عام طریقہ استعمال کر سکتے ہیں یا دفعہ ۱۸۹ کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ یہاں ہم مؤخر الذکر طریقہ استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ نقطہ و (لا₁، ما₁) ہے اور و میں سے قطع مکافی کے مماس و ن، و ق کھینچے گئے ہیں اور ان کے نقاطِ تقاطع بالترتیب (ل، م)، (لَ، مَ) ہیں۔ مساوات

$$\text{ما ما}_1 = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1) \quad \ldots\ldots\ldots (\text{ج})$$

پر غور کرو۔ یہ درجہ اول کی مساوات ہے اس لئے کسی نہ کسی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اب (ل، م) پر کے مماس کی مساوات $\text{ما م} = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{ل})$ ہے اور یہ (لا₁، ما₁) میں سے گزرتا ہے۔ پس

$$\text{ما}_1\text{م} = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا}_1 + \text{ل})$$

جس سے ظاہر ہے کہ (ل، م) خطِ مستقیم (ج) پر واقع ہے، اسی طرح (لَ، مَ) بھی اسی خطِ مستقیم پر ہے۔ پس مساوات (ج) اس خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقاطِ تماس کو وصل کرتا ہے۔

۱۹۱- مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی مخروطی کے اس وتر کے متوازی ہوتا ہے جس کی تنصیف نقطۂ مذکورہ پر ہو۔

دفعہ ۱۸۴ کی رو سے نقطہ (لا₁، ما₁) کا قطبی

$$\text{لا}(\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}) + \text{ما}(\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}) + \text{گ لا}_1 + \text{ف ما}_1 + \text{ج} = ۰$$

ہے اور دفعہ ۱۵۳ کے مطابق وہ وتر جس کی تنصیف نقطہ (لاَ، ماَ) پر ہوتی ہے

(لا - لاَ) (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + (ما - ماَ) (ھ لاَ + ب ماَ + ف) = ۰ ہے۔

دونوں مساواتوں میں لا اور ما کے سر جداگانہ مساوی ہیں۔ لہٰذا یہ خطوطِ مستقیم متوازی ہیں۔ صریحاً اگر نقطۂ مذکورہ مخروطی کے باہر واقع ہو تو وہ وتر جس کی اس نقطہ پر تنصیف ہوتی ہے مخروطی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

قطع ناقص کی صورت میں دفعۂ ہذا کے نتیجہ کی تصدیق منحنی کو اُن مزدوج قطروں کے لحاظ سے تحویل کرنے سے بآسانی ہو سکتی ہے جن میں سے ایک قطر نقطۂ مذکورہ میں سے گزرتا ہو۔ اسطرح دفعہ ۱۶۰ کی رو سے ناقص کی مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$$

اور نقطۂ مذکورہ (ج، ۰) ہوگا۔ جس وتر کی اس نقطہ پر تنصیف ہوتی ہے وہ حسب مفروض مزدوج قطر لا = ۰ کے متوازی ہے۔ اس نقطہ کا قطبی

$\frac{\text{لا ج}}{\text{ا}^2}=1$ ہے اور اس لئے لا = ۰ کے متوازی ہے۔ پس

یہ دونوں خط باہم متوازی ہیں۔

قطع مکافی کی صورت میں ہم اسی طرح دفعہ ۱۷۲ کو استعمال کر سکتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ بلحاظ مخروطی لا^2 + ۲ لا ما + ۲ ما^2 - ۲ لا - ۴ ما + ۱ = ۰ کے نقطہ (۱، ۱) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۲۔ مخروطی لا^2 + لا ما + ما^2 + لا + ما + ۱ = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ($\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ منحنی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے لحاظ سے مبدا کے قطبی کی مساوات دریافت کرو۔

۴ - دفعات ۱۸۳، ۱۸۴ کے طریقہ کے مطابق ابتدائی اصولوں کی بناء پر دفعہ ۱۸۸ کی صورتوں میں قطبیوں کی مساواتیں دریافت کرو ۔

۵ - اگر بلحاظ منحنی $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ ن (لا، ما) کے قطبی پر نقطہ مذکورہ سے عمود کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس عمود کی مساوات

$$\frac{ا^2 لا}{لا_۱} - \frac{ب^2 ما}{ما_۱} = ا^2 - ب^2$$ ہے ۔

اگر (لا، ما) مخروطی پر واقع ہو تو بتاؤ کہ اس صورت میں یہ مساوات کیا ہو جائے گی ۔

۶ - مشق ۵ کا عمود محور اعظم سے گ پر ملتا ہے اور ن ل محور اعظم پر عمود کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ

$$ج گ = ز^2 \times ج ل$$

۷ - بلحاظ قطع مکافی $ما^2 = ۴ ا (لا + ا)$ کے نقطہ ن (لا، ما) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو ۔

اگر قطبی مرتب سے ت پر ملے تو ت کو مبدأ سے وصل کرنے والے خط کی مساوات دریافت کرو ۔ پھر ماسکہ کو مبدأ مان کر ثابت کرو کہ زاویہ ن س ت قائمہ ہے ۔

[نوٹ ۔ ملاحظہ ہو کہ مرتب کی مساوات لا + ۲ ا = ۰ ہے ۔]

۸ - اس امر کی تصدیق کرو کہ اگرچہ نقطہ (۲، ۱) سے مخروطی $لا^2 - ما^2 = ۲$ کے مماس خیالی ہیں لیکن وتر تماس حقیقی ہے اور اس کی مساوات ۲ لا − ما = ۲ ہے ۔

۹ - ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) سے قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے جو مماس کھینچ سکتے ہیں وہ حقیقی اور الگ الگ اسی صورت میں ہوں گے جبکہ $\frac{لا_۱^2}{ا^2} - \frac{ما_۱^2}{ب^2} > ۱$ لیکن ان کا وتر تماس خط مستقیم $\frac{لا\, لا_۱}{ا^2} - \frac{ما\, ما_۱}{ب^2} = ۱$ ہے

جو تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

ذیل میں ہم قطبوں اور قطبیوں کی شکلی خاصیتوں کے متعلق کچھ درج کرینگے۔

۱۹۲— اگر ا کا قطبی ب میں سے گذرے تو ب کا قطبی ا میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ ا (لا۱، ما۱) ہے اور ب (لا۲، ما۲)، نیز مخروطی کی مساوات

ا لا² + ۲ ہ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ہے۔

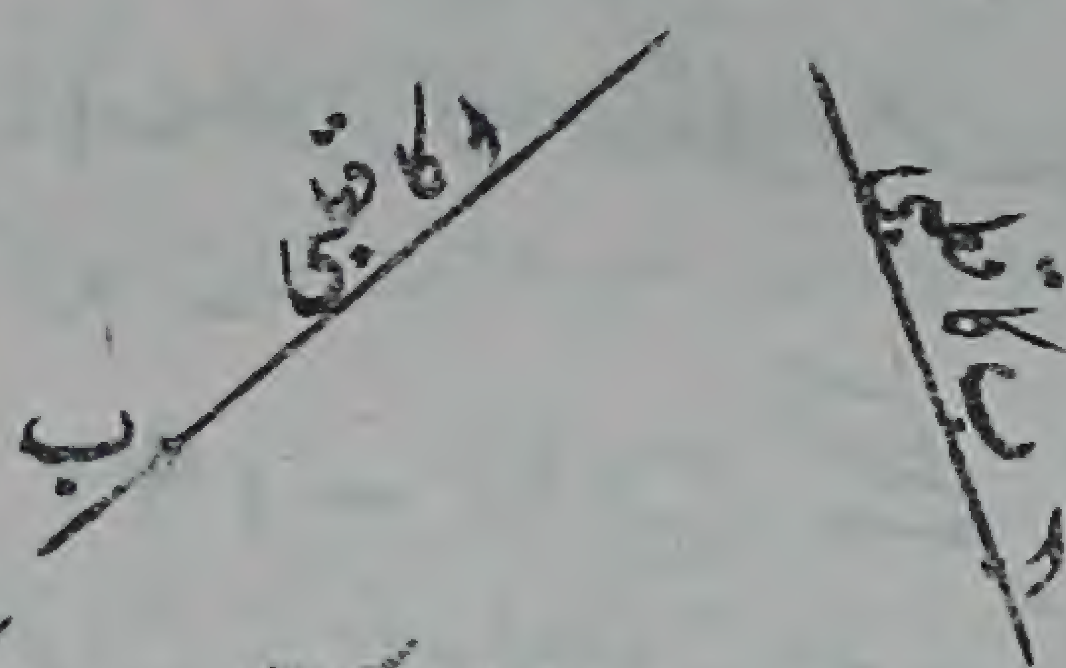
تب ا کے قطبی کی مساوات

لا (ا لا۱ + ہ ما۱ + گ) + ما (ہ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰

ہوگی اور چونکہ یہ ب میں سے گذرتا ہے اس لئے

لا۲ (ا لا۱ + ہ ما۱ + گ) + ما۲ (ہ لا۱ + ب ما۱ + ف) + گ لا۱ + ف ما۱ + ج = ۰

یا ا لا۱ لا۲ + ہ (لا۱ ما۲ + لا۲ ما۱) + ب ما۱ ما۲ + گ (لا۱ + لا۲) + ف (ما۱ + ما۲) + ج = ۰ ....(ک)



اور یہ مساوات (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کے لحاظ سے متشاکل ہے، لہٰذا اس امر کے لئے کہ ب کا قطبی ا میں سے گزرے یہی شرط ہے۔

اگر ضرورت ہو تو آخر الذکر جملہ کا باضابطہ ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے، مساوات (ک) حسب ذیل شکل میں لکھی جا سکتی ہے:۔

لا۱ (ا لا۲ + ہ ما۲ + گ) + ما۱ (ہ لا۲ + ب ما۲ + ف) + گ لا۲ + ف ما۲ + ج = ۰

اور چونکہ ب کے قطبی کی مساوات

لا (ا لا۲ + ہ ما۲ + گ) + ما (ہ لا۲ + ب ما۲ + ف) + گ لا۲ + ف ما۲ + ج = ۰

ہے اس لئے ظاہر ہے کہ یہ خط نقطہ ا (لا۱، ما۱) میں سے بھی گزرتا ہے جو ثابت کرنا مطلوب ہے۔

اگر ہم مخروطی کی مساوات کو سادہ شکل

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$$

میں لیں تو مسئلہ مذکورہ آسانی سے ثابت ہو جاتا ہے۔
کیونکہ اس صورت میں (لا۱، ما۱) کا قطبی

$$\frac{لا\,لا_۱}{ا^۲}+\frac{ما\,ما_۱}{ب^۲}=۱$$

ہے، اگر یہ قطبی (لا۲، ما۲) میں سے گزرے تو

$$\frac{لا_۱\,لا_۲}{ا^۲}+\frac{ما_۱\,ما_۲}{ب^۲}=۱$$

یہ ربط صریحاً متشاکل ہے، اس لئے (لا۲، ما۲) کا قطبی (لا۱، ما۱) میں سے گذرتا ہے۔

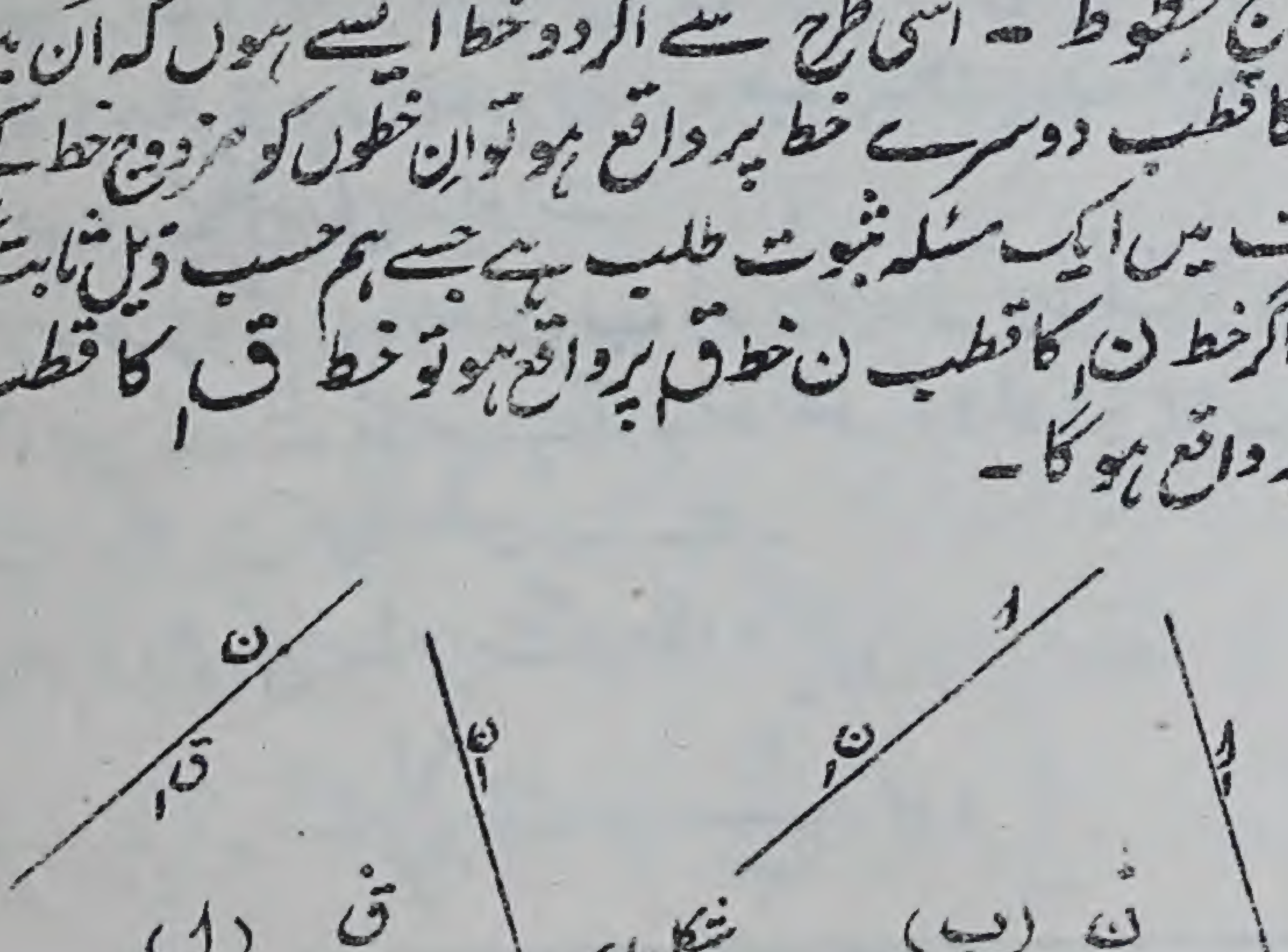
مشق

۱۰۔ اوپر کا مسئلہ دفعہ ۱۸۸ کی باقی سادہ صورتوں کے لئے ثابت کرو۔

۱۹۳۔ مزدوج نقطے — تعریف۔ اگر دو نقطے ایسے ہوں کہ مخروطی کے لحاظ سے ہر ایک کا قطبی دوسرے نقطہ میں سے گذرے تو یہ نقطے بلحاظ مخروطی مذکور کے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں۔

مزدوج خطوط۔ اسی طرح سے اگر دو خط ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطب دوسرے خط پر واقع ہو تو ان خطوں کو مزدوج خط کہتے ہیں۔
اس تعریف میں ایک مسئلہ ثبوت طلب ہے جسے ہم حسب ذیل ثابت کرتے ہیں۔

۱۹۴۔ اگر خط ن۱ کا قطب ن خط ق۱ پر واقع ہو تو خط ق۱ کا قطب ق خط ن۱ پر واقع ہو گا۔



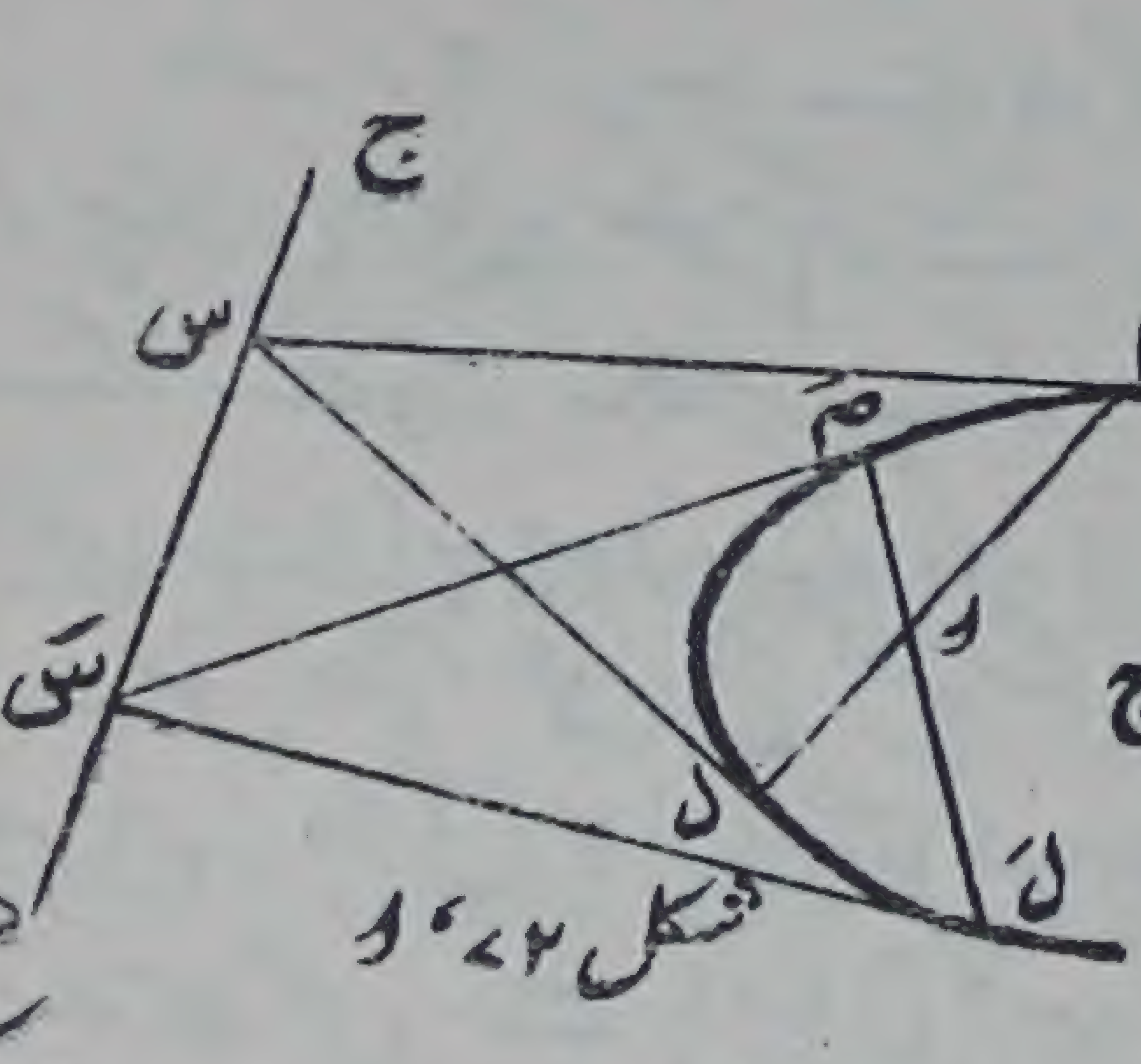
شکل ۱۷

ق کا قطبی (دیکھو شکل ۱۷، ا) ق حسب مفروض ن میں سے گزرتا ہے، لہٰذا
ن کا قطبی ن، ق میں سے گزرے گا اور یہی ثابت کرنا تھا۔
[شکل بالا میں نقطہ ق کو ارادۃً ن سے الگ رکھا گیا ہے تاکہ طالب علم
شکل ہی سے اس نتیجہ کو درست تسلیم کر لینے کی طرف راغب نہ ہو جو درحقیقت
اُسے ثابت کرنا ہے]

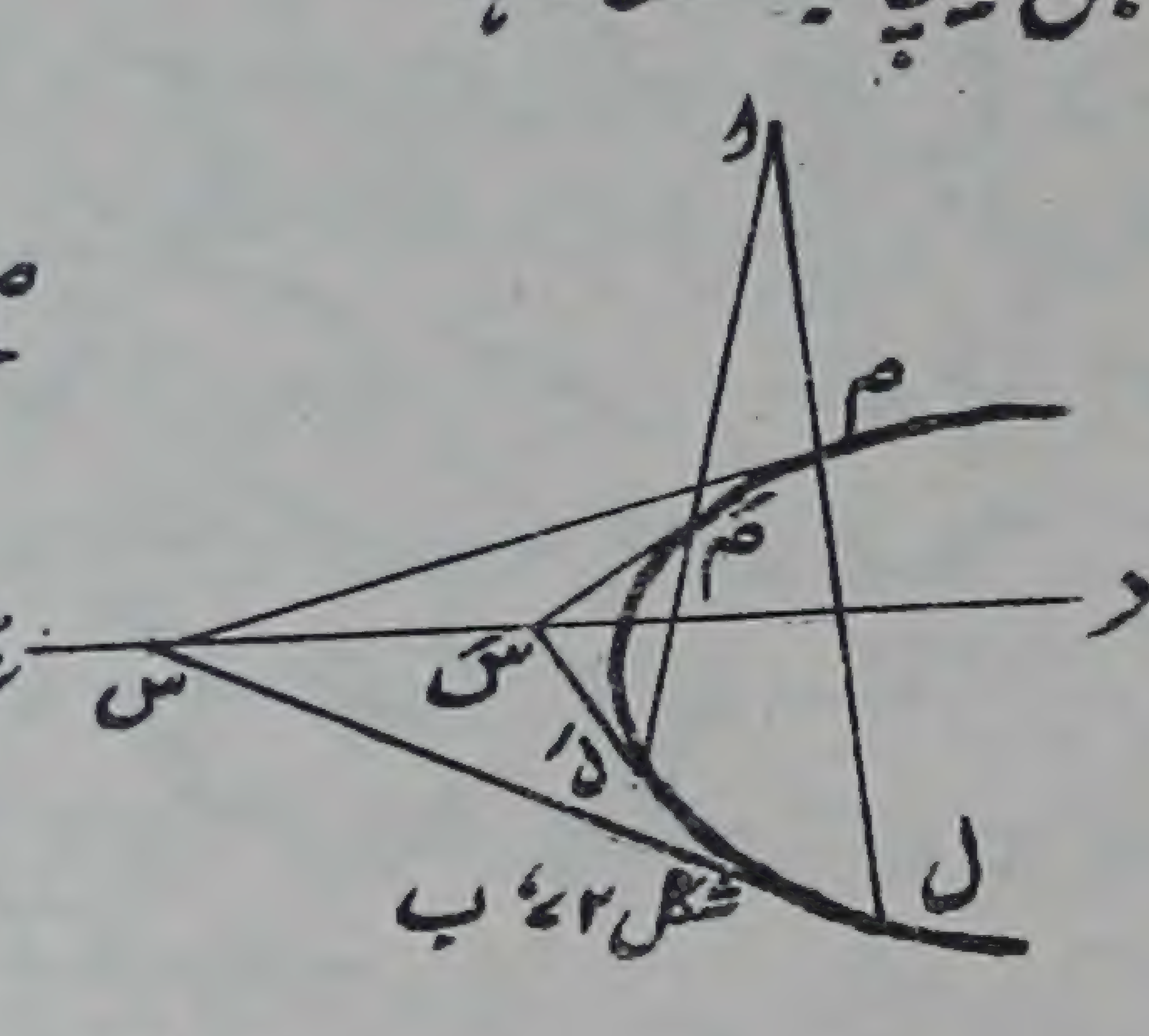
۱۹۵- اگر ایک خط ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو اس کا قطب ایک
ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ ا ہے (دیکھو شکل ۱۷، ب) اور اس کا قطبی
اَ ہے نیز فرض کرو کہ ن ا کوئی خط ہے جو ا میں سے گزرتا ہے
اور اس کا قطب ن ہے۔ تب ن کا قطبی ا میں سے گزرتا ہے،
لہٰذا ا کا قطبی ن میں سے گزرتا ہے، یعنی اَ، ن میں سے گزرتا
ہے یعنی ن، اَ پر واقع ہے، لہٰذا ن ا کا قطب ہمیشہ ایک ثابت خطِ
مستقیم یعنی ا کے قطبی پر واقع ہوتا ہے۔ (ملاحظہ ہو دفعۂ گذشتہ کے
آخر کا نوٹ)

۱۹۶- مسئلہ بالا کی مدد سے ہندسی طور پر کسی نقطہ کے قطبی کا کھینچنا۔
دفعہ ۱۹۵ کا نتیجہ نہایت ضروری ہے کیونکہ اس کی مدد سے کسی
نقطہ کا قطبی کھینچا جا سکتا ہے۔



شکل ۷۲، ا



شکل ۷۲، ب

کیونکہ نقطہ ا میں سے خواہ یہ منحنی کے اندر ہو جیسا شکل (۷۲، ا) میں ہا یا منحنی کے

باہر ہو جیسا شکل (۲، ب) میں ہم ایسے وتر کھینچ سکتے ہیں جو مخروطی سے حقیقی نقطوں مثلاً م، ل، مَ، لَ پر ملیں اور ان وتروں کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو س، سَ پر قطع کرتے ہیں جن کو ملانے سے مطلوبہ قطبی حاصل ہوتا ہے۔

اس سے ہمیں قطبی کی ایک اور تعریف حاصل ہوتی ہے۔

پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جوں جوں کوئی وتر ایک ثابت نقطہ کے گرد گھومتا ہے اس کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ اس ثابت خط کو نقطۂ مذکورہ کا قطبی کہا جا سکتا ہے۔

اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس میں ہمیں خیالی مقادیر کا استعمال نہیں کرنا پڑتا، لیکن چونکہ ہندسۂ تحلیلی کے اعلیٰ حصوں میں یہ مقادیر بکثرت استعمال ہوتی ہیں اس لئے ابھی سے ہمیں اُن کی ماہیت سے واقف ہونے کی کوشش کرنی چاہئے۔

۱۹۷- اگر ایک نقطہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو اس کا قطبی ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کہ اس نقطہ کا قطبی ہمیشہ اس ثابت خط کے قطب میں سے گذرتا ہے۔

۱۹۸- مسئلہ بالا کی مدد سے خطِ مستقیم کے قطب معلوم کرنے کا ہندسی عمل۔

دفعہ ۱۹۷ کی مدد سے ہم تمام صورتوں میں ایک خط ج د کے قطب کو ہندسی طریق پر معلوم کر سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۹۶ میں قطبی معلوم کئے گئے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اس خط پر کے بعض نقطے مثلاً س، سَ منحنی سے باہر ہوں گے اور ان سے منحنی کے مماس س م، س ل اور سَ مَ، سَ لَ کھینچ سکیں گے، ان مماسوں کے اوتار تماس م ل، مَ لَ کا نقطۂ تقاطع مطلوبہ قطب ا ہوگا۔ پس یہ قطب اسطرح ہندسی عمل سے بآسانی کھینچ سکتا ہے۔

اسی طرح سے ہم اس کو خط کے قطب کی تعریف تصور کر سکتے ہیں اور

دفعہ ۱۹۶ کے اشارات اس پر بھی صادق آتے ہیں۔

۱۹۹۔ ایک خطِ مستقیم کے قطب کے محدد معلوم کرو۔

ہم دو مختلف طریقے استعمال کر سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ خطِ معلومہ پر دو ثابت نقطے ا اور ب ہیں، تب دفعہ ۱۹۲ کی رو سے ا اور ب کے قطبی دونوں خط اب کے قطب میں سے گذرتے ہیں، اس لئے ان کا نقطۂ تقاطع قطبِ مطلوبہ ہے پس ہم مطلوبہ خطِ مستقیم پر کوئی دو نقطے منتخب کرتے ہیں، ان کے قطبیوں کی مساواتیں لکھ لیتے ہیں اور ان کو حل کرنے سے ان کا نقطۂ تقاطع معلوم کرتے ہیں۔

(۲) زیادہ عام طریقہ یہ ہے:- ہم فرض کرتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ ہے اور پھر لا_1، ما_1 کی وہ قیمتیں منتخب کرتے ہیں جن سے $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ کا قطبی وہی حاصل ہو جو معلومہ خطِ مستقیم ہے۔

مثال ۱۔ خطِ مستقیم $\text{ل لا} + \text{م ما} = 1$ کا قطب بلحاظ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ مطلوبہ قطب ہے۔ تب معلومہ خطِ مستقیم وہی ہوگا جو $\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$ ہے، سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\text{ل} = \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2} ، \quad \text{م} = \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}$$

$\therefore \text{لا}_1 = \text{ا}^2\text{ل}$ اور $\text{ما}_1 = \text{ب}^2\text{م}$

نتیجہ صریح۔ اگر قطب مفروضہ خطِ مستقیم پر ہی واقع ہو تو یہ خط مماس ہوگا۔ اس کے لئے شرط یہ ہے کہ $\text{ا}^2\text{ل}^2 + \text{ب}^2\text{م}^2 = 1$

(۲) اسکے لئے شرط معلوم کرو کہ خطوط $\text{ل}_1 \text{لا} + \text{م}_1 \text{ما} = 1$ اور $\text{ل}_2 \text{لا} + \text{م}_2 \text{ما} = 1$ مندرجۂ بالا ناقص کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔

یہاں دوسرے خط کا قطب پہلے خط پر ہونا چاہئے یعنی نقطہ

(ا۲ ل۱، ب۲ م۱) خط ل۲ لا + م۲ ما = ۱ پر ہونا چاہئے - لہٰذا

ا۲ ل۱ ل۲ + ب۲ م۱ م۲ = ۱

(۳) مخروطی لا۲ + ۲ لا ما + ۳ ما۲ + ۲ لا + ما + ۱/۲ = ۰ کے لحاظ سے خط ۶ لا + ۹ ما + ۴ = ۰ کا قطب معلوم کرو۔

(لا۱، ما۱) کا قطبی لا (لا۱ + ما۱ + ۱) + ما (لا۱ + ۳ ما۱ + ۱/۲) + لا۱ + ۱/۲ ما۱ + ۱/۲ = ۰ ہے

اگر یہ خط وہی ہو جو ۶ لا + ۹ ما + ۴ = ۰ سے تعبیر ہوتا ہے تو

(لا۱ + ما۱ + ۱) / ۶ = (لا۱ + ۳ ما۱ + ۱/۲) / ۹ = (لا۱ + ۱/۲ ما۱ + ۱/۲) / ۴

ان مساواتوں کو ہم لا۱، ما۱ کے لئے حل کرتے ہیں۔
پہلے اور آخری جملے کے مساوی ہونے سے

۴ لا۱ + ۴ ما۱ + ۴ = ۶ لا۱ + ۳ ما۱ + ۳ یا - ۲ لا۱ + ما۱ + ۱ = ۰

دوسرے اور آخری جملہ کے مساوی ہونے سے

۴ لا۱ + ۱۲ ما۱ + ۲ = ۹ لا۱ + ۹/۲ ما۱ + ۹/۲ یا - ۵ لا۱ + ۱۵/۲ ما۱ - ۵/۲ = ۰

اِن دو خطی مساواتوں کو لا۱، ما۱ کے لئے حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے
لا۱ = ۱ اور ما۱ = ۱ یعنی مطلوبہ قطب نقطہ (۱، ۱) ہے۔

مشقیں

خطوطِ ذیل کے قطبوں کے محدد معلوم کرو:-

۱۱- ۳ لا + ۴ ما = ۵ کا بلحاظ ۲ لا۲ - ما۲ = ۳ کے

۱۲- ۵ لا + ما + ۴ = ۰ کا بلحاظ لا۲ + ۲ لا ما - ما۲ + ۲ لا + ۱ = ۰ کے

۱۳- لا - ما + ۱۲ = ۰ کا بلحاظ لا۲ + لا ما + ما۲ = ۳ کے

۱۴- بلحاظ منحنی ۴ لا^۲ + ۹ ما^۲ = ۳۶ کے نقاط ن (۳، ۲) اور ق (۴، ۴) کے قطبیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ قطبیوں کے نقطۂ تقاطع ر کے محدد معلوم کرو کہ پھر ر کے قطبی کی مساوات معلوم کرو اور یہ ثابت کرنے سے دفعہ ۱۹۴ کی تصدیق کرو کہ یہ قطبی نقاط ن اور ق کا خطِ وصل ہے۔

۱۵- ثابت کرو کہ مخروطی ا$_۱$ لا^۲ + ۲ ھ$_۱$ لا ما + ب$_۱$ ما^۲ = ۱ کے لحاظ سے خط ل لا + م ما = ۱ کے قطب کے محدد $\frac{\text{ب}_1\text{ل} - \text{ھ}_1\text{م}}{\text{ا}_1\text{ب}_1 - \text{ھ}_1^2}$ ، $\frac{\text{ا}_1\text{م} - \text{ھ}_1\text{ل}}{\text{ا}_1\text{ب}_1 - \text{ھ}_1^2}$ ہیں

۱۶- مشق ماقبل سے مستنبط کرو کہ خطوط ل لا + م ما = ۱ اور ل$_۱$ لا + م$_۱$ ما = ۱ باہم مزدوج ہوں گے اگر ب$_۱$ ل ل$_۱$ - ھ$_۱$ (ل م$_۱$ + ل$_۱$ م) + ا$_۱$ م م$_۱$ = ا$_۱$ ب$_۱$ - ھ$_۱^۲$

۱۷- مشق ۱۶ کے نتیجہ سے خط ل لا + م ما = ۱ کے مماس ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۲۰۰- مرکز کا قطبی۔ لاتناہی پر کا خط۔

عام مخروطی کے لحاظ سے نقطہ (لا$_۱$، ما$_۱$) کے قطبی کی مساوات

لا (ا لا$_۱$ + ھ ما$_۱$ + گ) + ما (ھ لا$_۱$ + ب ما$_۱$ + ف) + گ لا$_۱$ + ف ما$_۱$ + ج = ۰ ہے

اب اگر (لا$_۱$، ما$_۱$) مخروطی کا مرکز ہو تو

ا لا$_۱$ + ھ ما$_۱$ + گ = ۰ اور ھ لا$_۱$ + ب ما$_۱$ + ف = ۰ (دفعہ ۹۶)

پس مساواتِ بالا کی شکل یہ ہو جاتی ہے

(لا × ۰) + (ما × ۰) + ن = ۰ جہاں ن = گ لا$_۱$ + ف ما$_۱$ + ج

اس مساوات میں نہ لا شامل ہوتا ہے نہ ما، پس یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہ ہو گا کہ اس عجیب و غریب نتیجہ کا کیا مفہوم ہے۔

اولاً ہم جانتے ہیں کہ ہر خطِ مستقیم کی مساوات کو ل لا + م ما = ۱ کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے اور ل اور م کی مختلف قیمتوں کیلئے اس سے مختلف خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں۔ نیز محددوں کے محوروں پر اس خط کے مقطوعے بالترتیب $\frac{1}{\text{ل}}$ اور $\frac{1}{\text{م}}$ ہیں۔ پس ل اور م جتنے چھوٹے ہوں گے اُتنے ہی بڑے مقطوعے ہونگے اور مبدأ سے اُتنا ہی زیادہ دور خطِ مستقیم ہوگا۔ اور بالآخر جب ل، م

بالکل صفر ہو جائینگے تو یہ دونوں مقطوعے لاانتہا بڑے ہو جائینگے اور خطِ مستقیم بالتمام لامتناہی فاصلہ پر ہوگا۔ لہٰذا جب لا اور ما کے سر صفر ہوں تو ہم مساوات کو ل لا + م ما = ا کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں ل اور م دونوں صفر ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہوں تو خطِ مستقیم بالتمام لامتناہی فاصلہ پر ہوگا، اس خط کو "لامتناہی پر کا خط" کہتے ہیں۔

پس مرکز کے قطبی کی مساوات کے یہ معنی ہیں کہ

مرکز کا قطبی لامتناہی پر کا خط ہے،

یا بالفاظ دیگر لامتناہی پر کے خط کا قطب مرکز ہے۔

سطور بالا سے اُن اُمور کی جو ہم نے متقاربوں کے بارہ میں اس سے پہلے بیان کئے ہیں تشریح اور تصدیق ہوتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ متقارب ایک خطِ مستقیم ہے جو منحنی سے لامتناہی پر کے دو نقاط پر ملتا ہے یعنی یہ منحنی کا ایسا مماس ہے جس کا نقطۂ تماس لامتناہی فاصلہ پر ہے۔ لیکن دونوں متقارب مرکز پر ملتے ہیں، لہٰذا متقارب منحنی کے وہ مماس ہیں جو مرکز میں سے کھینچے جائیں۔ پس مرکز کا قطبی جو ان مماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے بالتمام لامتناہی پر واقع ہے۔

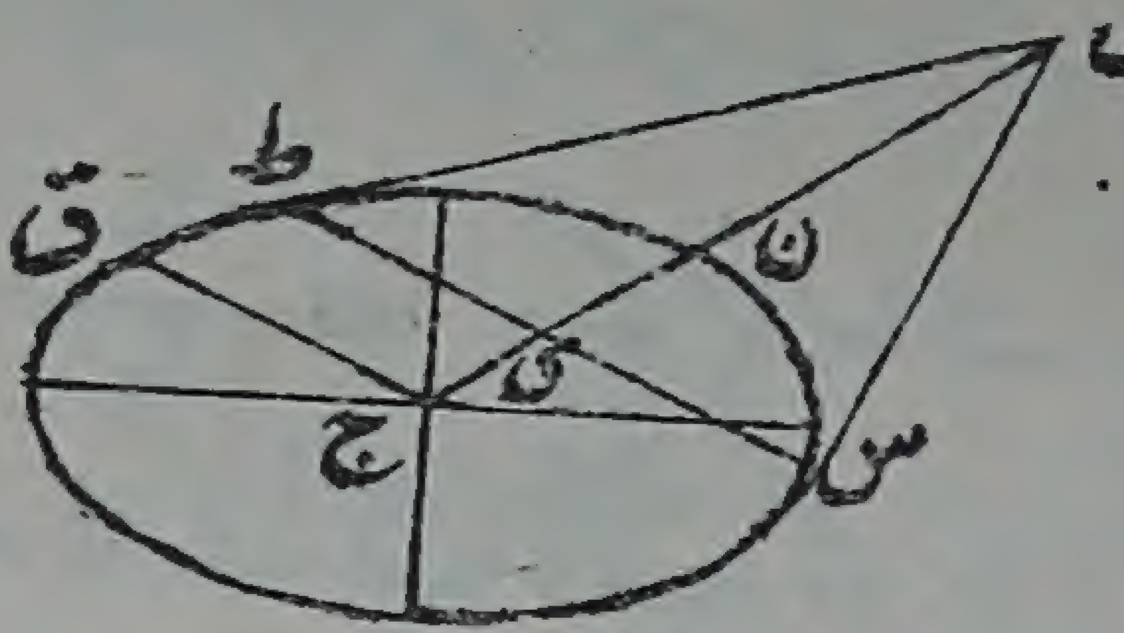
توضیحی مثالیں

(۱) اگر ایک قطع ناقص کے لحاظ سے (جس کا مرکز ج ہو) نقطہ ت کا قطبی خط ج ت سے ی پر ملے اور ج ت منحنی سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ی} \times \text{ج ت} = \text{ج ن}^2$$

ج ن اور اس کے مزدوج قطر ج ف کو محور مان لو، تب نقطہ ت

کے محدد (لا۱، ۰) ہوں گے جہاں ج ت = لا۱ اور قطع ناقص کی مساوات کی شکل $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہوگی جہاں ا = ج ن اور ب = ج ق



شکل ۳۱

اب ت کا قطبی ہے $\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} = 1$ لہذا ی پر لا = $\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}_1}$ یعنی

$$\text{ج ی} = \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}_1}$$

اس لئے ج ی × ج ت = ا^2 = ج ن^2

نوٹ - چونکہ طس کی مساوات لا = $\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}_1}$ ہے، اس لئے طس متوازی ہے ق ج کے جس کی مساوات لا = ۰ ہے، بالفاظ دیگر ت کا قطبی مزدوج قطر کے متوازی ہے - اب ت ط، ت س مماس ہیں اور ج ن، طس کی جو ج ق سے متوازی ہے تنصیف کرتا ہے - اس لئے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر کسی نقطہ سے مماس کھینچے جائیں تو اِن کے نقاطِ تماس کو ملانے والا وتر اُس خط سے جو نقطۂ مذکورہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے دو مساوی حصوں میں تقسیم ہو جاتا ہے -

(۲) ایک مخروطی ا کے مماسات کے قطبوں کا طریق بلحاظ ایک اور مخروطی ب کے معلوم کرو -

اس طرح کے سوالات اکثر بحث میں آتے ہیں - فرض کرو کہ لا۱، ما۱ ایک قطب ہے، تب حسب مفروض اس کا قطبی بلحاظ ب کے ا کو مس کرتا ہے - پس ہم پہلے قطبی کی مساوات لکھ لیتے ہیں، پھر وہ شرط معلوم کرتے ہیں

جو اس قطبی کو ا سے مس کرنے کے لئے پوری کرنی چاہیئے۔ اس طرح ہمیں (لا′، ما′) میں ایک ربط حاصل ہوتا ہے جو مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔ (طالب علم کو چاہئے کہ حل کے اس طریقہ کو بخوبی ذہن نشین کرلے)

مثلاً مخروطی $\frac{لا^2}{عہ^2} + \frac{ما^2}{بہ^2} = ۱$ کے مماسات کے قطبوں کا طریق بلحاظ مخروطی $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ کے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لا′، ما′) ایک قطب ہے، اس کا قطبی

$$لا (ا لا' + ھ ما' + گ) + ما (ھ لا' + ب ما' + ف) + گ لا' + ف ما' + ج = ۰$$

ہے اور حسب مفروض اسے $\frac{لا^2}{عہ^2} + \frac{ما^2}{بہ^2} = ۱$ کو مس کرنا چاہئے۔

اب خط $ل لا + م ما + ۱ = ۰$ مؤخر الذکر مخروطی کو مس کرے گا اگر $عہ^2 ل^2 + بہ^2 م^2 = ۱$

لیکن اس صورت میں $ل = \frac{ا لا' + ھ ما' + گ}{گ لا' + ف ما' + ج}$ اور $م = \frac{ھ لا' + ب ما' + ف}{گ لا' + ف ما' + ج}$

$$\therefore عہ^2 (ا لا' + ھ ما' + گ)^2 + بہ^2 (ھ لا' + ب ما' + ف)^2 = (گ لا' + ف ما' + ج)^2$$

حروف کے آخری ہندسوں کو حذف کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ طریق ایک مخروطی ہے جس کی مساوات ہے

$$عہ^2 (ا لا + ھ ما + گ)^2 + بہ^2 (ھ لا + ب ما + ف)^2 = (گ لا + ف ما + ج)^2$$

(۳) قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے عمادوں کے قطبوں کا طریق دریافت کرو۔

(لاَ، ماَ) پر کے عماد کی مساوات ہے

$$\frac{ا^2 لا}{لاَ} - \frac{ب^2 ما}{ماَ} = ا^2 - ب^2 \qquad ......(۱)$$

اگر اس خط کا قطب (ن، ق) ہو تو یہ خط مساواتِ ذیل سے بھی تعبیر ہو سکتا ہے

$$\frac{لا ن}{ا^2} + \frac{ما ق}{ب^2} = ۱$$

اس لئے $\frac{ا^2}{لاَ} \Big/ \frac{ن}{ا^2} = -\frac{ب^2}{ماَ} \Big/ \frac{ق}{ب^2} = ا^2 - ب^2$

جس سے $لاَ = \frac{ا^4}{ن(ا^2 - ب^2)}$ ، $ماَ = -\frac{ب^4}{ق(ا^2 - ب^2)}$

لیکن (لاَ، ماَ) ناقص پر ہے، اس لئے

$$\frac{لاَ^2}{ا^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} = ۱$$

$$\therefore \left\{\frac{ا^3}{ن(ا^2 - ب^2)}\right\}^2 + \left\{-\frac{ب^3}{ق(ا^2 - ب^2)}\right\}^2 = ۱$$

یا $ن^2 ق^2 (ا^2 - ب^2)^2 = ا^6 ق^2 + ب^6 ن^2$

پس (ن، ق) کا طریق ہے

$$لا^2 ما^2 (ا^2 - ب^2)^2 = ا^6 ما^2 + ب^6 لا^2$$

باب پانزدہم پر متفرق مشقیں

۱۸۔ ابتدائی اصولوں سے نقطہ (۱، ۲) کا قطبی بلحاظ مکافی $ما^2 = ۲ لا$ کے معلوم کرو۔

۱۹۔ مخروطیوں $لا ما + لا + ۲ ما = ۰$، $لا^2 + لا ما + ما^2 = ۱$،
$لا^2 - ما^2 = ا^2$، $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا = ۰$

سے کے لحاظ سے نقطہ (۱، ۲) کے قطبیوں کی مساواتیں لکھو۔

۲۰ - مخروطیوں (۱) $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$، (۲) $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا لا}$ (۳) $\text{لا ما} = \text{ج}^2$

کے لحاظ سے خط ل لا + م ما = ۱ کے قطب کے محدد لکھو۔

۲۱ - مشق ۲۰ کے نتائج سے وہ شرائط حاصل کرو کہ خطوط ل لا + م ما = ۱، لَ لا + مَ ما = ۱ مشق ۲۰ کی مخروطیوں کے لحاظ سے فردوج ہوں۔

۲۲ - ثابت کرو کہ ناقص کے ماسکہ کا قطبی اُس کا متناظر مرتب ہوتا ہے۔

۲۳ - مکافی کی صورت میں مشق ماقبل کا مسئلہ کیا صورت اختیار کرے گا؟

۲۴ - ایک نقطہ ت (لا₁، ما₁) سے مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا لا}$ کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ وترِ تماس کے وسطی نقطہ م کے

محدد $\text{لا} = \frac{\text{ما}_1^2 - 2\,\text{ا لا}_1}{2\,\text{ا}}$، $\text{ما} = \text{ما}_1$ ہیں۔

۲۵ - ثابت کرو کہ مشق ۲۴ کا خط ت م محور کے متوازی ہے۔

۲۶ - قطعِ مکافی کے لحاظ سے نقطہ ت کا قطبی ت میں سے گزرنے والے قطر سے ص پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت ص کا وسطی نقطہ منحنی پر واقع ہوتا ہے اور اس نقطہ پر کا مماس ت کے قطبی کے متوازی ہے۔

۲۷ - ثابت کرو کہ قطعِ ناقص اور اس کے امدادی دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ناقص کے محورِ اعظم پر ملتے ہیں۔

۲۸ - ایک خطِ معلومہ پر کے نقطوں میں سے ایک دائرہ کے مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے اوتارِ تماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

۲۹ - اگر ناقصوں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان کا محورِ اعظم مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان ناقصوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے جو قطبی ہوں گے وہ سب محورِ اعظم پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے۔

اس مسئلہ کو وسعت دیکر دیکھو کہ یہ اس صورت میں جبکہ سب

ناقص ایک مشترک قطر کے سروں پر ایکدوسرے کو مس کرتے ہوں کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۳۰۔ خط لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ کا قطب بلحاظ مکافی ما^2 = ۴ الا کے معلوم کرو۔

۳۱۔ نقطہ (لا، ما) کا طریق معلوم کرو جبکہ اس کا قطبی بلحاظ مکافی ما^2 = ۴ الا کے خط ل لا + م ما = ۱ کے متوازی ہو۔

۳۲۔ اگر کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ لا^2/ا^2 - ما^2/ب^2 = ۱ کے منحنی کے مزدوج محور کے ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ قطب مزدوج قطع زائد کے اُس مماس پر واقع ہوگا جو مذکورہ محور کے دوسرے سرے میں سے کھینچا جائے۔

۳۳۔ دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 کے لحاظ سے دائرہ لا^2 + ما^2 - ۲ ا لا = ۰ کے مماسوں کے قطبیوں کا طریق دریافت کرو۔

۳۴۔ اگر ایک خطِ مستقیم ایک ایسے دائرہ کو مس کرے جس کا مرکز ایک مکافی کے راس پر ہو اور جس کا قطر وترِ خاص کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس خطِ مستقیم کے قطب کا طریق بلحاظ مکافی مذکور کے قائم ہذلولی ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ دائرہ (لا - ب)^2 + ما^2 = ج^2 کے مماسات کے قطبیوں کا طریق بلحاظ دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 کے مخروطی

(ج^2 - ب^2) لا^2 + ج^2 ما^2 + ۲ ا^2 ب لا - ا^4 = ۰ ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ بلحاظ اُن مخروطی تراشوں کے جو لا^2 + ما^2 + ۲ ک لا ما = ۱ میں ک کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں نقطہ (ف، گ) کے قطبی ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر (ف، گ) ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ قطبیوں کا نقطۂ تقاطع ایک ثابت قطع زائد پر حرکت کرتا ہے۔

۳۷- بلحاظ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے ایک نقطہ کا قطبی ایک قطع زائد کو مس کرتا ہے جس کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہے، ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق قطع زائد ہے۔

۳۸- ایک نقطہ ن سے ایک قطع ناقص کے مماس کھینچے گئے ہیں اور نقطۂ مذکورہ سے وترِ تماس پر عمود ن ل نکالا گیا ہے۔ اگر ن ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ ل کا طریق قائم ہذلولی ہے۔

۳۹- اگر ایک نقطہ ن کے قطبی بلحاظ دو ثابت دائروں کے کھینچے جائیں اور قطبیوں کا تقاطع ق ہو تو خط ن ق کے نقطۂ تنصیف کا طریق دریافت کرو۔

۴۰- اگر ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرے کہ اس کا قطب بلحاظ ایک ثابت دائرہ کے ایک معلومہ خطِ مستقیم پر حرکت کرے، تو ثابت کرو کہ اوّل الذکر خطِ مستقیم کا قطب بلحاظ کسی اور دائرہ کے بھی ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے گا۔

۴۱- ایک بیرونی نقطہ سے ایک مکافی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان کا وترِ تماس ہمیشہ مکافی پر عماد ہو تو ثابت کرو کہ بیرونی نقطہ کے طریق کی مساوات $\text{ما}^2(\text{لا} + 2\,\text{ا}) + 4\,\text{ا}^3 = 0$ ہے۔

۴۲- ثابت کرو کہ وہ سب دائرے جن کے لحاظ سے ایک نقطۂ معلومہ کا قطبی وہی ہو ایک مشترک اصلی محور رکھتے ہیں اور یہ اصلی محور اُس عمود کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتا ہے جو نقطۂ مذکورہ سے اس کے قطبی پر کھینچا جائے۔

باب شانزدہم

ایک متبدل کے ذریعہ کسی مخروطی پر کے نقطوں کی تعبیر

۲۰۱ - متبدل - مخروطی پر کے نقطوں کے متعلق جو مسائل ہوں ان کی بحث میں اکثر اوقات یہ زیادہ سود مند ہوتا ہے کہ ان نقاط کو صرف ایک متغیر متبوع کی رقوم میں بیان کیا جائے بجائے اس کے کہ ہر نقطہ دو متغیروں سے تعبیر ہو اور یہ متغیر ایک ربط کے ذریعہ باہم منسلک ہوں۔ پس اگر ہم کسی مخروطی کے نقطوں کے محددوں کے لئے ایک متغیر کی رقوم میں سادہ جملے معلوم کر سکیں، تو اس متغیر کی کسی خاص قیمت سے منحنی کے ایک نقطہ کا تعین ہو گا، جب کسی متغیر کو اس طرح استعمال کیا جائے تو اسے متبدل کہتے ہیں۔

مثلاً دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ کی صورت میں ہم رکھ سکتے ہیں،

لا = ا جم طہ ، ما = ا جب طہ

اس طرح منحنی کے ہر نقطہ کے جواب میں طہ کی ایک مختلف قیمت ہے، اس جگہ طہ متبدل ہے۔

لازمی طور پر منحنی کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں متبدل کی ایک قیمت ضرور ہونی چاہیئے، اور متبدل کی ایک ہی قیمت سے منحنی کے دو نقطے تعبیر نہیں ہونے چاہئیں۔

صریحاً ہم دونوں محددوں کو ایک محدد کی رقوم میں لا سکتے ہیں کیونکہ مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے ما کو لا کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے لیکن ایسے جملات میں اصم مقداریں شریک ہونگی اس لئے ان سے

ساتھ عمل کرنا مشکل ہوگا۔ مگر بعض صورتوں میں یہ ممکن ہوتا ہے کہ ہر دو متغیر لا، ما کسی اور تیسرے متغیر کی رقوم میں باآسانی بیان ہو سکیں۔ اگلی دفعہ میں ہم دیکھیں گے کہ مخروطیوں کی تین مساواتوں کی صورت میں لا، ما کے لئے نہایت سادہ اور موزوں جملے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۲ — متبدلی تعبیر کی سادہ صورتیں

(۱)۔ مکانی $ما^2 = ۴\,ا\,لا$ ہے۔ اگر ہم رکھیں

$$\left.\begin{aligned} ما &= ۲\,ا\,مہ \\ لا &= ا\,مہ^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

تو اس طرح سے ہم نے لا اور ما کو جبکہ نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہو مہ کی رقوم میں نہایت آسان شکل میں بیان کر دیا۔ نیز چونکہ منحنی کے ہر نقطہ کا معین مختلف ہے اس لئے ہر نقطہ مہ کی مختلف قیمت سے تعبیر ہوتا ہے۔

جب مہ کی قیمت $-\infty$ سے شروع ہو کر بالتدریج بڑھتے بڑھتے $+\infty$ ہو جاتی ہے تو اس کے جواب میں ما کی قیمت $-\infty$ سے شروع ہو کر $+\infty$ ہو جاتی ہے۔ اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ منحنی پر ایک نقطہ اس کے اس حصہ پر جو محور سے نیچے ہے لامتناہی فاصلہ سے حرکت کر کے بالتدریج راس پر آتا ہے اور پھر محور کے اوپر کے حصہ پر حرکت کرتا ہوا لامتناہی فاصلہ پر چلا جاتا ہے، مہ کی قیمت صفر سے راس تعبیر ہوتا ہے کیونکہ اس صورت میں

$$لا = ۰ \quad ، \quad ما = ۰$$

(۲) ناقص $\dfrac{لا^2}{ا^2} + \dfrac{ما^2}{ب^2} = ۱$

یہاں اگر ہم رکھیں

$$\left.\begin{aligned} لا &= ا\,جم\,طہ \\ ما &= ب\,جیب\,طہ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۲)$$

تو نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہوگا، کیونکہ

$$\left(\frac{لا}{و}\right)^2 + \left(\frac{ما}{ب}\right)^2 = جم^2 طہ + جب^2 طہ = ۱$$

نیز جب، طہ بالتدریج ۰° سے ۳۶۰° تک بدلتا ہے تو متناظر نقطہ گھڑی کی مقابل سمت میں ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے، نیز طہ کی کسی ایک قیمت سے دو نقطے تعبیر نہیں ہو سکتے کیونکہ اگر جب طہ اور جم طہ دونوں معلوم ہوں تو ہمیں ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان طہ کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

(۳) قطع زائد $\frac{لا^2}{و^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$، یہاں اگر ہم رکھیں

لا = و قط طہ، ما = ب مس طہ ......(۳)

تو نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہوگا اور دو مختلف نقطوں کے لئے طہ کی دو مختلف قیمتیں ہونگی۔

اگر طہ، ۰° سے بڑھتے بڑھتے ۳۶۰° تک پہنچے تو متناظر نقطہ مکمل قطع زائد مرتسم کریگا، لیکن ترسیم کی ترتیب پر احتیاط سے غور کرنا چاہئے۔ نقطہ ا طرف کے راس سے شروع ہوتا ہے اور جب، طہ بدل کر ۹۰° تک پہنچتا ہے تو نقطہ دائیں جانب کی شاخ کے بالائی حصہ پر حرکت کرکے لا متناہی فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے۔

چونکہ ۹۰° کے بعد قط طہ اور مس طہ دونوں کی قیمتیں منفی ہوتی ہیں اس لئے اب نقطہ مذکورہ بائیں شاخ کے نچلے حصہ پر لا متناہی فاصلہ سے شروع ہوتا ہے اور بتدریج حرکت کرتے کرتے راس کی طرف آ جاتا ہے اور بالآخر جب زاویہ طہ، ۱۸۰° کے مساوی ہو جاتا ہے اور راس کی بنا پر قط طہ = −۱ اور مس طہ = ۰ ہو جاتا ہے تو یہ بائیں جانب کے راس پر پہنچ جاتا ہے، اس کے بعد یہ بائیں شاخ کے اوپر کے حصہ پر حرکت کرتا ہے اور جس وقت طہ، ۲۷۰° کے مساوی ہوتا ہے تو نقطہ اس شاخ

پر لا متناہی فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے اور بالآخر دائیں جانب کی شاخ کے نچلے حصہ پر سے ہوتا ہوا پھر مبدأ پر آ پہنچتا ہے۔

پس جب ہماری مراد اُس نقطہ سے ہو جس کا متبدل مہ یا طہ ہے تو ہم اس نقطہ کو "نقطہ مہ" یا "نقطہ طہ" سے موسوم کر سکتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ اگر لا = ۱ + ت، ما = ۱ + ت² جہاں ت کوئی متغیر ہے تو ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) ایک مکافی کو مرتسم کرتا ہے جس کا رأس (۱، ۱) ہے۔ نیز منحنی پر نقطہ کی حرکت کو بیان کرو جبکہ ت، -∞ سے +∞ تک بدلے۔ (مساوات معلوم کرنے کے لئے ت کو ساقط کرو)

۲ - اگر لا = اجم طہ + ج اور ما = ب جب طہ + د تو ثابت کرو کہ (لا، ما) ایک ناقص کو مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز (ج، د) ہے اور منحنی کے گرد نقطہ کی حرکت پورے طور پر بیان کرو جبکہ طہ، ۰ سے ۲ π تک بدلے۔

۳ - قائم زائد لا² - ما² = ا² میں ثابت کرو کہ ہم لا = ا قط طہ اور ما = ا مس طہ رکھ سکتے ہیں۔

۴ - قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں (۱) مساوی مزدوج قطروں کے سروں پر کے (۲) وتر خاص کے سروں پر کے متبدلی زاوئے معلوم کرو (ان نقطوں کے محدد معلوم کر کے طہ کی قیمت معلوم کرو)

۳۰۲ - مذکورہ بالا طریقہ کا استعمال قطع مکافی کی صورت میں۔

اب ہم مکافی ما² = ۴ ا لا پر

لا = ا مہ²، ما = ۲ ا مہ

کے ذریعہ نقطوں کو تعبیر کرنے کی چند مثالیں درج کرینگے۔

اس طرز تعبیر کا نمایاں فائدہ اُس وقت حاصل ہوتا ہے جب ہمیں قطع مکافی اور بعض اور منحنیات (جن کی مساواتیں معلوم ہوں) کے

نقاط تقاطع معلوم کرنا مقصود ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ نقطہ لا = ا مہ^{۲} ، ما = ۲ ا مہ ، مہ کی تمام قیمتوں کے لئے قطع مکافی پر واقع ہوتا ہے، اس لئے لا اور ما میں دو مساواتوں کو حل کرنے کی بجائے ہم مہ کی رقوم میں لا اور ما کی یہ قیمتیں معلومہ منحنی کی مساوات میں درج کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں مہ میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں نقاطِ تقاطع کے متبدلوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ قطع مکافی ما^{۲} = ۴ ا لا اور خط ل لا + م ما + ن = ۰ کے نقاط تقاطع کے متبدل معلوم کرو۔ نیز ان کے باہم مماس ہونے کی شرطیں معلوم کرو۔

چونکہ قطع مکافی پر کے ہر ایک نقطہ کے لئے

لا = ا مہ^{۲} ، ما = ۲ ا مہ

اس لئے نقاط تقاطع کے متبدل مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں:

ل (ا مہ^{۲}) + م (۲ ا مہ) + ن = ۰ یا مہ^{۲} ا ل + ۲ مہ ا م + ن = ۰

جو مہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نقاط تقاطع دو ہیں کیونکہ مہ کی ایک قیمت کے جواب میں مکافی پر ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے۔

اگر خطِ مذکور مکافی کو مس کرے تو مساوات درجہ دوم کی اصلیں صریحاً مساوی ہونگی۔ اس کی شرط یہ ہے

ا^{۲} م^{۲} = ا ن ل یا ا م^{۲} = ل ن

مثال ۲۔ دائرہ مکافی سے چار نقاط پر ملتا ہے اور ان نقطوں کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

دائرہ کی مساوات کی شکل یہ ہے

لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

اس لئے لا = ا مہ^{۲} ، ما = ۲ ا مہ رکھنے سے ہمیں مہ میں درجہ چہارم کی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{مہ}^4\text{ا}^2 + \text{مہ}^2(2\text{گ ا} + 4\text{ا}^2) + 2\text{مہ ف ا} + \text{ج} = 0$$

جس سے ظاہر ہے کہ نقاطِ تقاطع چار ہیں۔

چونکہ مہ۳ والی رقم مساوات میں موجود نہیں ہے، لہذا اصلونکا مجموعہ صفر ہے لیکن ہر اصل کا ۲ا گنا متناظر معین کو تعبیر کرتا ہے، لہذا معینوں کا حاصل جمع صفر ہے۔

۲۰۴ — دو نقطوں کے متبدل مہ۱ اور مہ۲ ہیں، ان کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرو۔

(لا۱ ، ما۱) اور (لا۲ ، ما۲) کو ملانے والا خط یہ ہے

$$\frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{لا}-\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}_2-\text{ما}_1}{\text{لا}_2-\text{لا}_1} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ما}-2\text{ا مہ}_1}{\text{لا}-\text{ا مہ}_1^2} = \frac{2\text{ا}(\text{مہ}_2-\text{مہ}_1)}{\text{ا}(\text{مہ}_2^2-\text{مہ}_1^2)} = \frac{2}{\text{مہ}_2+\text{مہ}_1}$$

اسلئے $\text{ما}(\text{مہ}_2+\text{مہ}_1) - 2\text{ا مہ}_1(\text{مہ}_2+\text{مہ}_1) = 2\text{لا} - 2\text{ا مہ}_1^2$

یا $\text{ما}(\text{مہ}_2+\text{مہ}_1) - 2\text{لا} = 2\text{ا مہ}_1\text{مہ}_2 \quad \ldots\ldots (4)$

۲۰۵ — **نقطہ مہ پر کا مماس** — وتر کی مساوات میں مہ۲ = مہ۱ = مہ رکھنے سے ہمیں اس نقطہ پر کے مماس کی مساوات جسکا متبدل مہ ہے حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$2\text{ما مہ} - 2\text{لا} = 2\text{ا مہ}^2$$

یعنی $\text{لا} - \text{مہ ما} + \text{ا مہ}^2 = 0 \quad \ldots\ldots (5)$

۲۰۶ — مہ کی قیمت کی ہندسی تعبیر — مساواتوں

$$\text{لا} = \text{ا مہ}^2 ،\quad \text{ما} = 2\text{ا مہ}$$

میں مہ کے ہندسی معنی معلوم کرنا مفید ہوگا۔

اس کے معنی ہم مماس کی مساوات سے فوراً حاصل کر سکتے ہیں کیونکہ اس زاویہ کا مماس جو اس نقطہ پر کا ہندسی مماس محور کے ساتھ بناتا ہے $\frac{1}{\text{مہ}}$ ہے، لہذا مہ اس زاویہ کے مماس التمام کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ مہ پر کا مماس مکانی کے محور سے بناتا ہے۔

۲۰۷ — ہم دفعہ ۸۴ میں دیکھ چکے ہیں کہ م کی تمام قیمتوں کے لئے خط

$$ا = م لا + \frac{ا}{م}$$

مکافی کو مس کرتا ہے - اس مساوات کا نقطہ مہ پر کے مماس کی مساوات

$$لا - مہ ما + ا مہ^۲ = ۰$$

کے ساتھ مقابلہ کرنا باعث دلچسپی ہوگا -

ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہونگی اگر

$$مہ = \frac{ا}{م}$$

پس ہم م کو بھی بطور متبدل استعمال کر سکتے ہیں جس صورت میں

$$لا = \frac{ا}{م^۲} \quad اور \quad ما = \frac{۲ا}{م}$$

پس اگر متبدل م سے کسی نقطہ کا مقام معلوم کیا جائے اور اس نقطہ پر منحنی کا مماس کھینچا جائے تو م سے اُس زاویہ کا مماس تعبیر ہوتا ہے جو مذکورہ بالا ہندسی مماس منحنی کے محور کے ساتھ بناتا ہے - لیکن یاد رہے کہ مہ استعمال کرنے سے ہم کسروں سے بچتے ہیں -

مثال - اگر دو نقطوں پر کے مماس علی القوائم ہوں تو نقاط تماس کا خط وصل ماسکہ میں سے گزرتا ہے -

فرض کرو کہ نقاط مہ، مہ ہیں، تب چونکہ مماس علی القوائم ہیں اسلئے

$$مہ_۱ مہ_۲ = -۱$$

لیکن ان کو ملانے والا وتر ہے

$$ما (مہ_۱ + مہ_۲) - ۲ لا = ۲ ا مہ_۱ مہ_۲$$

اور یہ محور سے ملتا ہے جہاں

$$لا = - ا مہ_۱ مہ_۲ = ا$$

یعنی ماسکہ پر ملتا ہے -

۲۰۸ - کسی نقطہ سے مکافی کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں اور اگر یہ علی القوائم ہوں تو نقطۂ مذکورہ دہرتب پر واقع ہوتا ہے -

فرض کرو کہ نقطہ کے محدد (لا١، ما١) ہیں، نقطہ مہ پر کے مماس کی مساوات لا - مہ ما + ا مہ^{٢} = ٠ ہے اور اگر یہ (لا١، ما١) میں سے گزرے تو

ا مہ^{٢} - مہ ما١ + لا١ = ٠

جو مہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے، اس کی دو اصلوں سے منحنی پر کے دو نقاط حاصل ہوتے ہیں جن پر کے مماس نقطۂ مذکورہ میں سے گذرتے ہیں اگر یہ اصلیں مہ١، مہ٢ ہوں تو مماسات علی القوائم ہونگے اگر

مہ١ مہ٢ = -١

لیکن مساوات درجہ دوم کے مسائل کی رو سے مہ١ مہ٢ = لا١/ا

یعنی لا١/ا = -١ یعنی لا١ + ا = ٠، بالفاظ دیگر نقطہ مرتب پر واقع ہے۔

مشقیں

٥۔ ایک قطع مکافی کے نقاط مہ١، مہ٢ پر مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع کے محدد ا مہ١ مہ٢، ا (مہ١ + مہ٢) ہیں۔
(یہ نتیجہ نہایت ضروری ہے)

٦۔ ثابت کرو کہ اگر مکافی کے ماسکی وتر کے ایک سرے کے محدد ا م^{٢}، ٢ ا م ہوں تو دوسرے سرے کے محدد ا/م^{٢}، -٢ا/م ہونگے۔

٧۔ مکافی ما^{٢} = ٤ لا میں ان نقطوں کے محدد معلوم کرو جنکے لئے متبدلوں کی قیمتیں ١، ٢، -½، -١ ہیں۔

٨۔ مکافی ما^{٢} = ٤ ا لا کے وتر خاص کے سروں پر متبدل مہ کی کیا قیمت ہے۔

٩۔ مکافی ما^{٢} = لا کے اس نقطہ کے محدد معلوم کرو جس پر کا مماس محور کے ساتھ ٦٠° کا زاویہ بناتا ہے۔

۱۰- (لا۱، ما۱) (لا۲، ما۲) کی جو قیمتیں مہ۱ اور مہ۲ کی رقوم میں ہیں اُن کو مساوات (ما - ما۱) (ما - ما۲) = ما۲ - ۴ ا لا میں درج کرنے سے نقاط مہ۱، مہ۲ کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

۱۱- ایک مکافی کا وتر ن ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُن زاویوں کے مماسوں کا حاصل ضرب جو ن اور ق پر کے ہندسی مماس محور کے ساتھ بناتے ہیں مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ مماس مکافی کے ایک ثابت معین پر ملتے ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ان زاویوں کے مماسوں کا حاصل جمع مستقل ہو تو وتر رأس پر کے مماس سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۲۰۹- قطع مکافی کے کسی نقطہ پر کا عماد۔ نقطہ مہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس میں سے گزرنے والے مماس پر عمود ہے۔

مماس کی مساوات ہے۔

لا - مہ ما + ا مہ۲ = ۰

لہٰذا نقطہ مہ (یعنی ا مہ۲، ۲ ا مہ) پر کے عماد کی مساوات ہے:-

مہ (لا - ا مہ۲) + (ما - ۲ ا مہ) = ۰

یعنی مہ لا + ما = ۲ ا مہ + ا مہ۳ ......(۶)

یہ مساوات عملی طور پر دفعہ ۱۸۱ کی مساوات ہے، طالب علم کو چاہئے کہ م اور مہ کے ہندسی معنوں کا مقابلہ کرنے سے اس امر کی تصدیق کر لے۔

۲۱۰- کسی نقطہ میں سے ایک مکافی کے تین عماد کھینچے جا سکتے ہیں (دفعہ ۱۸۰ سے مقابلہ کرو)

فرض کرو کہ (لا۱، ما۱) نقطہ معلومہ ہے، تب نقطہ مہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اگر مہ لا۱ + ما۱ = ۲ ا مہ + ا مہ۳

یا ا مہ۳ + مہ (۲ ا - لا۱) - ما۱ = ۰ ......(۸)

اب یہ مساوات مہ میں درجہ سوم کی مساوات ہے۔ اس لئے اسکی

تین اصلیں ہیں اور ہر اصل کے جواب میں منحنی پر ایک نقطہ ہے جس پر کا عماد نقطہ (لاَ، ما) میں سے گزرتا ہے۔

انتباہ ۔ مساواتوں کے مسائل کی رو سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) کی ایک اصل یا تینوں اصلیں حقیقی ہیں (دو حقیقی یا تینوں خیالی نہیں ہوسکتیں کیونکہ خیالی اصلیں کے ہمیشہ زوج ہوا کرتے ہیں)، اِن اصلوں کے جواب میں ایک یا تین حقیقی عماد ہونگے اور صورت اول میں باقی عماد خیالی ہونگے۔

نتیجہ صریح ۔ اگر مہ کی متذکرہ بالا مساوات کی اصلیں م۱، م۲، م۳ ہوں تو

$$م_1 + م_2 + م_3 = ۰$$

$$م_1 م_3 + م_3 م_2 + م_2 م_1 = (۲ل - لا_1) / ل$$

$$م_1 م_2 م_3 = \frac{ما_1}{ل}$$

ان تین مساواتوں میں سے پہلی مساوات اس شرط کو تعبیر کرتی ہے کہ تینوں عماد ایک نقطہ پر ملیں کیونکہ یہ نقطہ کے محددوں پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر اِن نقطوں پر کے عماد متراکز ہوں تو معینوں کا حاصل جمع صفر ہوگا کیونکہ یہ مجموعہ ۲ ل (م۱ + م۲ + م۳) کے مساوی ہے۔

باقی دو مساواتوں سے نقطۂ تقاطع کے محدد حاصل ہوتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ اگر کسی مکافی کے نقاط ا اور ب پر کے عماد منحنی پر قطع کریں تو خط اب ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ نقاط م۱، م۲ پر کے عماد منحنی کے نقطہ ن پر ملتے ہیں جسکا متبدل مہ ہے اور جس کے محدد (لاَ، ما) ہیں، تب ظاہر ہے کہ اُن نقطوں کے جواب میں جن پر کے عماد نقطہ ن میں سے گزرتے ہیں مہ کی تین قیمتیں مہ، م۱، م۲ ہیں۔ پس اوپر کی مساواتوں کی رو سے

$$مہ\ م_1 م_2 = \frac{ما}{ل} = \frac{۲ل\ مہ}{ل} = ۲\ مہ \quad یا \quad م_1 م_2 = ۲$$

اب نقاط مہ، مہ۲ کو ملانے والا وتر ا ب

ما (مہ + مہ۲) - ۲ لا = ۲ ا مہ مہ۲

ہے جو منحنی کے محور سے نقطہ لا = - ا مہ مہ۲، ما = ۰

یعنی (- ۲ ا، ۰) پر ملتا ہے۔

پس وتر ا ب محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے جو راس سے ۲ ا کے فاصلہ پر واقع ہے۔

مثال ۲۔ مکافی ما۲ = ۴ لا پر کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے عاد نقطہ (۱۵/۴، -۳/۴) میں سے گزرتے ہیں۔

یہاں ا = ۱ اس لئے لا = مہ۲، ما = ۲ مہ، کسی نقطہ مہ پر کا عاد مہ لا + ما = ۲ مہ + مہ۳ ہے

پس اگر یہ نقطہ (۱۵/۴، -۳/۴) میں سے گزرے تو ہمیں مہ میں درجہ سوم کی مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے۔

مہ۳ + مہ (۲ - لا) - ما = ۰ یعنی مہ۳ - مہ × ۷/۴ + ۳/۴ = ۰

چونکہ یہ مساوات درجہ سوم ہے اس لئے ہم اس کو براہِ راست حل نہیں کر سکتے، لیکن اس کا ایک حل صریحاً مہ = ۱ ہے اور باقی حل جو مہ۲ + مہ - ۳/۴ = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں ۱/۲، - ۳/۲ ہیں۔

پس تین نقاط مطلوبہ یہ ہیں:-

مہ = ۱، لا = ۱، ما = ۲، مہ = ۱/۲، لا = ۱/۴، ما = ۱ اور

مہ = - ۳/۲، لا = ۹/۴، ما = - ۳

طالب علم کو چاہیئے کہ شکل کھینچ کر دیکھے کہ یہ تینوں عاد متراکز ہیں۔

مشقیں

۱۲۔ ثابت کرو کہ مکافی ما۲ = ۴ لا کے وتر خاص کے سروں پر کے عادوں کی مساواتیں لا + ما = ۳ اور لا - ما = ۳ ہیں۔

۱۳۔ اگر مہ پر کا عاد محور سے گ پر ملے اور راس ا ہو تو اگ کا

طول معلوم کرو، اس سے ثابت کرو کہ زیر عماد ل گ مستقل ہے اور نصف وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ نقطہ مہ پر کا عماد منحنی سے دوبارہ جس نقطہ پر ملتا ہے اس کے واسطے متبدل کی قیمت – (مہ^2 + ۲) / مہ ہے۔

اس نقطہ کے محدد لکھو اور مہ = ۱ کے لئے شکل کھینچو۔

۱۵ — مکانی ما^2 = ۴ ا لا پر کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ (۹، -۶) میں سے گزرتے ہیں، شکل بھی کھینچو۔

۱۶ — اگر ن، ق، ر پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ ان کے معینوں کا مجموعہ صفر ہے، اس کی بناء پر ثابت کرو کہ اگر ق اور ر پر کے عماد ایک ثابت نقطہ ن پر کے عماد پر ملیں تو ق ر ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہے۔

۱۷ — ثابت کرو کہ مکانی ما^2 = ۴ ا لا پر کے نقطہ مہ۱ میں سے اس نقطہ پر کے عماد کے علاوہ دو اور عماد کھینچے جا سکتے ہیں اور اُن کے پایوں کے متبدل مہ^2 + مہ مہ۱ + ۲ = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں۔

[مہ کی مساوات درجہ سوم میں لا = ا مہ^2، ما = ۲ ا مہ رکھو اور دیکھو کہ مہ = مہ۱ ایک اصل ہے]

۲۱۱ — متبدلی تعبیر ناقص کی صورت میں۔ خارج المرکز زاویہ۔

ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ پر کے کسی نقطہ کے محددوں کو

لا = ا جم طہ ، ما = ب جب طہ

کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

طہ کے ہندسی معنی ظاہر ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ طہ کی کسی خاص قیمت کے جواب میں ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ن سے ع ج ع پر عمود ن ل

کھینچو اور ل ن کو نَ تک اتنا خارج کرو کہ

نَ ل : ن ل = ا : ب

تب نَ کے محدو لا = ا جم طہ، ما = $\frac{ا}{ب}$ × ب جب طہ = ا جب طہ ہیں۔

پس نَ ہمیشہ ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا جسکو معاون یا امدادی دائرہ کہتے ہیں اور اسکی مساوات

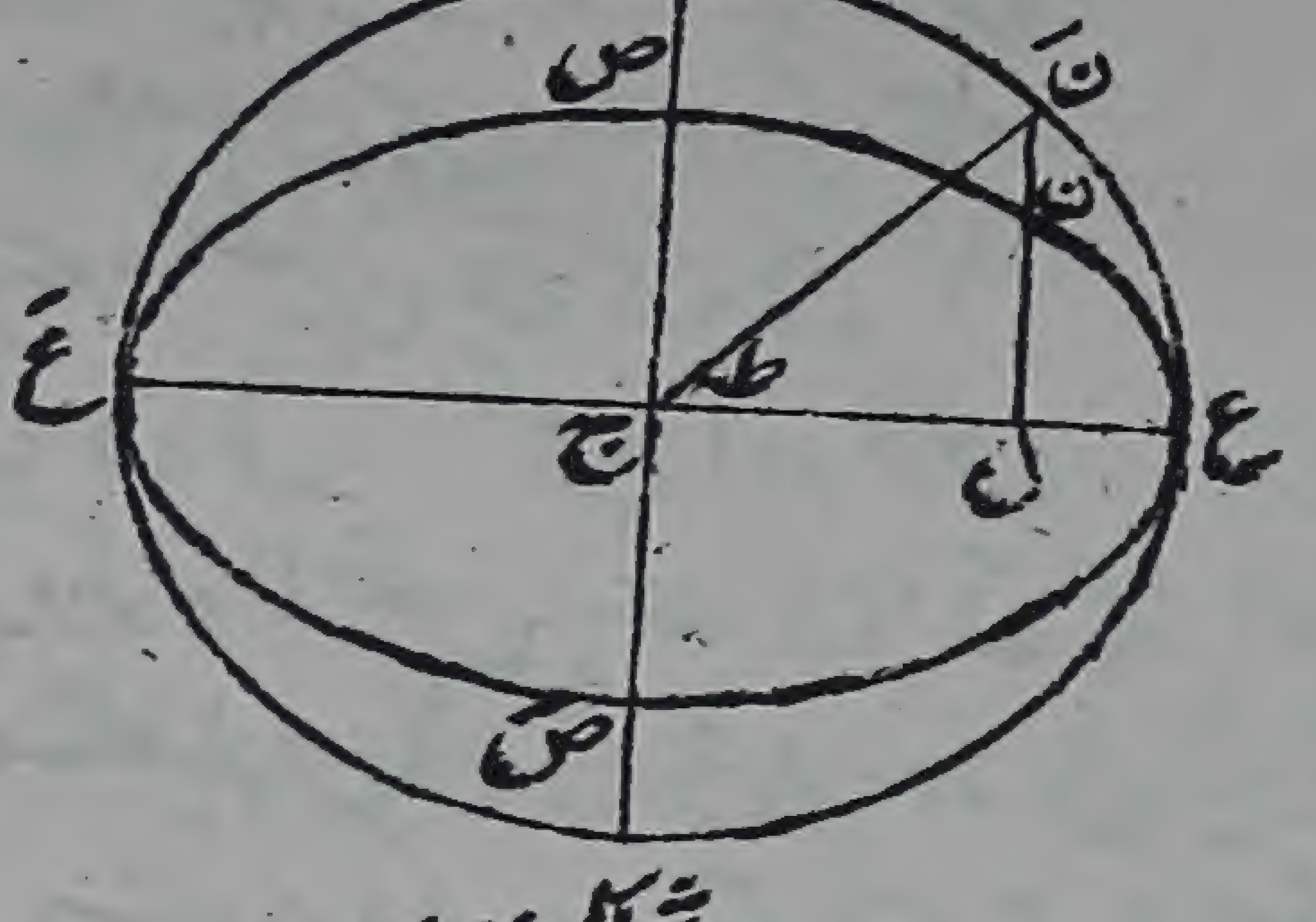
لا^2 + ما^2 = ا^2

ہے اور محور اعظم اس کا قطر ہے۔

علاوہ ازیں چونکہ ج نَ = ا

اور ج ل = ا جم طہ اس لئے

طہ زاویہ ل ج نَ کو تعبیر کرتا ہے۔



شکل ۴۷

لہذا اگر ہم محور اعظم کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں اور ن کے معین کو اتنا خارج کریں کہ وہ دائرہ سے نَ پر ملے تو زاویہ نَ ج ع کو ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں اور ن کے محدو ا جم طہ، ب جب طہ ہیں جہاں طہ خارج المرکز زاویہ ہے۔

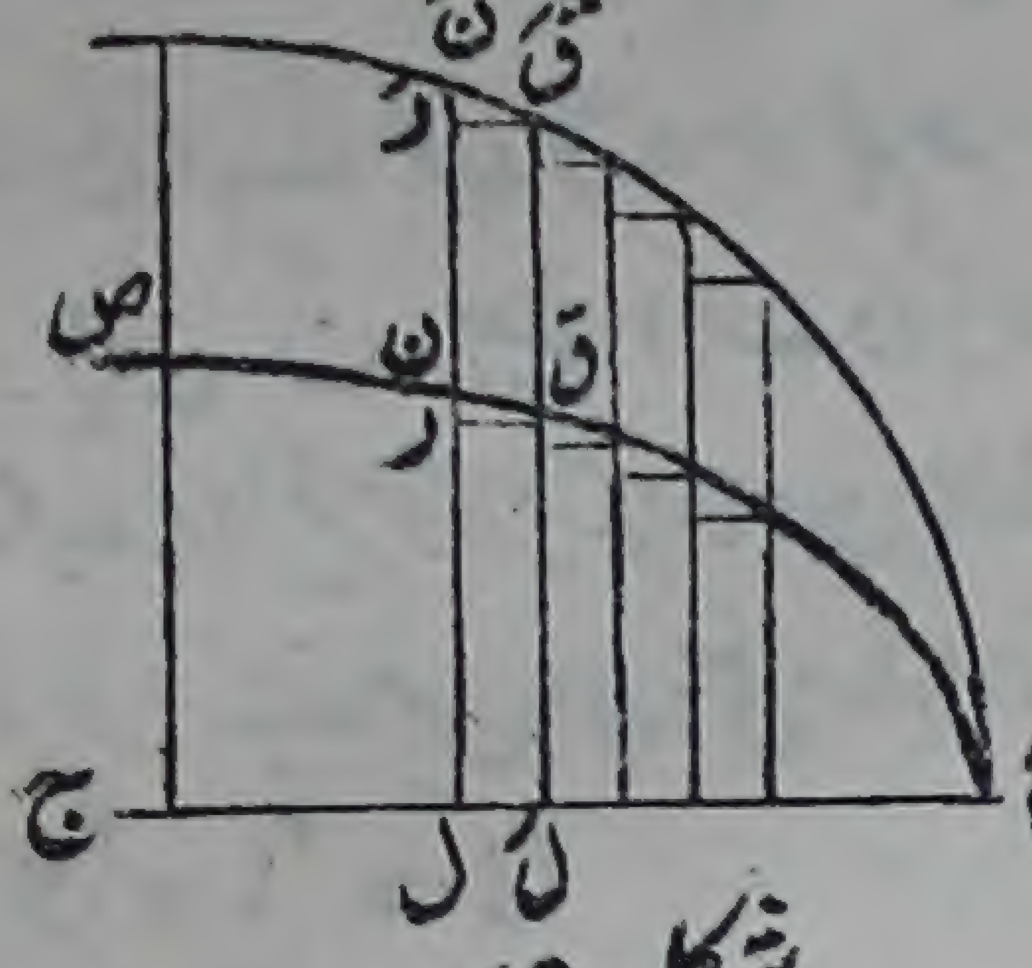
متناظر نقطے۔ امدادی دائرہ پر کا نقطہ نَ، ن کا متناظر نقطہ کہلاتا ہے۔ اور نقاط ن اور نَ کو متناظر نقطے کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ کے محدو لا، ما ہوں تو امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطہ کے محدو لا، $\frac{ا}{ب}$ ما ہونگے۔

خارج المرکز زاویہ کی پیمائش کے طریقہ کو بغور ملاحظہ کیا جاسکے،

اگر ن ناقص پر کا کوئی نقطہ ہو اور نَ معاون دائرہ پر کا متناظر نقطہ ہو تو ن کے خارج المرکز زاویہ سے زاویہ ع ج نَ مراد ہوتا ہے جو محور اعظم کی مثبت سمت اور معاون دائرہ کے نصف قطر ج نَ کے درمیان بنتا ہے۔

۲۱۲ — ثابت کرو کہ ایسے ناقص کا رقبہ جسکے نیم محور ا اور ب ہوں π ا ب ہے۔



شکل ۷۵

فرض کرو کہ محور اعظم کو بہت سے مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ل لَ ان حصوں میں سے ایک حصہ ہے۔ معین نَ ن ل ، قَ ق لَ کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ناقص سے ن، ق پر، امدادی دائرہ سے نَ، قَ پر ملتے ہیں مستطیلوں ل لَ ق ر اور ل لَ قَ رَ کی تکمیل کرو، نیز باقی حصوں میں سے ہر ایک پر بھی اسی طرح مستطیل بناؤ۔

چونکہ $\quad$ ق لَ : قَ لَ = ب : ا

∴ مستطیل ل لَ ق ر : مستطیل ل لَ قَ رَ = ب : ا

اسی طرح باقی کے مستطیل بھی اسی نسبت میں ہیں، پس ان مستطیلوں کے حاصل جمع کو جو ناقص پر منتہی ہوتے ہیں ان مستطیلوں کے حاصل جمع کے ساتھ جو دائرہ پر منتہی ہوتے ہیں نسبت ب : ا ہے۔

لیکن اگر ان حصوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھایا جائے تو ل لَ ق ر کے نمونہ کے مستطیلوں کا حاصل جمع ناقص کے بالائی نصف کے رقبہ کے مساوی ہو جاتا ہے اور ل لَ قَ رَ کے نمونہ کے مستطیلوں کا مجموعہ دائرہ کے بالائی نصف کے رقبہ کے مساوی ہو جاتا ہے۔ لہذا

ناقص کا رقبہ : دائرہ کا رقبہ = ب : ا

لیکن دائرہ کا رقبہ π ا² ہے، لہذا ناقص کا رقبہ

$$= \pi\, ا^2 \times \frac{ب}{ا} = \pi\, ا\, ب \quad ....(۷)$$

مثال — ناقص $ا_1 لا^2 + ۲ ھ_1 لا ما + ب_1 ما^2 = ۱$ کا رقبہ دریافت کرو۔

ہمیں نصف محوروں کا حاصل ضرب معلوم کرنا چاہیئے۔
اب نصف محوروں ا، ب کی قیمتیں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں۔

ھ۲۱ = (ا۱ - ۱/ر۲) (ب۱ - ۱/ر۲)

یا ۱/ر۴ - ۱/ر۲ (ا۱ + ب۱) + ا۱ ب۱ - ھ۲۱ = ۰

لہذا ۱/ا۲ ب۲ = ا۱ ب۱ - ھ۲۱ (ٹیوٹوریل الجبرا، دفعہ ۱۵۶)

پس رقبہ = π ا ب = π / √(ا۱ ب۱ - ھ۲۱)

(علامت جذر کے اندر کی رقم مثبت ہے کیونکہ ناقص کے لئے ا۱ ب۱ - ھ۲۱ > ۰

مشقیں

۱۸ — مکافی ما۲ = ۴ ا لا کے نقاط مہ، مہَ پر جو عماد کھینچ سکتے ہیں اُن کے نقاطِ تقاطع کے محدد شکل ذیل میں معلوم کرو

لا = ۲ ا + ا (مہ۲ + مہ مہَ + مہَ۲)، ما = - ا مہ مہَ (مہ + مہَ)

۱۹ — اگر نقطہ مہ نزدیک آتے آتے بالآخر نقطہ مہَ پر منطبق ہوجائے تو ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے

لا = ۲ ا + ۳ ا مہ۲ ، ما = - ۲ ا مہ۳

اس قسم کے دو متصل عمادوں کا نقطۂ تقاطع مہ پر کا مرکز انحنا کہلاتا ہے۔

۲۰ — دو معینوں اور ناقص کے درمیان جو رقبہ گھر جاتا ہے اُس کی نسبت اُس رقبہ کے ساتھ جو دو معینوں اور دائرہ کے درمیان گھر جاتا ہے ب : ا ہے۔

۲۱ — اگر ن، ق، ر ناقص پر کے تین نقطے ہوں اور نَ، قَ، رَ امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطے ہوں تو

△ ن ق ر : △ نَ قَ رَ = ب : ا

۱۱۳ - ایک ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاوئے عہ اور بہ ہیں، ان کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

ان نقطوں کے محدد (ا جم عہ، ب جب عہ)، (ا جم بہ، ب جب بہ) ہیں، پس ان نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{ا جم عہ}}{\text{ما} - \text{ب جب عہ}} = \frac{\text{ا (جم عہ} - \text{جم بہ)}}{\text{ب (جب عہ} - \text{جب بہ)}}$$

یا ب لا (جب عہ - جب بہ) - ا ما (جم عہ - جم بہ) - ا ب (جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ) = ۰

یا ب لا ۲ جب $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}$ جم $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$ + ا ما ۲ × جب $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$ جب $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}$

- ا ب جب (عہ - بہ) = ۰

اسلئے ۲ جب $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}$ پر تقسیم کرنے سے

ب لا جم $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$ + ا ما جب $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$ - ا ب جم $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}$ = ۰

یا $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جم $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$ + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$ = جم $\frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}$ .....(۸)

نتیجہ صریح - نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جم عہ + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب عہ = ۱ ....(۹)

یہ مساوات عہ اور بہ کو ملانے والے وتر کی مساوات میں عہ = بہ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے، اس صورت میں عہ، بہ کو ملانے والا وتر عہ پر کا مماس ہو جاتا ہے۔

۱۱۴ - اُن نقاط کو ملانے والے وتر کی مساوات جن کے خارج المرکز زاوئے عہ + بہ اور عہ - بہ ہیں حسب ذیل ہے

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جم $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ + عہ - بہ) + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ + عہ - بہ)

= جم $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ - عہ + بہ)

یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جم عہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\ \text{جب عہ} = \text{جم بہ}$ جو نہایت سادہ شکل کی مساوات ہے

اب اگر اس مساوات میں بہ مستقل ہو تو یہ وتر اُس ناقص کے نقطہ عہ پر کا مماس ہو جاتا ہے جسکے محور ا جم بہ، ب جم بہ ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ جن نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق ایک مستقل مقدار کے مساوی ہو اُن کو ملانے والا وتر ہمیشہ ایک ناقص کو مس کرتا ہے -

نتیجہ صریح - اگر نقاط $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ)، $\frac{۱}{۲}$ (عہ − بہ) ماسکی وتر کے سرے ہوں تو نقطے لا = ± ا ز ، ما = ۰ وتر کی مساوات کو لازماً پورا کرتے ہیں جس سے جم بہ = ± ز جم عہ -

۲۱۵ - اگر ایک ناقص کے ماسکوں سے اس کے کسی مماس پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب محور اصغر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے -

ماسکوں کے محدد (ا ز ، ۰) اور (− ا ز ، ۰) ہیں، ان میں سے جو عمود نقطہ عہ پر کے مماس یعنی لا جم عہ / ا + ما جب عہ / ب = ۱ پر کھینچے جائیں اُن کے طول یہ ہیں

$$\frac{\frac{\text{از جم عہ}}{\text{ا}} - ۱}{\sqrt{\frac{\text{جم}^۲\text{عہ}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{جب}^۲\text{عہ}}{\text{ب}^۲}}} \quad \text{اور} \quad \frac{-\frac{\text{از جم عہ}}{\text{ا}} - ۱}{\sqrt{\frac{\text{جم}^۲\text{عہ}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{جب}^۲\text{عہ}}{\text{ب}^۲}}}$$

ان کا حاصل ضرب ہے،

$$\frac{۱ - \text{ز}^۲\ \text{جم}^۲\ \text{عہ}}{\text{ب}^۲\ \text{جم}^۲\ \text{عہ} + \text{ا}^۲\ \text{جب}^۲\ \text{عہ}}\ \text{ا}^۲\text{ب}^۲ = \frac{۱ - \text{ز}^۲\ \text{جم}^۲\ \text{عہ}}{\text{ا}^۲(۱ - \text{ز}^۲)\ \text{جم}^۲\ \text{عہ} + \text{ا}^۲\ \text{جب}^۲\ \text{عہ}}\ \text{ا}^۲\text{ب}^۲$$

$$= \frac{۱ - \text{ز}^۲\ \text{جم}^۲\ \text{عہ}}{\text{ا}^۲\ (۱ - \text{ز}^۲\ \text{جم}^۲\ \text{عہ})}\ \text{ا}^۲\text{ب}^۲ = \text{ب}^۲$$

۲۱۶ - اگر ج ن اور ج ق ایک ناقص کے مزدوج قطر ہوں جو دونوں

لا کے محور سے اوپر ہیں یا دونوں نیچے تو ن اور ق کے خارج المرکز زاویوں کا فرق ایک قائمہ کے مساوی ہے۔

اگر ن اور ق کے خارج المرکز زاوئے عہ اور بہ ہوں تو ج ن اور ج ق کی مساداتیں ہیں

$$\text{ما} = \text{لا}\,\frac{\text{ب جب عہ}}{\text{ا جم عہ}} \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{لا}\,\frac{\text{ب جب بہ}}{\text{ا جم بہ}}$$

لیکن اگر خط ما = م لا اور ما = مَ لا مزدوج قطر ہوں تو

$$\text{م مَ} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2} .$$ (دیکھو مشق ۶ صفحہ ۱۳۵)

لہذا
$$\frac{\text{ب}^2\ \text{جب عہ جب بہ}}{\text{ا}^2\ \text{جم عہ جم بہ}} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

$$\therefore \text{جم عہ جم بہ} + \text{جب عہ جب بہ} = 0$$

$$\text{یا} \quad \text{جم}\,(\text{عہ} - \text{بہ}) = 0$$

پس عہ − بہ ایک قائمہ کے مساوی ہے یا تین قائموں کے۔

لیکن چونکہ ج ن اور ج ق دونوں لا کے محور سے اوپر ہیں یا دونوں نیچے، اس لئے فرق مذکور تین قائموں کے مساوی نہیں ہوسکتا۔

نتیجہ صریح — اگر ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہوں اور ن کا متبدل عہ ہو تو ق کا متبدل $\text{عہ} + \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

۲۱۷ — ناقص کے دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہوتا ہے اور اگر ان دو نصف قطروں کو متصل اضلاع مان کر اُن پر ایک متوازی الاضلاع بنایا جائے تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ بھی مستقل ہوگا۔

دفعہ ۲۱۶ نتیجہ صریح کی رُو سے ن اور ق کے محدد ہیں:-

$$\text{ا جم عہ، ب جب عہ} \quad \text{اور} \quad \text{ا جم}\left(\text{عہ} + \frac{\pi}{2}\right)\text{، ب جب}\left(\text{عہ} + \frac{\pi}{2}\right)$$

یا ا جم عہ ، ب جب عہ اور - ا جب عہ ، ب جم عہ

لہذا ج ن۲ = ا۲ جم۲ عہ + ب۲ جب۲ عہ ، ج ق۲ = ا۲ جب۲ عہ + ب۲ جم۲ عہ

جن سے فوراً ج ن۲ + ج ق۲ = ا۲ + ب۲

نیز مذکورہ متوازی الاضلاع = ۲ △ ج ن ق ،

= ۲ × ½ { ا جم عہ ب جم عہ - ب جب عہ (- ا جب عہ) }

= ا ب (جم۲ عہ + جب۲ عہ) = ا ب (حصہ اول دفعہ ۴ نتیجہ صریح)

پس دونوں نتیجے ثابت ہوئے -

مشقیں

۲۲ - ثابت کرو کہ مساوی مزدوج قطروں کے سروں کے خارج المرکز زاوے ۴۵° اور ۱۳۵° ہیں -

۲۳ - ناقص لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ا کے اُن نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات دریافت کرو جن کے خارج المرکز زاوے ۳۰° اور ۶۰° ہیں، نیز اس وتر کی مساوات معلوم کرو جو خارج المرکز زاویوں ۳۰° اور ۶۰° والے نقطوں کو ملاتا ہے -

۲۴ - ثابت کرو کہ ناقص لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ا کے دو مزدوج قطروں کے سروں کو ملانے والا خط ناقص لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ۲ کو مس کرتا ہے -

۲۵ - نقاط عہ ، بہ پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کے محدد بشکل ذیل معلوم کرو -

لا = ا جم (عہ + بہ)/۲ / جم (عہ - بہ)/۲ ، ما = ب جب (عہ + بہ)/۲ / جم (عہ - بہ)/۲

اگر عہ + بہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ (لا ، ما) کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکز میں سے گزرتا ہے اور اگر عہ - بہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ طریق ایک ناقص ہے

جسکی مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = قط^2 \frac{ج}{2}$ ہے جہاں عہ - بہ = ج

۲۶ - اگر ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہو تو مسلّمہ طریق کتابت کے مطابق ثابت کرو کہ

$ج ق^2 = ا^2(1 - ز^2 جم^2 طہ)$ ، $س ن = ا(1 - ز جم طہ)$

$سَ ن = ا(1 + ز جم طہ)$ اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$س ن \times سَ ن = ج ق^2$$

۲۷ - ثابت کرو کہ وتر خاص کا وہ حصہ جو امدادی دائرہ اور ناقص کے درمیان منقطع ہوتا ہے محور اصغر کے مساوی ہے۔

۲۸ - ناقص کے ایک مماس پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور جس کا طول ع ہے؛ اگر ن وہ نقطہ ہو جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے تو ثابت کرو کہ ج ن = ع

(یاد رہے کہ $ع^2 = ا^2 جم^2 عہ + ب^2 جب^2 عہ$)

۲۹ - شکل $\frac{(لا-لا_1)(لا-لا_2)}{ا^2} + \frac{(ما-ما_1)(ما-ما_2)}{ب^2} = \frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1$

سے نقاط عہ، بہ کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

۳۰ - ایک ناقص پر دو نقطے ن، ق ہیں اور امدادی دائرہ پر ان کے متناظر نقطے نَ، قَ ہیں۔ اگر ن ق کی مساوات $ل لا + م ما = 1$ ہو تو ثابت کرو کہ نَ قَ کی مساوات $ل لا + م \times \frac{ا}{ب} ما = 1$ ہوگی

(دونوں خطوں کی مساواتیں ن اور ق کے خارج المرکز زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو)

اس سے حاصل کرو کہ ن ق، نَ قَ محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۳۱ - ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ پر کا مماس اور امدادی دائرہ کے متناظر نقطہ پر کا مماس دونوں ایک دوسرے سے محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۲۱۸ — ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔

نقطہ طہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس نقطہ میں سے گزرنے والے مماس پر عمود وار ہے۔

لیکن مماس کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب طہ} = 1$ ہے

اسلئے عماد ہے $\frac{\text{ا}}{\text{جم طہ}}\left(\text{لا} - \text{ا جم طہ}\right) = \frac{\text{ب}}{\text{جب طہ}}\left(\text{ما} - \text{ب جب طہ}\right)$

یا $\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots (10)$

یہ مساوات عماد کی اُس مساوات سے بھی جو پہلے دی جا چکی ہے حاصل ہو سکتی ہے۔

۲۱۹ — کسی نقطہ سے ناقص کے چار عماد کھینچے جا سکتے ہیں۔

اگر نقطہ طہ پر کا عماد ایک معلومہ نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ میں سے گزرے تو

$$\frac{\text{ا لا}_1}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}_1}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

یہ طہ میں ایک مساوات ہے جس سے ہم مخروطی پر کے وہ تمام نقطے معلوم کر سکتے ہیں جن پر کے عماد نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ میں سے گزرتے ہیں۔

اب کسی ایسی مساوات کو حل کرنے کی جس میں جم طہ اور جب طہ دونوں شامل ہوں عام ترکیب یہ ہے کہ ہم فرض کریں مس $\frac{\text{طہ}}{2} = \text{ت}$

جس سے جم طہ $= \frac{1 - \text{ت}^2}{1 + \text{ت}^2}$ اور جب طہ $= \frac{2\,\text{ت}}{1 + \text{ت}^2}$ ہے

یہ قیمتیں مندرج کرنے سے ہمیں ت میں مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

موجودہ صورت میں

$$\frac{\text{ا لا}_1(1 + \text{ت}^2)}{1 - \text{ت}^2} - \frac{\text{ب ما}_1(1 + \text{ت}^2)}{2\,\text{ت}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)$$

یا $\text{ا لا}_1 \times 2\,\text{ت}(1 + \text{ت}^2) - \text{ب ما}_1(1 - \text{ت}^4) = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,2\,\text{ت}\,(1 - \text{ت}^2)$

یعنی $ت^۴$ ب ما + ۲ $ت^۳$ (ا لا + $ا^۲$ - $ب^۲$) + ۲ ت (ا لا - $ا^۲$ + $ب^۲$) - ب ما = ۰

.... (ب)

یہ درجہ چہارم کی مساوات ہے، اسلئے اس کی چار اصلیں ہیں، ہر ایک اصل سے جم طہ اور جیب طہ کی ایک ایک قیمت حاصل ہوتی ہے، اس سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے جا سکتے ہیں۔

انتباہ ــ مساوات (ب) کی اصلیں خیالی بھی ہوسکتی ہیں، مساواتوں کے مسائل کی رو سے اس کی چاروں یا دو اصلیں حقیقی ہونگی، اس لئے ان کے جواب میں چار یا دو عماد حقیقی ہوں گے اور دوسری صورت میں باقی عماد خیالی ہوں گے۔

۲۲۰ ــ دفعہ گزشتہ سے طالب علم کو معلوم ہوگیا ہوگا کہ خارج المرکز زاویوں کے متعلقہ سوالوں کو حل کرنے میں ت = مس $\frac{طہ}{۲}$ رکھنے سے کیا فائدہ ہوتا ہے، ت کی اس قیمت سے

$$لا = ا \text{ جم } طہ = ا \frac{۱ - ت^۲}{۱ + ت^۲} ، \quad ما = ب \text{ جب } طہ = ب \frac{۲ ت}{۱ + ت^۲}$$

یعنی اس طرح منحنی کے کسی نقطہ کے محدد ایک متبدل ت کی رقوم میں منطق طور پر بیان ہو گئے ــ ت کو اس طرح داخل کر کے اختصار کرنے کی وجہ یہی ہے کیونکہ منطق تفاعلوں کے خواص ہمیں اچھی طرح سے معلوم ہیں۔ قطع زائد پر بھی یہی امور صادق آتے ہیں۔

متبدلی تعبیر قطع زائد کی صورت میں ۔ زائد $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے کسی نقطہ کے محدد ایک متبدل طہ کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتے ہیں

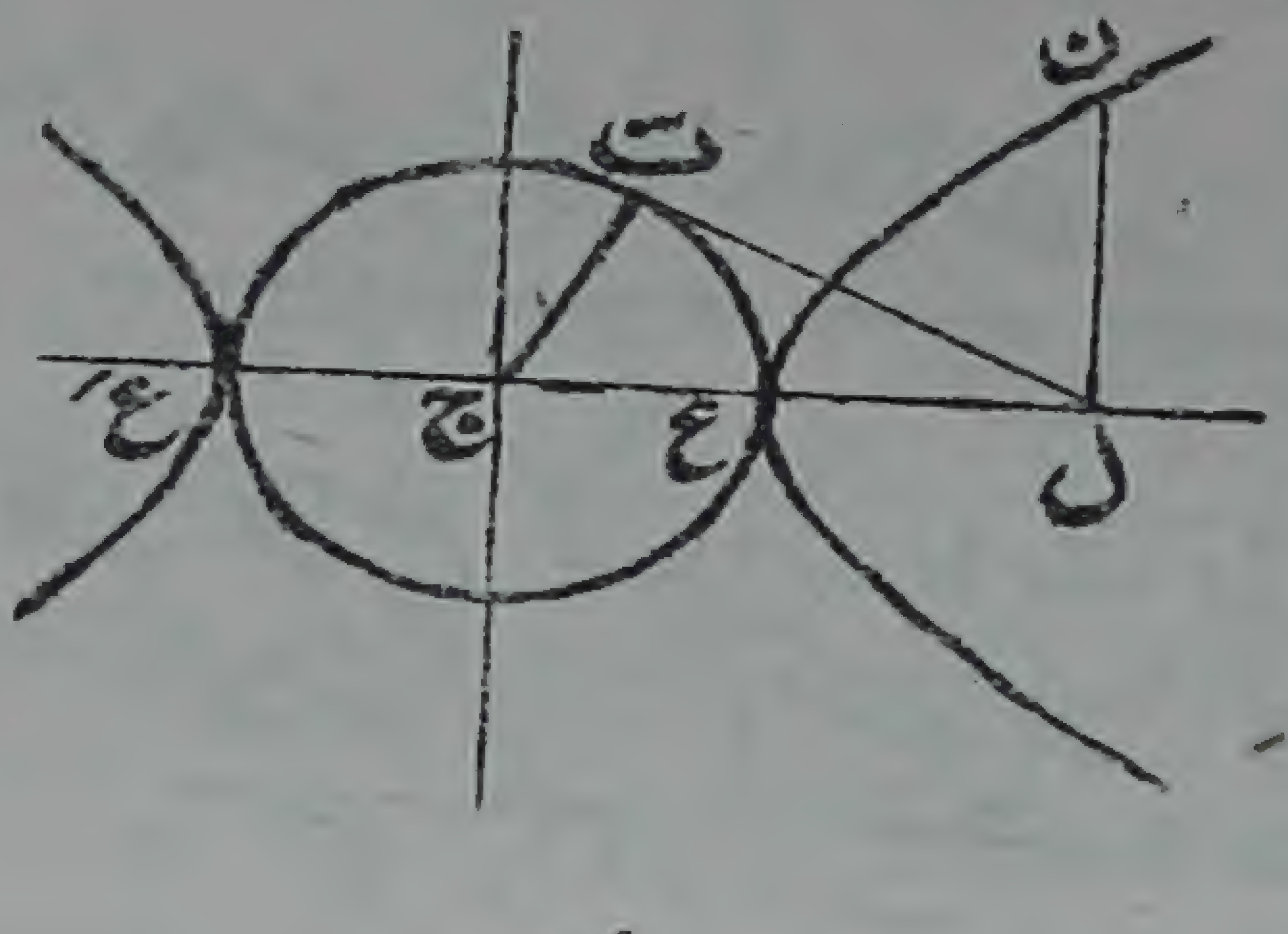
$$لا = ا \text{ قط } طہ ، \quad ما = ب \text{ مس } طہ \quad .....$$ (دیکھو دفعہ ۲۰۲)

طہ کے ہندسی معنی ــ فرض کرو کہ ن ایک نقطہ ہے جسکے محدد ا قط طہ اور ب مس طہ ہیں۔

معین ن ل کھینچو اور ل سے
امدادی دائرہ کا مماس
ل ت کھینچو، ج ت کو ملاؤ۔
تب قط ت ج ل = ج ل / ج ت

= لا / ا = قط طہ

اس لئے زاویہ ت ج ل
نقطہ ن کے متبدلی زاویہ
طہ کے برابر ہے۔

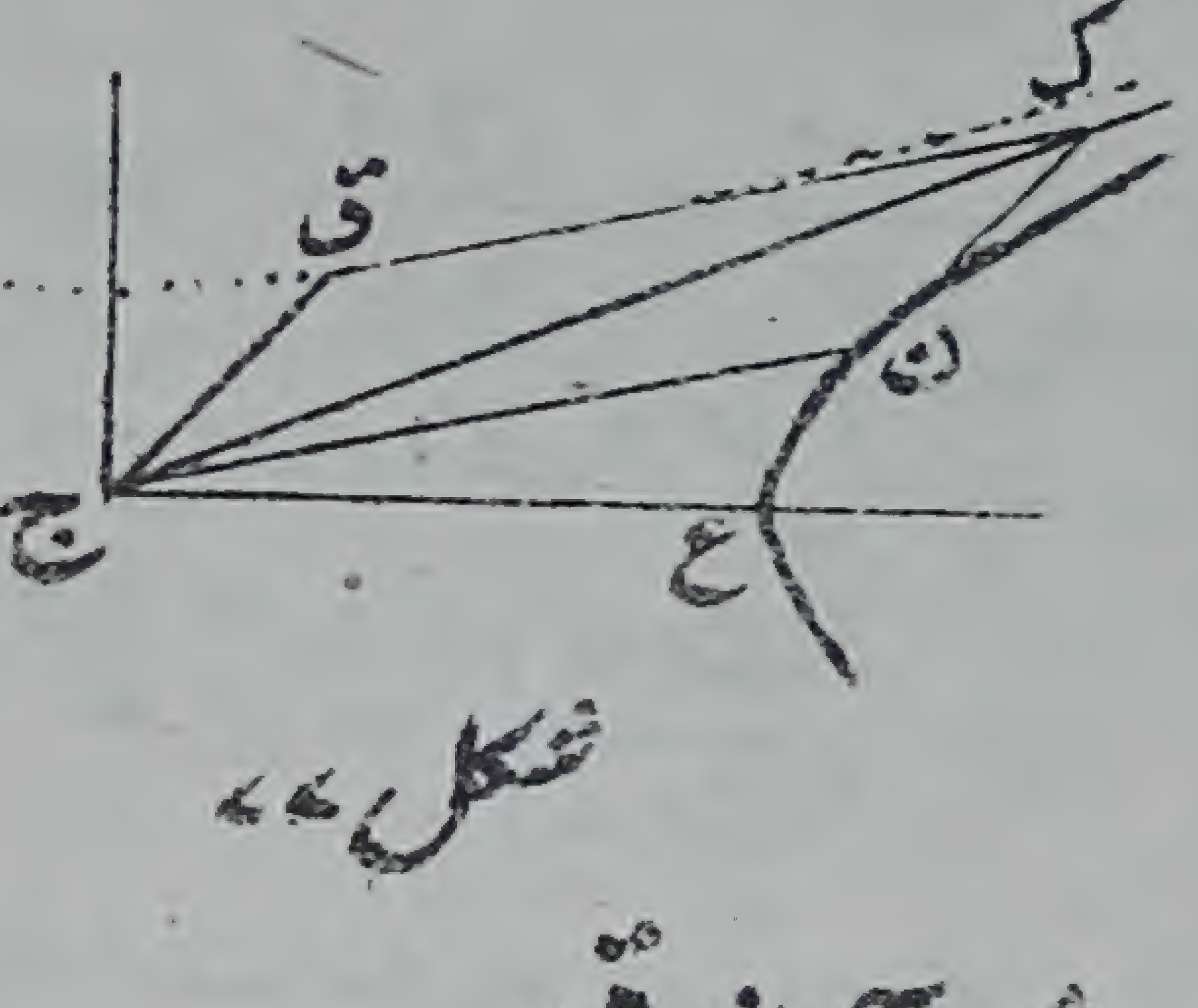


شکل ۷۶

قطع زائد کے مزدوج قطروں کے خواص۔ ان کے بعض خواص زاویہ طہ کی مدد سے، دفعہ ۱۶۷ کے طریقہ کی نسبت زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

اگر ج ن ایک قطر ہو اور ج ق اس کا مزدوج قطر ہو تو نقطہ ن کے محدد ا قط طہ، ب مس طہ ہونگے اور نقطہ ق کے محدد ا مس طہ اور ب قط طہ ہونگے۔

(۱) ∴ ج ن^2 − ج ق^2
= (ا^2 قط^2 طہ + ب^2 مس^2 طہ)
− (ا^2 مس^2 طہ + ب^2 قط^2 طہ)
= (ا^2 − ب^2) (قط^2 طہ − مس^2 طہ)
= ا^2 − ب^2



شکل ۷۷

(۲) اگر متوازی الاضلاع ج ن ک ق کی تکمیل کی جائے تو
رقبہ ج ن ک ق = ۲ △ ج ن ق
= ا ب (قط^2 طہ − مس^2 طہ) دیکھو حصہ اول، دفعہ ۴۴ نتیجہ صحیح
= ا ب

(۳) مماسوں ن ک، ق ک کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{لا قط ط}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما مس ط}}{\text{ب}} = ۱$$

$$\frac{\text{لا مس ط}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما قط ط}}{\text{ب}} = ۱$$

ان کا نقطۂ تقاطع ک مساوات ذیل کو پورا کرتا ہے

$$\frac{\text{لا قط ط}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما مس ط}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا مس ط}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما قط ط}}{\text{ب}}$$

یا $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جو ایک متقارب ہے

اس لئے ک متقارب پر واقع ہوتا ہے۔

۳۲۲ - کسی نقطہ سے قطع زائد کے عماد۔

(۱) دفعہ ۲۱۸ کے طریقہ کے مطابق یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ قطع زائد کے کسی نقطہ ط پر کا عماد ہے

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{قط ط}} + \frac{\text{ب ما}}{\text{مس ط}} = \text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ \quad ....(۱۱)$$

(۲) پس وہ نقطے جن پر کے عماد نقطہ ($\text{لا}_۱$، $\text{ما}_۱$) میں سے گزرتے ہیں

مساوات $\frac{\text{ا لا}_۱}{\text{قط ط}} + \frac{\text{ب ما}_۱}{\text{مس ط}} = \text{ا}^۲ + \text{ب}^۲$ سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے رکھو $\text{مس}\ \frac{\text{ط}}{۲} = \text{ت}$

تب $\text{قط ط} = \frac{۱ + \text{ت}^۲}{۱ - \text{ت}^۲}$ اور $\text{مس ط} = \frac{۲\ \text{ت}}{۱ - \text{ت}^۲}$

اور مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ب ما}_۱\text{ت}^۴ + ۲\ \text{ت}^۳\left\{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ا لا}_۱\right\} + ۲\ \text{ت}\left\{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ا لا}_۱\right\} - \text{ب ما}_۱ = ۰$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ سے ناقص کی طرح زائد پر بھی چار عاد کھینچ سکتے ہیں۔

۲۲۴۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح مخروطیوں کی صورت میں منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدد ایک متغیر کی رقوم ہیں جسکو متبدل کہتے ہیں بیان کئے جا سکتے ہیں۔ برعکس اس کے جب کسی نقطہ کے محدد ایک نامعلوم مقدار کی رقوم میں بیان کئے جائیں تو نقطہ ایک منحنی پر واقع ہوتا ہے جسکی مساوات اس متبدل کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال۔ اگر لا = ا جم ط + ب جب ط + ج اور ما = اَ جم ط + بَ جب ط + جَ تو ثابت کرو کہ (لا، ما) ایک ثابت مخروطی پر واقع ہوتا ہے۔

یہاں ہمیں مساواتوں

ا جم ط + ب جب ط + ج - لا = ۰ اور اَ جم ط + بَ جب ط + جَ - ما = ۰ میں سے ط کو ساقط کرنا ہے۔

تھوڑے عرصہ کے لئے جم ط اور جب ط کو دو جدا جدا غیر معلوم مقداریں تصور کرکے اوپر کی مساواتوں سے حاصل کرو

جم ط ـــــــ جب ط ـــــــ ۱

{ب (جَ - ما) - بَ (ج - لا)} = {اَ (ج - لا) - ا (جَ - ما)} = ا بَ - اَ ب

لہذا چونکہ جم^{2} ط + جب^{2} ط = ۱

{ب (جَ - ما) - بَ (ج - لا)}^{2} + {اَ (ج - لا) - ا (جَ - ما)}^{2} = (ا بَ - اَ ب)^{2}

جو درجہ دوم کی مساوات ہے اور جس سے اس نیا پیا ایک مخروطی کا طریق تعبیر ہوتا ہے۔

دوسرے درجہ کی رقمیں ہیں

(ب ما - بَ لا)^{2} + (ا ما - اَ لا)^{2}

اور اس کے اجزائے ضربی خیالی ہیں یا معیاری طریق کتابت کے موافق ا ب > ھ^{2}، پس منحنی قطع ناقص ہے۔

مشقیں

۳۲ — ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ پر دو نقطے ہیں جن کے خارج المرکز زاوئے بالترتیب طہ، فہ ہیں، ان نقطوں پر کے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کے محدد شکل ذیل میں معلوم کرو۔

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}}\ \text{جم طہ جم فہ}\ \frac{\text{جم}\frac{\text{طہ}+\text{فہ}}{2}}{\text{جم}\frac{\text{طہ}-\text{فہ}}{2}}\ ،\quad \text{ما} = -\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}}\ \text{جب طہ جب فہ}\ \frac{\text{جب}\frac{\text{طہ}+\text{فہ}}{2}}{\text{جم}\frac{\text{طہ}-\text{فہ}}{2}}$$

۳۳ — اگر نقطہ فہ بتدریج طہ کے نزدیک آتا آتا بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہو جاتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}}\ \text{جم}^3\ \text{طہ}\ ،\quad \text{ما} = -\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}}\ \text{جب}^3\ \text{طہ}$$

طہ پر کے دو متصل عمادوں کا یہ نقطۂ تقاطع اس نقطہ پر کا مرکز انحنا کہلاتا ہے۔

۳۴ — بتاؤ کہ ناقص کے مرکز سے جو چار عماد کھینچ سکتے ہیں ان کے پائے کہاں واقع ہوتے ہیں۔

۳۵ — ثابت کرو کہ ایک ناقص کے محور اعظم پر کے نقطہ (سا، ۰) سے (محور اعظم کی سمتوں کے علاوہ) دو عماد کھینچ سکتے ہیں، نیز مس $\frac{1}{2}$ طہ کے لئے مساوات اس شکل

$$\text{ت}^2(\text{ا سا} + \text{ا}^2 - \text{ب}^2) + (\text{ا سا} - \text{ا}^2 + \text{ب}^2) = 0$$

میں معلوم کرو۔

۳۶ — ثابت کرو کہ شکل ۷۷ کے خط ن ق کی سمت نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں۔

۳۷ — ایک ناقص کے محور اصغر کے نقطہ (۰، ہ) سے محور اصغر کی

دو سمتوں کے علاوہ دو اور عاد کھینچ سکتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ ت کی مساوات کی دو اصلیں = ۱ محور اصغر کے سروں کے جواب ہیں ہیں اور باقی اصلیں مساوات

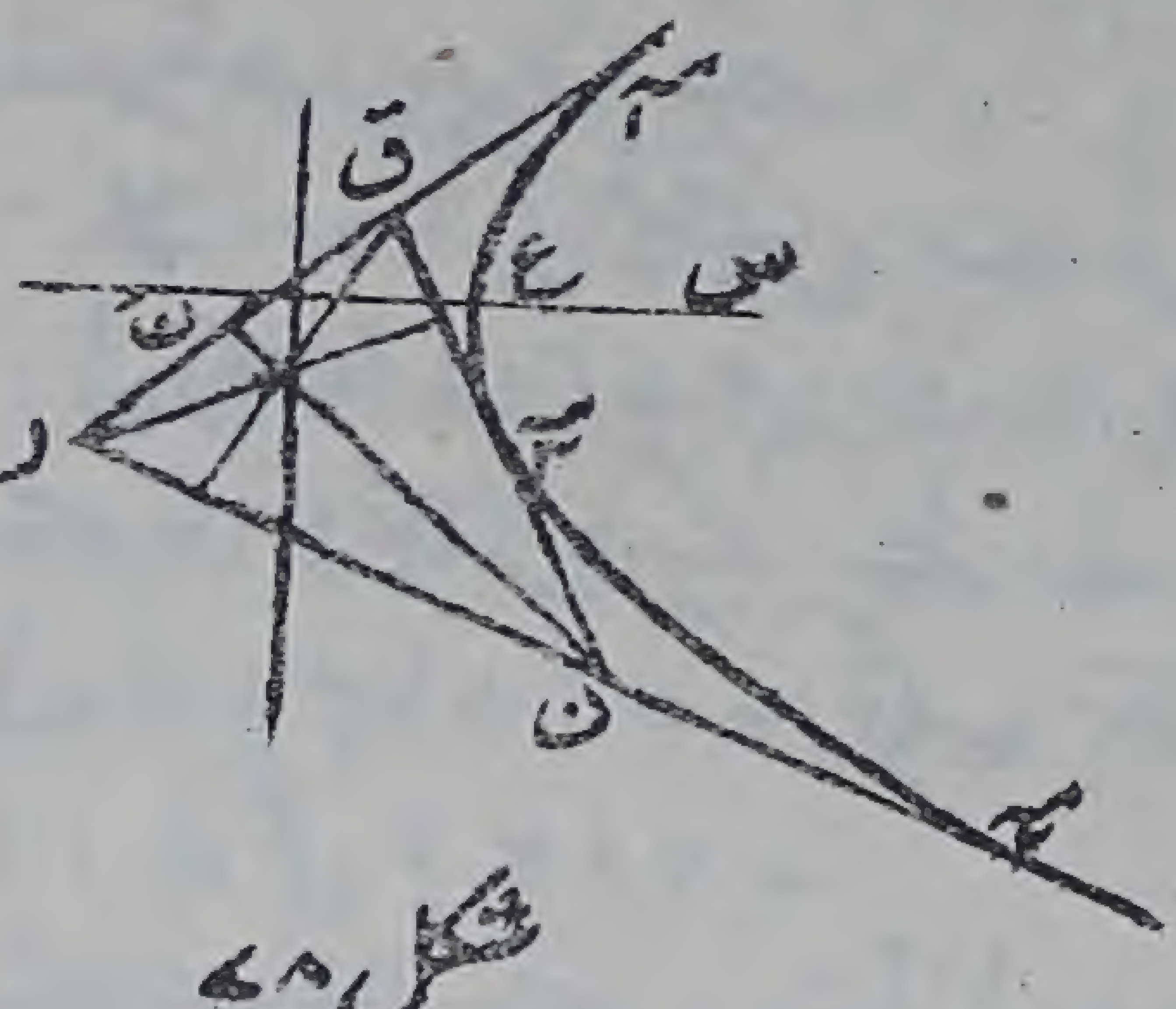
$$ب\ حہ\ (ت^2 + ۱) + ۲\ (ا^2 - ب^2)\ ت = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ اس سے حاصل کرو کہ باقی دو عاد صرف اسی صورت میں حقیقی ہونگے جبکہ حہ کی قیمت $\frac{ا^2 - ب^2}{ب}$ سے تعداداً کم ہو۔

توضیحی مثالیں

(۱) کسی مکافی کے تین مماسوں سے جو مثلث بنتا ہے اس کا مرکز ہندسی مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مکافی $ما^2 = ۴\ ا\ لا$ ہے، نیز نقاط $م_1$، $م_2$، $م_3$ پر کے مماسوں سے مثلث ن ق ر بنتا ہے۔ اب ہمیں ان عمودوں کی مساواتیں معلوم کرنا ہے جو نقاط ن ق ر سے مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں۔



شکل ۸۵

نقطہ ر، $م_2$، $م_3$ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ہے اس لئے اس کے محدد $ا\ م_2\ م_3$، $ا\ (م_2 + م_3)$ ہیں (دیکھو مشق ۵ دفعہ ۲۰۸) اس لئے اس نقطہ سے ن ق یعنی $لا - م_1\ ما + ا\ م_1^2 = ۰$ پر کا عمود ہے

$$م_1\ (لا - ا\ م_2\ م_3) + (ما - ا\ \overline{م_2 + م_3}) = ۰$$

یہ مرتب سے ملتا ہے جہاں $لا = -\ ا$ اور اس لئے

$$ما = ا\ (م_2 + م_3) - م_1\ (-\ ا - ا\ م_2\ م_3)$$

یا ما = ا { مہ۲ مہ۳ + مہ۳ مہ۱ + مہ۱ مہ۲ }

لیکن یہ مہ۱، مہ۲، مہ۳ کے لحاظ سے متشاکل ہے، اس لئے دوسرے عمود بھی مرتب سے اسی نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) اگر لا = (ت۲ + ۱) / ((ت − ۱)(ت − ۲))، ما = (ت + ۱) / ((ت − ۱)(ت − ۲))

تو ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) قطع زائد پر واقع ہے، اس کے متقارب دریافت کرو۔

ان مساواتوں میں سے حسب معمول ت کو ساقط کرنے سے ہمیں لا اور ما میں درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔

متقارب مطلوبہ محصلہ مساوات سے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن ذیل کا طریقہ زیادہ سبق آموز ہے۔

لاتناہی پر کے نقطہ کے لئے لا اور ما دونوں لامتناہی ہوتے ہیں، لہذا قیمتوں ت = ۱ یا ت = ۲ سے منحنی کے لاتناہی پر کے نقطے حاصل ہوتے ہیں۔

اب اگر ل لا + م ما + ۱ = ۰ ایک متقارب ہے تو یہ منحنی سے لاتناہی پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے۔

لا اور ما کی قیمتیں ت کی رقوم میں درج کرنے سے

ل (ت۲ + ۱) + م (ت + ۱) + (ت − ۱)(ت − ۲) = ۰

جس سے نقاط تقاطع کے لئے ت کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس اگر ل لا + م ما + ۱ = ۰ ایک متقارب ہو تو مساوات بالا کی اصلیں ۱، ۱ ہونگی یا ۲، ۲۔

مساوات بالا ہے: ت۲ (ل + ۱) + ت (م − ۳) + ل + م + ۲ = ۰

اگر یہ مساوات ت۲ − ۲ ت + ۱ = ۰ ہو (جسکی اصلیں ۱، ۱ ہیں) تو

(ل + ۱) / ۱ = (م − ۳) / −۲ = (ل + م + ۲) / ۱

جس سے حاصل ہوتا ہے ل = ۱، م = -۱، یعنی ایک متقارب ہے

لا - ا + ۱ = ۰

دوسرا متقارب $\frac{\text{ل} + ۱}{۱} = \frac{\text{م} - ۳}{-۲} = \frac{\text{ل} + \text{م} + ۲}{۲}$ سے حاصل ہوتا ہے

ان مساواتوں سے ل = $-\frac{۳}{۲}$، م = $\frac{۵}{۲}$، پس دوسرا متقارب ہے

$-\frac{۳}{۲}$ لا + $\frac{۵}{۲}$ ا + ۱ = ۰ یا ۳ لا - ۵ ا - ۲ = ۰

(۳) - ایک مکافی کے نقاط مہ۱، مہ۲، مہ۳ پر مماس کھینچنے سے ایک مثلث بنایا گیا ہے، اس مثلث کے بیرونی دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

مماسوں کی مساواتیں ہیں

لا - مہ۱ ا + ا مہ۱² = ۰، لا - مہ۲ ا + ا مہ۲² = ۰ اور لا - مہ۳ ا + ا مہ۳² = ۰

مساوات ا۱ (لا - مہ۲ ا + ا مہ۲²) (لا - مہ۳ ا + ا مہ۳²)

+ ا۲ (لا - مہ۳ ا + ا مہ۳²) (لا - مہ۱ ا + ا مہ۱²) + ا۳ (لا - مہ۱ ا + ا مہ۱²)

(لا - مہ۲ ا + ا مہ۲²) = ۰

پر غور کرو جس میں ا عددی اجزائے ضربی ہیں چونکہ یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے اس لئے یہ مخروطی کو تعبیر کرتی ہے - یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ اس حاصل جمع کی ہر ایک رقم دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کے لئے معدوم ہوتی ہے - اس لئے ا، ؤں کی تمام قیمتوں کے واسطے یہ ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو مثلث کے راسوں میں سے گذرتی ہے - اس مخروطی کے دائرہ ہونے کے لئے شرط یہ ہے کہ لا² اور ا² کے سر مساوی ہوں اور لا ا کا سر صفر ہو - پس

ا۱ (۱ - مہ۲ مہ۳) + ا۲ (۱ - مہ۳ مہ۱) + ا۳ (۱ - مہ۱ مہ۲) = ۰

اور ا۱ (مہ۲ + مہ۳) + ا۲ (مہ۳ + مہ۱) + ا۳ (مہ۱ + مہ۲) = ۰

ان دو مساواتوں سے ا، ؤں کی نسبتیں معلوم ہو جاتی ہیں

ان کو حسب معمول حل کرنے سے -

ا : ج : ا/ب = (سم$_2$ − سم$_3$)(ا + سم$_1^2$) : (سم$_3$ − سم$_1$)(ا + سم$_2^2$) : (سم$_1$ − سم$_2$)(ا + سم$_3^2$)

اور دائرہ کی مساوات فوراً لکھی جا سکتی ہے ۔ طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ مساوات متصلاً اجزائے ضربی (سم$_2$ − سم$_3$)، (سم$_3$ − سم$_1$)، (سم$_1$ − سم$_2$) پر تقسیم ہو جاتی ہے اور بالآخر مساوات ذیل کی شکل میں تحویل ہو جاتی ہے۔

لا^2 + ما^2 − ا لا (ا + سم$_2$ سم$_3$ + سم$_3$ سم$_1$ + سم$_1$ سم$_2$) − ا ما (سم$_1$ + سم$_2$ + سم$_3$ − سم$_1$ سم$_2$ سم$_3$)

+ ا^2 (سم$_2$ سم$_3$ + سم$_3$ سم$_1$ + سم$_1$ سم$_2$) = ۰

اس سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ دائرہ نقطہ (ا، ۰) میں سے گزرتا ہے جو مکافی کا ماسکہ ہے ۔

باب شانزدہم پر متفرق مشقیں

۳۸ ـ منحنی ما^2 = ۴ ا لا اور خط مستقیم ما = م لا + ج کے نقاط تقاطع کے متبدل معلوم کرو اور ان کے باہم مماس ہونے کی شرط معلوم کرو ۔

۳۹ ـ اگر مکافی کا ایک وتر اس کے محور سے ایک ثابت نقطہ پر ملے تو ثابت کرو کہ اس کے سروں پر کے معینوں کا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے ۔

۴۰ ـ متوازی وتروں کے ایک نظام کے ہر ایک وتر کے سروں میں سے معین کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل جمع سب وتروں کے لئے ایک ہی ہے ۔

۴۱ ـ نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) سے منحنی ما^2 = ۴ ا لا کے مماس محور کے ساتھ زاوئے طہ اور فہ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ مس فہ} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}_1}\text{ ، مس طہ + مس فہ} = \frac{\text{ما}_1}{\text{لا}_1}$$

۴۲ ـ مشق ۴۱ سے مستنبط کرو کہ ایک مکافی کے ان مماسوں کے تقاطع کا طریق جو ایک دوسرے سے مستقل زاویہ عہ پر ملتے ہیں ایک مخروطی ہے

[طہ − فہ = عہ]

٤٣ — ایک ناقص پر کے دو نقاط کے خارج المرکز زاویے عہ اور بہ ہیں۔ مساوات $(لا - لا_۱)(لا - لا_۲)/ا^۲ + (ما - ما_۱)(ما - ما_۲)/ب^۲ = \frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - ۱$

میں $لا_۱$، $ما_۱$ اور $لا_۲$، $ما_۲$ کی متناظر قیمتیں عہ اور بہ کی رقوم میں مندرج کرنے سے اُن نقاط کو ملانے والے وتر کی مساوات دریافت کرو۔

٤٤ — ایک ناقص میں اس کے متوازی مماسوں پر ماسکہ سے عمود نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان متوازی مماسوں کے ہر مقام کے لیے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

٤٥ — ناقص کا ایک مماس کھینچا گیا ہے اس کے نقطۂ تماس کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے، ناقص کے مرکز ج سے مماس پر عمود ج ت نکالا گیا ہے۔ مرکز سے ایک نصف قطر ج ن کھینچا گیا ہے جو محور اعظم سے زاویہ طہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ ج ت = ج ن

٤٦ — ایک ناقص پر کے دو نقاط سے جن کے خارج المرکز زاویے بالترتیب عہ اور بہ ہیں مماس کھینچے گئے ہیں۔ یہ مماس نقطہ $(لاَ، ماَ)$ پر ملتے ہیں۔

ثابت کرو کہ $\text{مس}^۲ \tfrac{۱}{۲}(عہ - بہ) = لاَ^۲/ا^۲ - ماَ^۲/ب^۲ - ۱$

٤٧ — ایک نقطہ کا خارج المرکز زاویہ فہ ہے، اس پر کا عماد محور اعظم سے زاویہ سہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ ا مس فہ = ب مس سہ

٤٨ — ایک ناقص کے نقطہ (ا جم فہ ، ب جب فہ) پر کا عماد نقطہ مذکورہ اور مرکز کے خطِ وصل کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ

$۲ \,ا\,ب\, \text{مس}\, طہ = (ا^۲ - ب^۲)\, \text{جب}\, ۲فہ$

٤٩ — ایک منحنی ہے کے کسی نقطہ کے محدد ایک متغیر ت کی رقوم میں حسب ذیل صورت میں بیان کئے گئے ہیں

$لا = ۱ + ت + ت^۲ \quad ، \quad ما = ۱ - ت + ت^۲$

منحنی کی نوعیت معلوم کرو اور اس کو مرتسم کرو۔

۵۰ — جن نقطوں کے خارج المرکز زاویے ا + ب، ا - ب ہیں اُن کو ملانے والے وتر کا طول د د' جب ب ہے جہاں د د' متوازی قطر ہے۔

۵۱ — اگر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ن_1 ہو تو ثابت کرو کہ ن، ن_1 پر کے عماد ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۵۲ — ثابت کرو کہ خواہ ط کی کچھ ہی قیمت ہو ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے محدد بشکل $\text{لا} = \text{ا}\,\frac{\text{و}^{\text{ط}} - \text{و}^{-\text{ط}}}{\text{و}^{\text{ط}} + \text{و}^{-\text{ط}}}$ ، $\text{ما} = \frac{2\,\text{ب}}{\text{و}^{\text{ط}} + \text{و}^{-\text{ط}}}$ میں لکھے جا سکتے ہیں ایک ناقص ہے۔

۵۳ — وہ شرط معلوم کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ میں ط اور ف پر کے مماس علی القوائم ہوں۔ اگر $\text{ت}_1 = \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}$ اور $\text{ت}_2 = \text{مس}\,\frac{\text{ف}}{2}$ تو ثابت کرو کہ شرط مطلوبہ $\text{ب}^2(1 - \text{ت}_1^2)(1 - \text{ت}_2^2) + 4\,\text{ا}^2\,\text{ت}_1\,\text{ت}_2 = 0$ ہے۔

۵۴ — اگر ایک ناقص کے نقاط ع، ہ پر کے مماس نقطہ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ پر ملیں تو ثابت کرو کہ $\text{لا}_1 = \text{ا}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ع}+\text{ہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{ہ})}$ ، $\text{ما}_1 = \text{ب}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ع}+\text{ہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{ہ})}$

نیز ثابت کرو کہ اسی صورت میں $\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ع}$ ، $\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ہ}$ مساوات ذیل کی اصلیں ہیں: $\text{ت}^2\left(1 + \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}}\right) - 2\,\text{ت}\,\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} + 1 - \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} = 0$

۵۵ — مشقوں ۵۳ اور ۵۴ سے ثابت کرو کہ اگر ناقص کے مماس جو $\text{لا}_1, \text{ما}_1$ سے کھینچے جائیں علی القوائم ہوں تو $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ یعنی $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ مرتب دائرہ پر واقع ہے۔

۵۶ — اگر ایک ناقص پر کے دو نقاط ن اور ق کے خارج المرکز زاویے
فہ۱، فہ۲ ہوں تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو
امدادی دائرہ پر قطع کریں گے۔ بشرطیکہ

$$\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\frac{\text{فہ}_1-\text{فہ}_2}{2}=\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\frac{\text{فہ}_1+\text{فہ}_2}{2}+\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\frac{\text{فہ}_1+\text{فہ}_2}{2}$$

۵۷ — نیز ثابت کرو کہ مشق ۵۶ کی صورت میں اگر نقاط ن اور ق
کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقاط نَ، قَ ہوں تو وتر نَ قَ ناقص
سے اُس نقطہ پر مس کریگا جو ن اور ق پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع
کے جواب میں ناقص پر ہے۔

۵۸ — اگر ایک ناقص کے مماس کے اُس حصہ کا طول جو دو محوروں کے
درمیان منقطع ہوتا ہے اس کے نصف محوروں کے مجموعہ کے برابر
ہو تو ثابت کرو کہ اُس عمود کا طول جو مرکز سے مماس مذکور پر کھینچا جائے
نصف محوروں کے تناسب وسطی کے مساوی ہوگا۔

۵۹ — اگر کسی منحنی پر کے ایک نقطہ کے محدد مساواتوں لا = ا مس (طہ + عہ)
اور ما = ب مس (طہ + بہ) سے معلوم ہوں جہاں طہ متغیر ہے تو ثابت
کرو کہ منحنی قطع زائد ہے، اس کے متقاربوں کا مقام معلوم کرو۔

۶۰ — ثابت کرو کہ ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع تک جو ماسکی
نیم قطر کھینچ سکتا ہے وہ اس خط پر عمود وار ہوتا ہے جو ماسکہ کو متناظر وتر
اور مرتب کے نقطۂ تقاطع سے وصل کرتا ہے۔

۶۱ — مخروطی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ پر اَ اور بَ دو ایسے نقطے ہیں کہ
ایک کے خارج المرکز زاویہ کا تین گنا دوسرے کے تکمل کے مساوی ہے
ثابت کرو کہ اَ بَ کے قطب کا طریق

$$\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2}+\frac{\text{ب}^2}{\text{ما}^2}=4$$ ہے۔

۶۲ – ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ پر کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویئے عہ + بہ اور عہ − بہ ہیں، ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات $\frac{\text{لا جم عہ}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما جب عہ}}{\text{ب}} = \text{جم بہ}$ ہے، نیز ثابت کرو کہ اس وتر اور اس کے سروں پر کے مماسوں سے جو رقبہ گھر جاتا ہے وہ ا ب جب^3 بہ / جم بہ کے مساوی ہے۔

۶۳ – ایک منحنی پر کے کسی نقطہ کے محددوں (لا، ما) کی مساواتیں

$$\text{لا} = \text{ا تو}^{2\text{ط}} + \text{ب تو}^{\text{ط}}\text{،}\quad \text{ما} = \text{اَ تو}^{2\text{ط}} + \text{بَ تو}^{\text{ط}}$$

ہیں، منحنی کی مساوات معلوم کرو۔

۶۴ – ایک ناقص کے نصف محور ا اور ب ہیں اور مرکز ج ہے منحنی پر کے کسی نقطہ ن سے عماد ن ل کھینچا گیا ہے اور مرکز سے اس عماد پر عمود ج ل نکالا گیا ہے، ن ل کو ت تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ل × ن ت = ا ب، ثابت کرو کہ ت کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور نصف قطر ا − ب ہے۔

۶۵ – ہم مرکز ناقص جن میں سے ہر ایک کا مرکز مبدأ پر ہے اور رقبہ π ج^2 کے مساوی ہے اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کے اصلی محور حوالہ کے علی القوائم محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان ناقصوں کے ان نقاط کا طریق جن پر کے مماس محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں $\text{لا ما}\,(\text{لا} - \text{ما مم عہ})^2 + \text{ج}^2\,\text{مم عہ} = 0$ ہے۔

۶۶ – ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ پر کے نقطوں سے دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اوتار تماس ناقص $\text{ا}^2\,\text{لا}^2 + \text{ب}^2\,\text{ما}^2 = \text{ر}^4$ کو مس کرتے ہیں۔

اگر $\frac{1}{ر^2} = \frac{1}{ا^2} + \frac{1}{ب^2}$ تو ثابت کرو کہ وہ خط جو مرکز کو دائرہ پر کے نقاط تماس سے وصل کرتے ہیں دوسرے ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

باب ہفدہم

مخروطی تراش کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

مخروطیوں کے متعلق بہت سے سوالوں میں اور خاص کر اُن میں جو ایک ماسکہ سے متعلق ہوتے ہیں اُس ماسکہ کو قطب مان کر قطبی محددوں کو استعمال کرنا نہایت سہولت بخش ہوتا ہے۔

باب ہذا میں ہم مخروطیوں کی مساواتیں محددوں کے اس نظام میں معلوم کرینگے اور چند آسان نتیجوں پر جو اِن سے مستنبط ہو سکیں بحث کرینگے۔

۲۲۴- مخروطی کی قطبی مساوات دریافت کرو جبکہ ماسکہ کو قطب اور اس میں سے گذرنے والے محور کو ابتدائی خط مانا جائے۔

فرض کرو کہ ماسکہ س ہے، س لا مرتب پ کا عمود ہے اور ز خروج المرکز ہے، ہم ابتدائی خط کو سمت س لا میں لینگے۔

اگر ن منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو اور ن م، ن ک بالترتیب س لا اور مرتب پر عمود لگائے جائیں تو

س ن = ر اور ∠ ن س لا = طہ

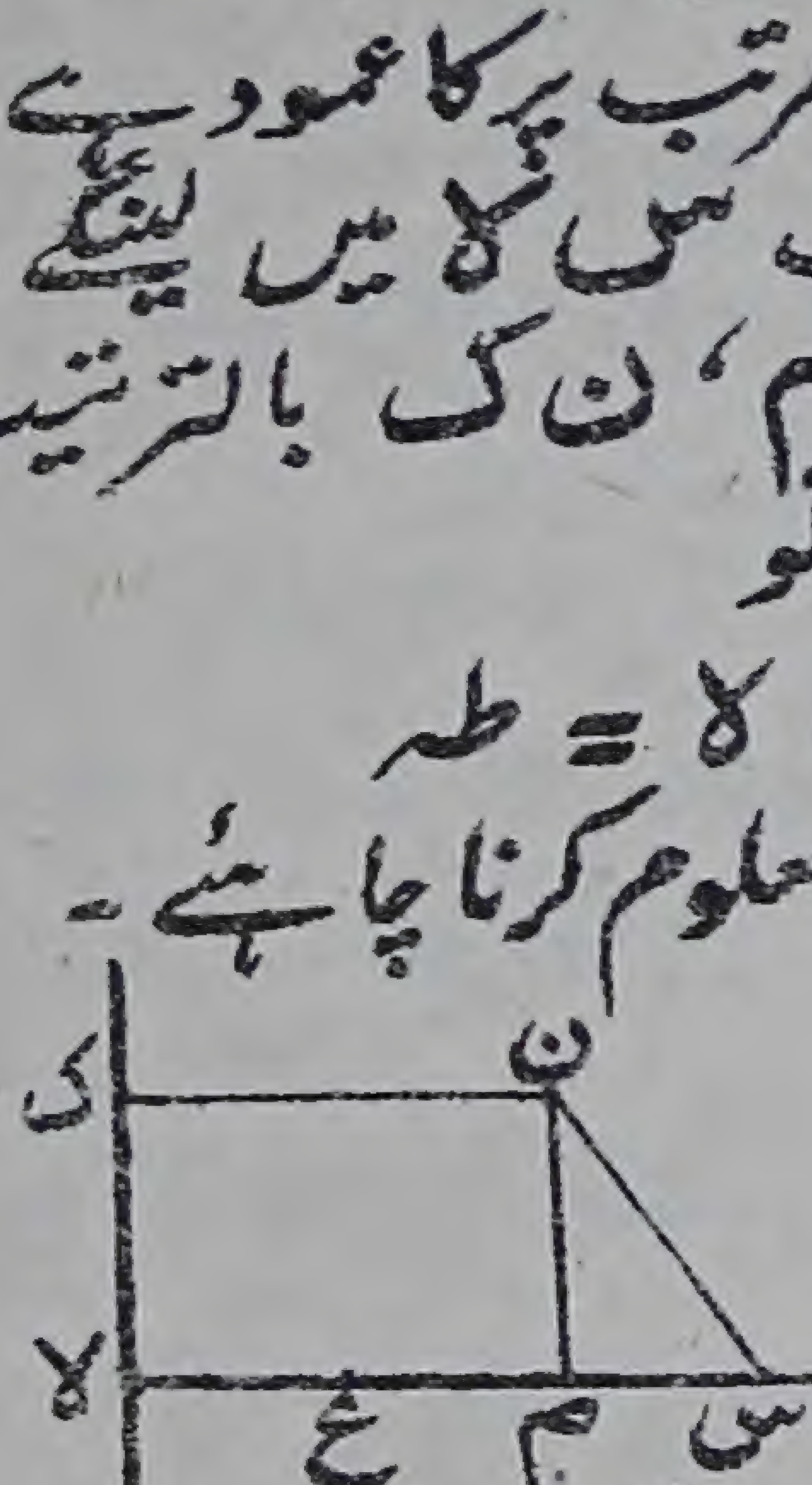
پس ہمیں اِن دو مقداروں ر، طہ میں ربط معلوم کرنا چاہئے۔

اب س ن = ز × ن ک = ز × م لا

= ز (س لا - س م)

= ز (س لا - س ن جم طہ)

یا ر = ز × س لا - ز ر جم طہ



شکل ۷۹

ہٰذا ر (۱ + ز جم طہ) = ز × س لا

$$\therefore \text{ر} = \frac{\text{ز × س لا}}{\text{۱ + ز جم طہ}}$$ جو مطلوبہ ربط ہے۔

اس مساوات سے ہمیں فوراً معلوم ہوتا ہے کہ ر کی قیمت جبکہ طہ، ۹۰° کے مساوی ہو ز × س لا ہے (کیونکہ اس صورت میں جم طہ = ۰) یعنی ز × س لا نیم وترِ خاص کے مساوی ہے (دفعہ ۲۱۲)۔ اب اگر اس کو حسب معمول ل سے تعبیر کیا جائے تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ر} = \frac{\text{ل}}{\text{۱ + ز جم طہ}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{۱ + ز جم طہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

جو مطلوبہ قطبی مساوات کی عام شکل ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر ابتدائی خط محور سے نیچے کی طرف زاویہ عہ بنائے

تو س م = س ن جم (طہ − عہ)

اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{۱ + ز جم (طہ − عہ)} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۲)$$

دراصل ہر نقطہ کے لئے محدد طہ بقدر زاویہ عہ کے بڑھا دیا گیا ہے۔

۲۲۵۔ قطبی مساوات سے منحنیوں کی شکل معلوم کرنا۔

اگر قطبی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{۱ + ز جم طہ}$ دی ہوئی ہو تو ہم نہایت آسانی سے منحنیوں کی شکل کا عام اندازہ لگا سکتے ہیں۔

اولاً ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ر کی قیمت لا تناہی اس وقت ہوگی جبکہ

اگر ز کی قیمت ایک سے کم ہو تو اس سے طہ کی کوئی حقیقی قیمت ۱+ ز جم طہ = ۰ یعنی جبکہ جم طہ = -۱/ز حاصل نہیں ہوتی، پس منحنی لاتناہی تک صرف اسی صورت میں پھیل سکتا ہے جبکہ ز ایک کے مساوی ہو یا ایک سے بڑی ہو۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ناقص ایک بند منحنی ہے اور مکافی کا قطر سمتی لاتناہی صرف اس صورت میں ہوتا ہے جبکہ جم طہ = -۱ یعنی طہ = ۱۸۰°۔ قطع زائد کے سمتی نیم قطر دو سمتوں میں لاتناہی تک پہنچتے ہیں اور یہ سمتیں طہ کی ان دو قیمتوں سے تعین ہوتی ہیں جو مساوات جم طہ = -۱/ز سے حاصل ہوتی ہیں، ظاہر ہے کہ یہ سمتیں ابتدائی خط کے ساتھ اوپر اور نیچے مساوی زاویے بناتی ہیں۔

واضح ہو کہ یہ دو لاتناہی سمتی نیم قطر ایسے خط ہیں جو ماسکہ میں سے گذرتے ہیں اور متقاربوں کے متوازی ہیں، (کیونکہ یہ منحنی سے لاتناہی پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں) اور صریحاً ان میں سے ہر ایک لاس ممدودہ کی سمت کے ساتھ زاویہ قطا⁻¹ (ز) بناتا ہے۔ بالفاظ دیگر مندرجۂ بالا سے یہ مراد ہے کہ خروج المرکز متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کے قاطع کے مساوی ہے۔

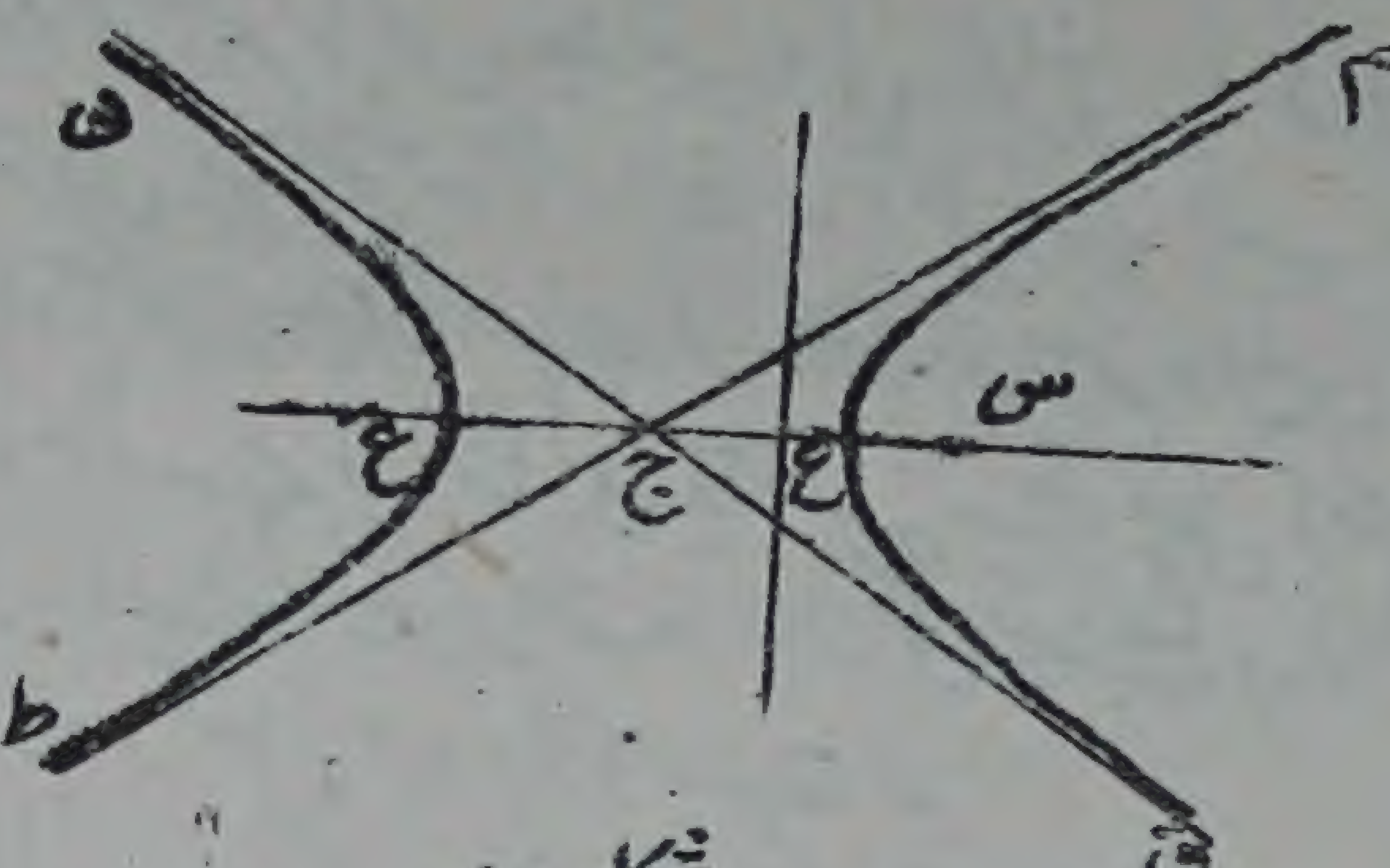
اب ہم زائد کے مرتسم کرنے کی منزلوں پر تفصیلی بحث کرینگے اور چونکہ ناقص اور مکافی کی صورتیں اصولاً ویسی ہی ہیں اور تفصیل کے لحاظ سے نسبتاً آسان ہیں اس لئے ہم ان کو طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑ دینگے۔ لیکن یاد رہے کہ طالب علم کو اس مشق پر حاوی ہونے میں کوتاہی نہیں کرنی چاہئے۔

طہ کی کسی قیمت کے جواب میں ر کی قیمت مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$ر = \frac{ل}{۱ + ز \, جم \, طہ}$$

اگر طہ = ۰، تو ر = $\frac{\text{ل}}{\text{۱ + ز}}$

فرض کرو کہ اس نقطہ کا مقام ع ہے۔



شکل ۹۰

جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ بتدریج کم ہوتا ہے اور بنا بریں ر بڑھتا ہے اور یہی ہوتا رہتا ہے حتیٰ کہ جس وقت ز لا انتہا ہی ہو جاتا ہے تو ۱ + ز جم طہ صفر ہو جاتا ہے، اس طرح ہمیں دائیں جانب کی شاخ کے اوپر کا حصہ ع م حاصل ہوتا ہے۔

جس وقت طہ اس قیمت سے جو ۱ + ز جم طہ کو صفر بنا دیتی ہے ذرا آگے بڑھتا ہے تو ۱ + ز جم طہ کی قیمت ایک نہایت ہی قلیل منفی مقدار کے مساوی ہوتی ہے۔ پس ر فوراً ایک بہت بڑی منفی مقدار کے مساوی ہو جاتا ہے، لہذا نقطہ بائیں طرف کی شاخ کے نچلے حصہ پر بہت دور واقع ہوتا ہے۔

جس وقت طہ بتدریج بڑھتے بڑھتے ۱۸۰° کی طرف جاتا ہے تو نسبت جم طہ (جو منفی ہے) بلحاظ عددی قیمت کے بڑھتی ہے، لہذا جملہ ۱ + ز جم طہ جس کی مطلق قیمت (منفی ہونے کی وجہ سے) گھٹتی ہے عددی قیمت میں بڑھتا ہے اس لئے ر کی عددی قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ بالآخر جس وقت طہ = ۱۸۰° تو ر کی متناظر قیمت ل / ۱ - ز ہو جاتی ہے، اس طرح ہم بائیں طرف کی شاخ کا حصہ طہ عَ مرتسم کر لیتے ہیں۔

بعد ازیں جب طہ، ۱۸۰° سے آگے بڑھتا ہے تو جم طہ کی

عددی قیمت پھر گھٹنا شروع ہوتی ہے اور منفی ہوتی ہے، لہذا ۱ + ز جم طہ گھٹتا ہے۔ اور اس بناء پر ر کی قیمت بڑھتی ہے جو بالآخر لامتناہی ہو جاتی ہے جبکہ ۱ + ز جم طہ = ۰۔
پس طہ کی اس قیمت کے لئے جو صریحاً °۱۸۰ اور °۲۷۰ کے درمیان واقع ہوتی ہے نقطۂ ترسیم بائیں جانب کی شاخ عَ ن کے اوپر کے حصہ میں لامتناہی پر پہنچ جاتا ہے۔ آخر میں جب، طہ اس قیمت سے آگے °۳۶۰ تک جاتا ہے تو نقطۂ ترسیم دائیں جانب کی شاخ ق ع کے نچلے حصہ پر لامتناہی فاصلہ سے چل کر پھر ع پر آجاتا ہے اور ع پر آنے کے وقت طہ کی قیمت °۳۶۰ ہوتی ہے۔ اس طرح پورا دَور مکمل ہو جاتا ہے۔

مثال — ایک مخروطی کا وتر خاص ۶ ہے اور خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$، اُس ماسکی وتر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ °۴۵ کا زاویہ بناتا ہے۔

یہاں ہم قطبی مساوات کو استعمال کرتے ہیں۔
چونکہ نیم وترِ خاص ۳ ہے اور خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$، اس لئے

مساوات ہے $\frac{۳}{ر} = ۱ + \frac{۱}{۲}$ جم طہ جہاں ر سمتی نیم قطر ہے

اگر ن س نَ ماسکی وتر ہو تو ن کے لئے طہ کی قیمت ن س لا سے تعبیر ہوتی ہے جو °۴۵ کے مساوی ہے اور نَ کے لئے یہ زاویہ منعکسہ ع س نَ = °۲۲۵ ہے۔

پس $\frac{۳}{س ن} = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ اسلئے $س ن = \frac{۶\sqrt{۲}}{۱ + ۲\sqrt{۲}}$

اسی طرح سے $\frac{۳}{س نَ} = ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ اور $س نَ = \frac{۶\sqrt{۲}}{۱ - ۲\sqrt{۲}}$

اس لئے کل وتر = س ن + س نَ

$$= ۶\sqrt{۲}\left\{\frac{۱}{۱+۲\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۱-۲\sqrt{۲}}\right\}$$

$$= ۶\sqrt{۲}\left\{\frac{۱-۲\sqrt{۲}}{-۷} + \frac{۱+۲\sqrt{۲}}{-۷}\right\}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}}{۷} \times ۴\sqrt{۲} = \frac{۴۸}{۷} = ۶\frac{۶}{۷}$$

۲۲۶ - کسی ماسکی وتر کے حصوں کا اوسط موسیقی نیم وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر ن س نَ کوئی ماسکی وتر ہو تو ہمیں صرف یہ ثابت کرنا چاہئے کہ

$$\frac{۲}{ل} = \frac{۱}{س ن} + \frac{۱}{س نَ}$$ (ٹیوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۲۱۰)

اب فرض کرو کہ ن کے لئے طہ کی قیمت (یعنی ∠ع س ن) عہ

اور نَ کے لئے یہ قیمت = π + عہ

اب چونکہ قطبی مساوات ہے

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز\ جم\ طہ$$

اسلئے $$\frac{ل}{س ن} = ۱ + ز\ جم\ عہ$$

$$\frac{ل}{س نَ} = ۱ + ز\ جم\ (\pi + عہ) = ۱ - ز\ جم\ عہ$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے فوراً

$$\frac{ل}{س ن} + \frac{ل}{س نَ} = ۲$$

یعنی $$\frac{۲}{ل} = \frac{۱}{س ن} + \frac{۱}{س نَ} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

مشقیں

۱- ثابت کرو کہ ۱/ر = ا + ب جم طہ ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس میں ل = ۱/ا اور ز = ب/ا

۲- ثابت کرو کہ مکافی کی قطبی مساوات کو شکل ر^(-½) جم ½ طہ = ا^(-½) میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ۴ا وترِ خاص ہے۔

۳- ثابت کرو کہ مساوات ۱/ر = ا + ب جم طہ + ج جب طہ کو ہمیشہ ل/ر = ۱ + ز جم (طہ - عہ) کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ لہٰذا اس مساوات سے ہمیشہ ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے

۴- ثابت کرو کہ مساواتوں ل/ر = ۱ + ز جم طہ اور ل/ر = ز جم طہ - ۱ سے ایک ہی منحنی تعبیر ہوتا ہے۔

۵- ایک مخروطی کا وترِ خاص ۵ ہے اور خروج المرکز ۲/۳ ہے، اس ماسکی وتر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

۶- منحنیات ذیل کو مرتسم کرو۔

۳/ر = ۱ + ½ جم طہ، ۲/ر = ۱ + جم طہ،

۳/ر = ۱ + ۲ جم طہ، ۱/ر = ۲ + ۳ جم طہ

۷- اگر ن س نَ ایک مخروطی کا ماسکی وتر ہو جو محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ ۱/س ن + ۱/س نَ = ۲/ل اور

۱/س ن − ۱/س نَ = ۲ ز جم طہ/ل

۸۔ مشقِ ماقبل کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ

ن نَ = ۲ ل / (۱ − ز² جم² طہ)

۲۲۷۔ منحنی ل/ر = ۱ + ز جم طہ پر کے دو نقطوں کے سمتی زاوئے (عہ + بہ) اور (عہ − بہ) ہیں، اِن نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات دریافت کرو۔

(سمتی زاوئے سے کسی نقطہ کا قطبی محدد طہ یعنی ∠ ع س ن مراد ہے)

فرض کرو کہ ر₁، ر₂ ان نقطوں کے سمتی نیم قطر ہیں، تب

ل/ر₁ = ۱ + ز جم (عہ + بہ)، ل/ر₂ = ۱ + ز جم (عہ − بہ)

.......(۱)

اب جن نقطوں کے محدد (ر₁، عہ + بہ)، (ر₂، عہ − بہ) ہیں اُن کو ملانے والے خط کی مساوات ہے

ر₁ ر₂ جب (عہ + بہ − عہ − بہ) − ر₂ ر جب (طہ − عہ − بہ)

+ ر ر₁ جب (طہ − عہ + بہ) = ۰ ....(حصۂ اول دفعہ ۱۰ گ)

ل/(ر ر₁ ر₂) سے ضرب دینے اور (۱) سے قیمتیں درج کرنے سے

ل/ر جب ۲ بہ − {۱ + ز جم (عہ + بہ)} جب (طہ − عہ + بہ)

+ (۱ + ز جم عہ - بہ) جب (طہ - عہ - بہ) = ۰

اب - جب (طہ - عہ + بہ) + جب (طہ - عہ - بہ) = - ۲ جم (طہ - عہ) جب بہ

اور ز (جم عہ - بہ جب طہ - عہ - بہ - جم عہ + بہ جب طہ - عہ + بہ)

= ½ ز { جب (طہ - ۲ بہ) + جب (طہ - ۲ عہ) - جب (طہ + ۲ بہ) - جب (طہ - ۲ عہ) }

= ½ ز { جب (طہ - ۲ بہ) - جب (طہ + ۲ بہ) } = - ز جم طہ جب ۲ بہ

خطِ مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے

ل/ر جب ۲ بہ - ۲ جم (طہ - عہ) جب بہ - ز جم طہ جب ۲ بہ = ۰

یا ل/ر = ز جم طہ + قط بہ جم (طہ - عہ) ...... (۴)

۲۲۸ - متبادل ثبوت ۔ دفعہ گذشتہ کا عمل غالباً طویل ہے، اس کی بجائے مختصر طریقوں سے کام لے سکتے ہیں، لیکن اس میں فائدہ یہ ہے کہ یہ بالکل صاف اور سیدھا طریقہ ہے، اس میں ہم خطِ مستقیم کی مساوات سب سے زیادہ طبعی شکل میں لیتے ہیں اور پھر معمولی طریقوں سے محصلہ خطی مساواتوں کو حل کرتے ہیں۔ مساوات (۴) کی شکل کو دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ عمل میں اختصار ہو سکتا ہے اگر ابتدا میں ہی ہم خط کی مساوات کی شکل

ل/ر = ج جم (طہ - عہ) + د جم طہ فرض کریں۔

[نوٹ یہ مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ ضرب دینے اور کارٹیزی محددوں میں بدلنے سے یہ درجہ اول کی مساوات ہو جاتی ہے۔]
تب اس مساوات اور ل/ر = ۱ + ز جم طہ دونوں سے ر کی

وہی قیمت حاصل ہوگی جبکہ طہ = عہ + بہ اور نیز طہ = عہ - بہ
لہذا ا + زجم (عہ + بہ) = ج جم بہ + د جم (عہ + بہ)
اور ا + زجم (عہ - بہ) = ج جم بہ + د جم (عہ - بہ)
تفریق کرنے سے فوراً حاصل ہوتا ہے

د = ز

اور یہ قیمت درج کرنے سے ج = قط بہ

پس مطلوبہ مساوات ہے ل/ر = زجم طہ + قط بہ جم (طہ - عہ)

۲۲۹- نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات-

وتر کی مساوات
اگر ہم عہ + بہ اور عہ - بہ کو ملانے والے
میں بہ کو چھوٹا کرتے جائیں اور بالآخر اسے صفر بنادیں تو اس
صورت میں یہ مساوات عہ پر کے مماس کو تعبیر کرے گی-
اس لئے مماس کی مساوات

ل/ر = زجم طہ + قط بہ جم (طہ - عہ)

میں بہ = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے-
مساوات مطلوبہ یہ ہے

یعنی ل/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ) .... (۵)

انتباہ- جب مماس کی مساوات دریافت کرنا مطلوب ہو تو دفعات
۲۲۷ یا ۲۲۸ کے ضروری حصے ثبوت میں پہلے دئے جانے چاہئیں-

۲۳۰- مماس کی قطبی مساوات معلوم کرنے کا متبادل طریقہ-

ذیل کا عمل علم آموزہ ثابت ہوگا۔
کارٹیزی محددوں میں بدلنے سے مماس کی مساوات آسانی سے
حاصل ہوتی ہے-

منحنی ہے $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم طہ یا ر = ل - ز ر جم طہ

مربع لینے سے لا٢ + ما٢ = (ل - ز لا)٢ جو مخروطی کی مساوات ہے
اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے :-

لا٢ (۱ - ز٢) + ما٢ + ۲ ل ز لا - ل٢ = ۰

لہذا (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات ہے

لا لاَ (۱ - ز٢) + ما ماَ + ل ز (لا + لاَ) - ل٢ = ۰

یا لا لاَ + ما ماَ = ل٢ - ل ز (لا + لاَ) + ز٢ لا لاَ = (ل - ز لا) (ل - ز لاَ)

اب فرض کرو کہ (لاَ ، ماَ) کے قطبی محدد رَ ، عہ ہیں ، پھر واپس قطبی محددوں میں تبدیل کرنے سے اوپر کی مساوات ہو جاتی ہے

ر رَ (جم طہ جم عہ + جب طہ جب عہ) = (ل - ز ر جم طہ) رَ

کیونکہ رَ = ل - ز لاَ چونکہ (لاَ ، ماَ) منحنی پر ہے

∴ ر جم (طہ - عہ) = ل - ر ز جم طہ

∴ ل = ر { ز جم طہ + جم (طہ - عہ) }

جس سے حسب سابق حاصل ہوتا ہے $\frac{ل}{ر}$ = ز جم طہ + جم (طہ - عہ)

۲۴۱ - مماس کی مساوات کی ہندسی تعبیر -

فرض کرو کہ نقطہ ن کا قطبی زاویہ عہ ہے اور ن پر کے مماس پر ت کوئی اور نقطہ ہے جس کے محدد (ر ، طہ) ہیں ، س ن پر عمود ت ھ نکالو اور ت ل مرتب پر عمود نکالو -

تب چونکہ ∠ ع س ن = عہ اور ∠ ع س ت = طہ

اس لئے ت س ن = عہ - طہ

اب مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ = ز جم طہ + جم (طہ - عہ)

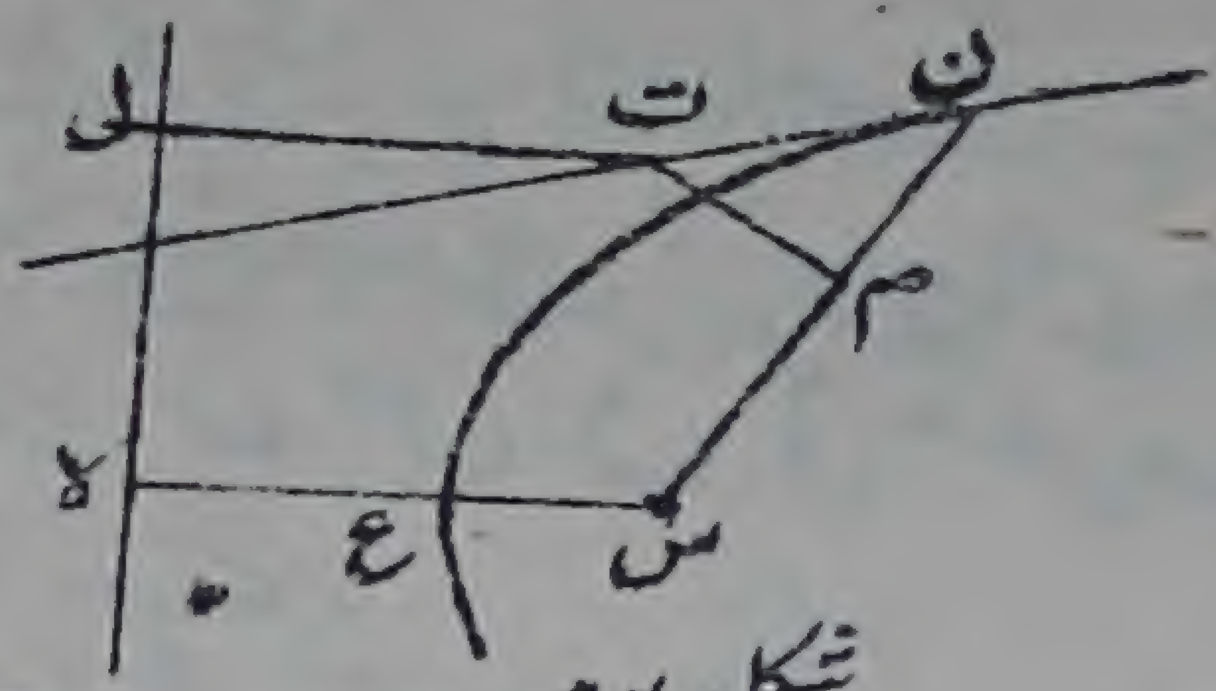
یا ل - ز ر جم طہ = ر جم (طہ - عہ) = س ت جم ت س ن = س م

اور ل - ر ز جم طہ = ز × س لا - ر ز جم طہ = ز (س لا - ر جم طہ)

= ز × ت ل

لہذا س م = ز × ت ل

اسلئے س م : ت ل = س ع : ع لا



شکل ۸۲

پس اگر مماس کی قطبی مساوات کو ہندسی طریق پر تعبیر کیا جائے تو مخروطی تراشوں کی وہ مشہور خاصیت حاصل ہوتی ہے جسے آدم نے دریافت کیا - یہ اوپر مندرج ہے-

مشقیں

۹- ثابت کرو کہ نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات کارتیسری محددوں میں تبدیل کرنے سے ہو جاتی ہے لا (ز + جم عہ) + ما جب عہ = ل

۱۰- اگر س میں سے نقطہ عہ پر کے مماس پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس عمود کی مساوات ہوگی

لا جب عہ - ما (ز + جم عہ) = ۰

۱۱- ثابت کرو کہ اگر س میں سے مخروطی کے مماس پر عمود نکالا جائے تو اس عمود کے پایہ کا طریق گذشتہ دو مشقوں کی مساواتوں میں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے، اس لئے ثابت کرو کہ طریق کی مساوات ہے:-

$$(\text{ل} - \text{ز لا})^2 + \text{ز}^2\,\text{ما}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

اس مساوات سے کیا تعبیر ہوتا ہے؟

توضیحی مثالیں

ا۔ اگر کسی نقطہ سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے محاذی ماسکہ پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے سے ت پر ملتے ہیں، تب ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ ت س زاویہ ن س ق کی تنصیف کرتا ہے۔



شکل ۸۳

فرض کرو کہ نقاط ن اور ق کے قطبی زاویے عہ اور بہ ہیں، تب مماسوں ت ن اور ت ق کی مساواتیں ہیں

ل/ر = زجم طہ + جم (طہ − عہ)

اور ل/ر = زجم طہ + جم (طہ − بہ)

نقطہ ت کے محدد معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں کو لہ اور طہ کے لئے حل کرنا چاہئے، تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (طہ − عہ) = جم (طہ − بہ)

اب یہ زاوئے مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ اس صورت میں عہ = بہ، لہذا

طہ − عہ = − (طہ − بہ) یا طہ − عہ = بہ − طہ

پس ∠ ع س ت − ∠ ع س ن = ∠ ع س ق − ∠ ع س ت

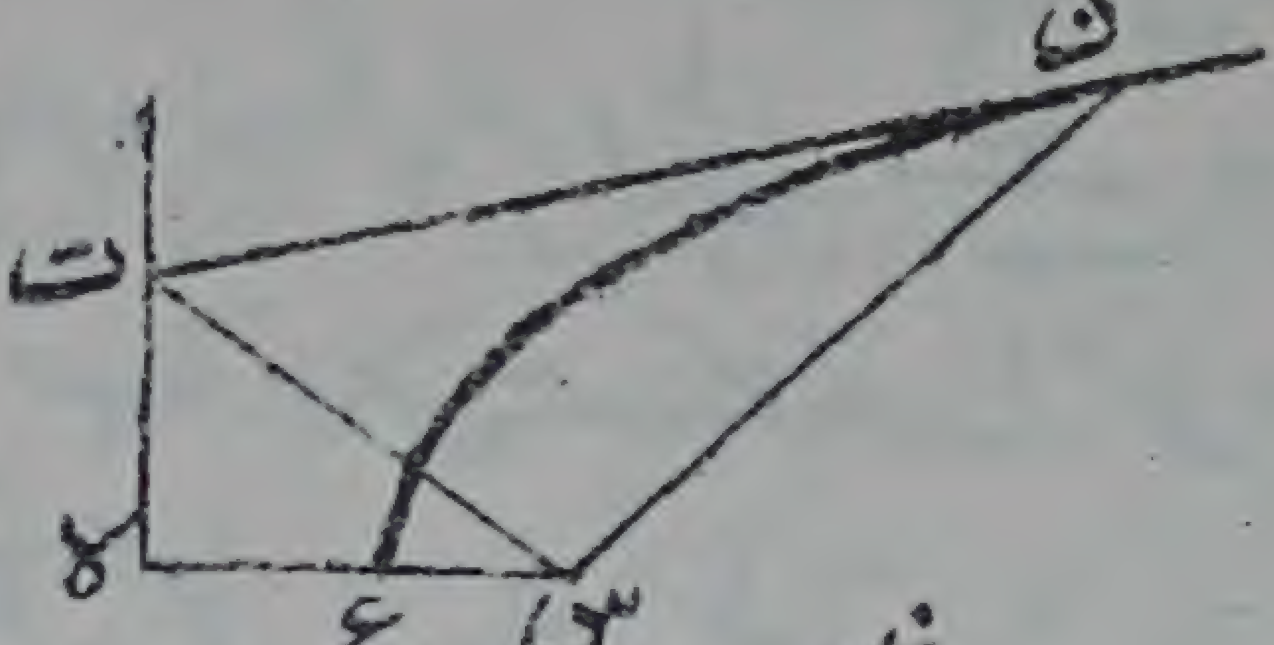
یعنی ∠ ت س ن = ∠ ت س ق

جس سے ظاہر ہے کہ ت س زاویہ ن س ق کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) مماس کے اُس حصہ کے محاذی جو نقطۂ تماس اور مرتب کے درمیان منقطع ہوتا ہے ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

فرض کرو کہ ن پر کا مماس مرتب سے ت پر ملتا ہے، تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ زاویہ ن س ت قائمہ ہے۔

مرتب پر کے کسی نقطہ کے لئے



شکل ۸۴

$$\text{زجم طہ} = \text{س لا} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}}$$

یعنی $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ}$ کیونکہ

ل = ز × س لا ..... (دفعہ ۶۲ کی رو سے)

اب نقطہ عہ پر کا مماس ہے

$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{جم}(\text{طہ} - \text{عہ})$ اور جس نقطہ پر یہ مرتب سے ملتا ہے اُس کے لئے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ}$$

ت کے محدد معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان دو مساواتوں کو ر اور طہ کے لئے حل کرنا چاہئے۔ تفریق کرنے سے

$$\text{جم}(\text{طہ} - \text{عہ}) = 0$$

$$\therefore \text{طہ} - \text{عہ} = \pm \frac{\pi}{2}$$

جس سے ظاہر ہے کہ

$$\angle \text{ن س ت} = \angle \text{ن س ع} - \angle \text{ت س ع} = \text{طہ} - \text{عہ} = \pm \frac{\pi}{2}$$

جس سے نتیجہ مطلوبہ ثابت ہوا۔

باب ہفدہم پر متفرق مشقیں

۱۲۔ اگر ایک مکافی کے دو ماسکی وتر ن نَ اور ق قَ علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ن نَ} + \frac{۱}{ق قَ} = \frac{۱}{۲ل}$$

۱۳۔ اگر مخروطی $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز\ جم\ طه$ ایک ناقص ہو اور ۲ا اور ۲ب اس کے محور اعظم اور محور اصغر کے طول ہوں تو ثابت کرو کہ $ا = \frac{ل}{۱ - ز^۲}$ اور $ب = \frac{ل}{\sqrt{۱ - ز^۲}}$

۱۴۔ زائد کے لئے متناظر نتیجے حاصل کرو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز\ جم\ طه$ کے امدادی دائرہ کی قطبی مساوات $ر^۲ (۱ - ز^۲) - ۲ ل\ ر\ ز\ جم\ طه + ل^۲ = ۰$ ہے

۱۶۔ اُن تمام مخروطیوں کی عام مساوات جن کا ماسکہ اور مرتب وہی ہو $\frac{ل}{ر} = ا + ف\ جم\ طه$ ہے جہاں ف اس نظام کی تمام مخروطیوں کے لئے وہی ہے۔

۱۷۔ ناقص کے تین ایسے ماسکی نیم قطر معلوم کرو جن کے طول سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں اور جن کے زاویئے محدد سلسلۂ حسابیہ میں ہوں۔

۱۸۔ اگر ایک مکافی کے ماسکہ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے جو مکافی کے راس میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ہر ماسکی وتر کے لئے اُن مقطوعات کا حاصل ضرب جو دائرہ اور مکافی کے

درمیان منقطع ہوں مستقل ہوتا ہے۔

۱۹۔ نقاط ء اور ب پر ایک مخروطی تراش کے مماس کھینچے گئے ہیں، ان سے نقطۂ تقاطع کے قطبی محدد معلوم کرو اور ان کی بناء پر ثابت کرو کہ اگر ایک مکافی کے نقاط ن اور ق پر کے مماس ت پر ملیں تو س ت^2 = س ن × س ق

۲۰۔ کیا شرط پوری ہو کہ خط $\frac{1}{ر}$ = ا جم ط + ب جب ط مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم ط کو مس کرے۔

۲۱۔ دو مخروطیوں کے ماسکے اور مرتب وہی ہیں، اگر ایک کا کوئی مماس دوسری کو ن اور ق پر کاٹے تو ثابت کرو کہ $\angle$ ن س ق مستقل ہے اور جم $\frac{1}{۲}$ ن س ق = $\frac{ز}{زَ}$ جہاں ز، زَ ان کے خروج المرکز ہیں۔

۲۲۔ مخروطیوں کے ایک نظام کا ماسکہ اور وتر خاص دونوں وہی ہیں، ثابت کرو کہ ماسکہ میں سے گزرنے والے ایک ثابت خط مستقیم کے سب نقطوں پر کے مماس محدودہ وتر خاص کو ماسکہ سے ایک ہی فاصلہ پر قطع کرتے ہیں۔

۲۳۔ دو مکافیوں کا مشترک ماسکہ س ہے اور ان کے راس بالترتیب ع اور عَ ہیں، اگر ع خط مستقیم س عَ کا وسطی نقطہ ہو اور ق قَ س ن نَ ایک ماسکی وتر ہو جو مکافیوں سے نقاط ق، قَ، ن، نَ پر ملے تو ثابت کرو کہ س قَ کی تنصیف ق پر ہوتی ہے اور مکافیوں کے نقاط قَ اور ن پر کے مماس علی القوائم ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق بھی معلوم کرو۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی کے علی القوائم ماسکی وتروں کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق

ایک ہم ماسکہ مخروطی تراشیں ہوگی۔

آزمائشی پرچہ ۵

۱۔ بغیر ثابت کرنے کے ایک مخروطی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کے مشہور خواص بیان کرو۔ دو خط بلحاظ ایک دوسرے کے مزدوج کب ہوتے ہیں؟

ثابت کرو کہ اُس خط کا قطب جو متقارب کے متوازی ہو متقارب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۔ قطع زائد لا ما = ج^2 کے لحاظ سے نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ مخروطی ۹ لا^2 − ۸ ما^2 − ۱۶ لا + ۸ ما + ۶ = ۰ کے لحاظ سے خط ۳ لا − ۲ ما = ۱ کا قطب معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ ایک ناقص کے اندر واقع ہے، بتاؤ کہ اِس نقطہ کا قطبی بلحاظ ناقص مذکور کے ہندسی طور پر کس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔

۵۔ ایک نقطہ ن کا قطبی بلحاظ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے کھینچا گیا ہے، اگر وہ عمود جو اس نقطہ سے قطبی مذکور پر کھینچا جائے ایسا ہو کہ ہمیشہ مکافی لا^2 = ۴ ب ما کو مس کرے تو ثابت کرو کہ نقطہ ن خط ۲ ا لا + ب ما + ۳ ا^2 = ۰ پر واقع ہوتا ہے

۶۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مکافی کے دو مماس محور کے ساتھ متمم زاویے بنائیں تو اُن کا وترِ تماس محور کو ایک ثابت نقطہ پر کاٹے گا۔

۷۔ کئی خط کھینچے گئے ہیں جو ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو کاٹتے ہیں، اُن خارج المرکز زاویوں کا حاصل جمع جن پر کوئی ایک

خطِ مستقیم ناقص کو قطع کرتا ہے مستقل رہتا ہے اور ۲ سمر کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ ان خطوطِ مستقیم کے قطبوں کا طریق $ر^۲ ما^۲ = ب^۲ لا^۲ + س^۲ سمر^۲$ ہے۔

۸۔ ناقص کے عماد کی مساوات خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرو۔
ثابت کرو کہ ایک معلومہ نقطہ سے ناقص کے چار عماد کھینچ سکتے ہیں، نیز محور کے ساتھ عماد کے میلان کی مساوات دریافت کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^۲}{ر^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کا رقبہ π ر ب ہے۔

۱۰۔ مکافی $ما^۲ = ۴ ر لا$ کے مماس کی قطبی مساوات معلوم کرو جبکہ ماسکہ کو قطب مانا جائے۔ اس کو

$$ر = ر قط \frac{عہ}{۲} قط (طہ - \frac{عہ}{۲})$$

کی شکل میں تحویل کرو، نیز ثابت کرو کہ مکافی کے ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس مرتب پر علی القوائم ملتے ہیں۔

باب ہژدہم

مخروطیوں کے نظام

۲۳۲ - مختصر ترقیم - اس باب میں ہم مخروطیوں کی مساواتوں کے متعلق چند ضروری اصولوں کی تشریح کریں گے -

ہم اکثر عام مساوات کو اس کی مختصر شکل

س = ۰

میں استعمال کریں گے جہاں س سے مراد ہے جملہ

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

ہم سَ = ۰ سے اسی مساوات کو تعبیر کر سکتے ہیں جبکہ سروں پر زبر ہوں یعنی سَ = اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ

اسی طرح سے ہم خطِ مستقیم کی مساوات کو بھی ایک ہی حرف سے تعبیر کریں گے مثلاً

ی = ۰

جہاں ی صریحاً لا اور ما میں درجۂ اول کا ایک جملہ ہے -

پس ہم مساوات ل لا + م ما + ن = ۰ کی بجائے ی = ۰ لکھ سکتے ہیں -

۲۳۳ - اگر دو مخروطیوں کی مساواتیں س = ۰ اور سَ = ۰ ہوں

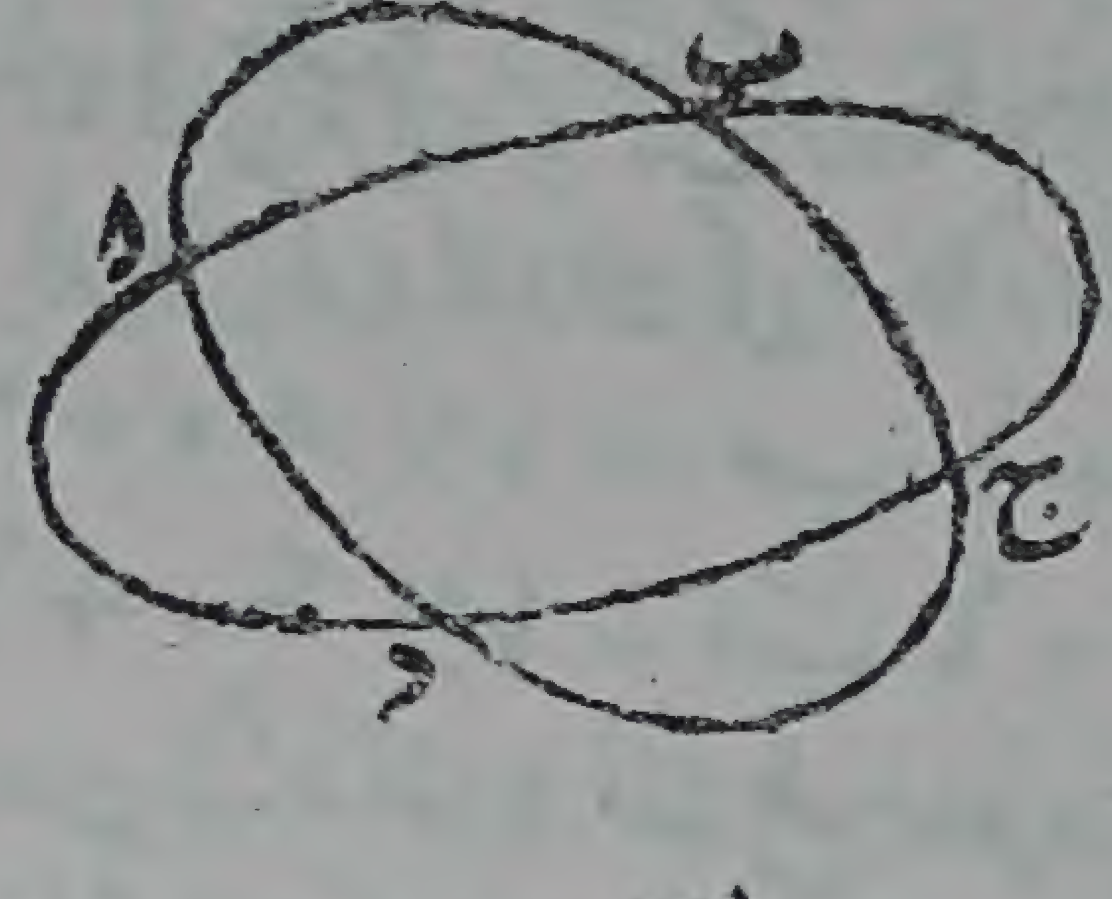
تو مساوات س + ک سَ = ۰، ک کی تمام قیمتوں کے لئے اس مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو س اور سَ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔

اولاً مساوات س + ک سَ = ۰ درجہ دوم کی مساوات ہے کیونکہ س اور سَ دونوں جداگانہ درجہ دوم کے جملے ہیں، پس یہ مساوات کسی نہ کسی مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر س = ۰ اور سَ = ۰ کا ایک نقطۂ تقاطع ا ہو تو ا کے محدد س = ۰ اور سَ = ۰ دونوں مساواتوں کو پورا کرتے ہیں گویا اس کے محدد مساوات

س + ک سَ = ۰

کو پورا کرتے ہیں یعنی مخروطی س + ک سَ = ۰ نقطہ ا میں سے گزرتی ہے۔



شکل ۸۵

اسی طرح سے یہ س = ۰ اور سَ = ۰ کے باقی نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔ پس مساوات س + ک سَ = ۰ ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے تمام نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔

طالب علم اس استدلال اور دفعہ ۱۳ کے استدلال کی مشابہت کو ملاحظہ کرے۔

مشقیں

۱۔ اگر س = ۰ اور سَ = ۰ دو دائروں کی مساواتیں ہوں تو مساوات س + ک سَ = ۰ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے جو اول الذکر دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ اگر س = ۰ اور سَ = ۰ دونوں قائم زائد ہوں تو ثابت کرو کہ

نظام س + ک سَ = ۰ کی ہر ایک مخروطی قائم زائد ہے' اس سے حاصل کرو کہ دو قائم زائدوں کے نقاط تقاطع میں سے جو مخروطی تراشیں کھینچ سکتی ہیں وہ سب قائم زائد ہیں"

۳۳۴ — دو مخروطی تراشیں ایک دوسرے کو چار نقاط حقیقی یا خیالی پر قطع کرتی ہیں۔

ہم نے دفعہ ماقبل میں اس امر کے متعلق کچھ بھی فرض نہیں کیا کہ درجہ دوم کے دو منحنی ایک دوسرے کو کتنے نقاط پر قطع کرتے ہیں اب ہم ثابت کرینگے کہ درجہ دوم کے دو منحنی ایک دوسرے کو چار نقاط خیالی یا حقیقی پر قطع کرتے ہیں"

فرض کرو کہ ان کی مساواتیں ہیں

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ = ۰

ان کے نقاط تقاطع معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں کو لا' ما کے لئے حل کرنا چاہیئے۔ اس غرض سے ہم دونوں کو لا میں درجہ دوم کی مساواتیں سمجھ کر ان کی رقموں کو لا کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیتے ہیں' پھر ان مساواتوں سے لا کو ساقط کر کے ما کے لئے مساوات حاصل کرتے ہیں جو مساوات درجہ چہارم ہے اور اسلئے جس کی چار اصلیں حقیقی یا خیالی ہیں۔ پس

لا^2 × ا + ۲ لا (ھ ما + گ) + ب ما^2 + ۲ ف ما + ج = ۰ }
لا^2 × اَ + ۲ لا (ھَ ما + گَ) + بَ ما^2 + ۲ فَ ما + جَ = ۰ } (۱)

حسب معمول عمل اسقاط سے

{ ا × ۲ (ھَ ما + گَ) ـ اَ × ۲ (ھ ما + گ) }
{ ۲ (ھ ما + گ) (بَ ما^2 + ۲ فَ ما + جَ) ـ ۲ (ھَ ما + گَ) (ب ما^2 + ۲ ف ما + ج) }
= { ا (بَ ما^2 + ۲ فَ ما + جَ) ـ اَ (ب ما^2 + ۲ ف ما + ج) }^{2}

اور یہ صریحًا ما میں درجہ چہارم کی مساوات ہے' جسکی چار اصلیں ہیں'

جو فرض کرو کہ ما۱، ما۲، ما۳، ما۴ ہیں (ٹیوٹوریل الجبرا، حصہ دوم، دفعہ ۳۷۱)
چونکہ ہم مساوات (۱) سے لا۲ کو ساقط کر سکتے ہیں اور لا کے لئے
ایک خطی مساوات ما کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اسلئے ظاہر ہے کہ ما
کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے
پس اگر لا کی چار متناظر قیمتیں لا۱، لا۲، لا۳، لا۴ ہوں تو ہم دیکھتے
ہیں کہ نقاطِ تقاطع چار ہیں یعنی (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳)، (لا۴، ما۴)

نوٹ - ممکن ہے کہ اِن چار نقطوں میں سے بعض خیالی ہوں، یہ بہ آسانی معلوم ہو سکتا ہے (دیکھو ٹیوٹوریل الجبرا، دفعہ ۲۷۸) کہ کوئی خیالی اصل کسی مساوات میں اکیلی واقع نہیں ہو سکتی، ایسی اصلیں ہمیشہ دو دو کے جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں۔

مشقیں

۴- اوپر کی تحلیل کو تسلیم کرلینے کے بغیر متذکرہ بالا مسئلہ کی صداقت کو ثابت کرو جبکہ ایک مخروطی تراش خطوطِ مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے۔

۳۲۵ - ایک مخروطی تراش دو معلومہ مخروطیوں کے چار نقاطِ تقاطع میں سے گزرتی ہے، ثابت کرو کہ اس کے علاوہ وہ ایک اور صرف ایک اور شرط پوری کر سکتی ہے۔

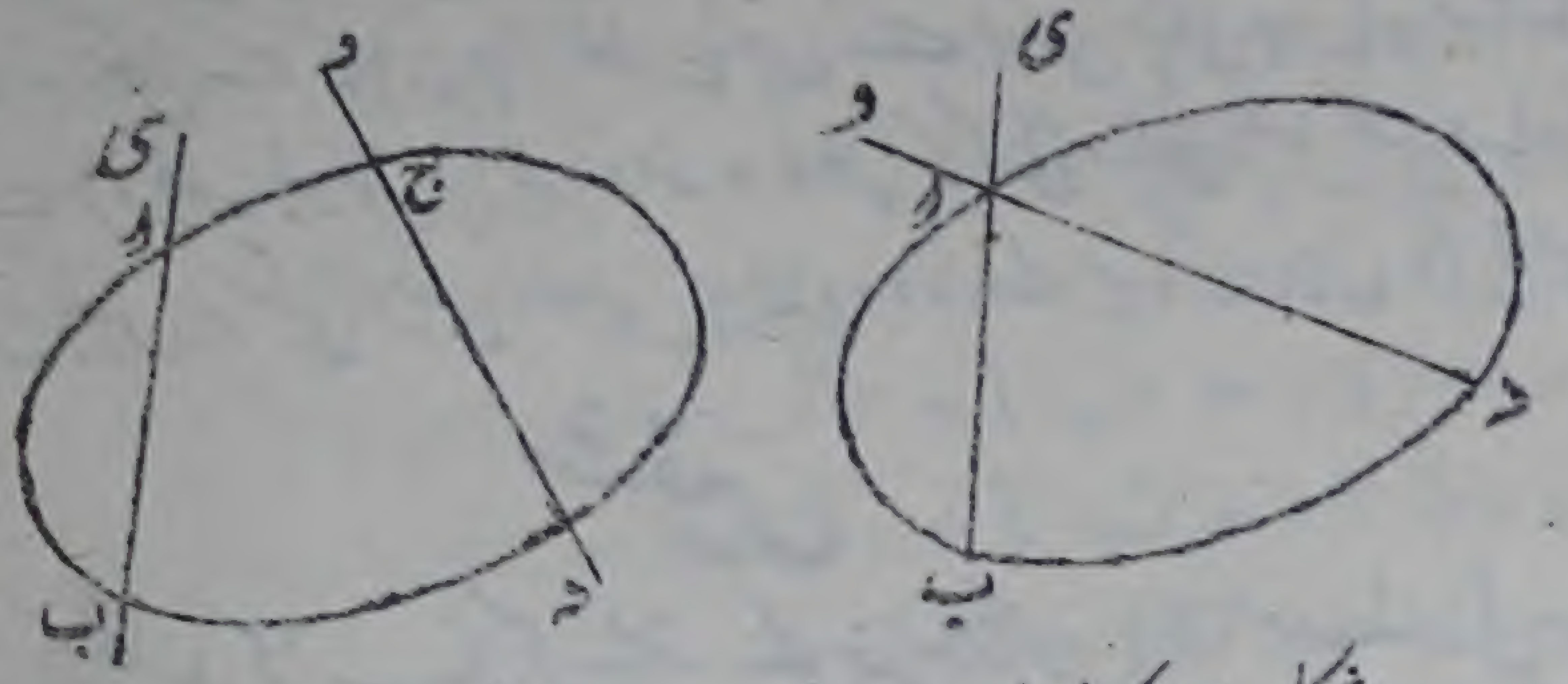
اگر س = ۰ اور سَ = ۰ دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں تو مساوات س + ک سَ = ۰ سے ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے جو اِن کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتی ہے، چونکہ اس مساوات میں ایک اختیاری مستقل ک شامل ہوتا ہے جس کی قیمت تا حال متعین نہیں کی گئی، اس لئے ہم اس مساوات پر ایک اور شرط عائد کر سکتے ہیں جس سے ک کی قیمت متعین ہو جاتی ہے۔

۳۲۶ - وہ صورت جس میں الق = ۰ خطوطِ مستقیم کے ایک زوج میں تحلیل ہو جاتی ہے۔

اگر سَ = ۰ دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے تو اس سے دو خطوط

مستقیم تعبیر ہوتے ہیں، فرض کرو کہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے ی و = ۰ تب خطوط ی = ۰، و = ۰ میں سے ہر ایک س = ۰ سے دو نقاط پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ نقاط ا، ب اور ج، د ہیں، تب مساوات

$$س + ک ی و = ۰$$



شکل ۸۶، ا شکل ۸۶، ب

سے ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے جو چار نقاط ا، ب، ج، د میں سے گزرتی ہے۔

اب فرض کرو کہ د ساکن رہتا ہے اور خط و = ۰ اس کے گرد اس طرح گردش کرتا ہے کہ ج، ا کے قریب آتا جاتا ہے اور بالآخر ا پر منطبق ہو جاتا ہے، تب مخروطی س + ک ی و = ۰، س = ۰ سے ا پر کے دو منطبقہ نقاط پر ملتی ہے یعنی اسے مس کرتی ہے۔

پس اگر خطوطِ مستقیم ی = ۰ اور و = ۰ مخروطی س = ۰ پر ملیں تو ظاہر ہے کہ مخروطی س + ک ی و = ۰، مخروطی س = ۰ سے اُس نقطہ پر مس کرتی ہے جہاں ی = ۰ اور و = ۰ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی $لا^2 + لا ما + ما^2 + ۳ ما = ۰$ اور ۲ لا ما + ۳ ما + ۴ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرے اور نیز

نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرے۔

جو مخروطی متذکرہ بالا مخروطیوں کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتی ہے اس کی مساوات کی شکل یہ ہوگی

(لا^2 + لا ما + ما^2 + ۳ ما) + ک (۲ لا ما + ۳ ما + ۴) = ۰

اگر یہ مخروطی نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرے تو

۶ + ۹ ک = ۰ یعنی ک = − ۲/۳

پس مطلوبہ مساوات ہے

۳ (لا^2 + لا ما + ما^2 + ۳ ما) − ۲ (۲ لا ما + ۳ ما + ۴) = ۰

یا ۳ لا^2 − لا ما + ۳ ما^2 + ۳ ما − ۸ = ۰

مثال ۲۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (−۱، ۱) میں سے گزرے اور نیز اُن نقاط میں سے گزرے جہاں ابتدائی محور مخروطی

۳ لا^2 + ۴ لا ما + ما^2 − ما + ۲ = ۰ کو قطع کرتے ہیں۔

مطلوبہ مساوات کی شکل یہ ہے

(۳ لا^2 + ۴ لا ما + ما^2 − ما + ۲) + ک لا ما = ۰

جہاں ک کی قیمت اس شرط کی رو سے معلوم کرنی چاہیئے کہ مطلوبہ مخروطی نقطہ (−۱، ۱) میں سے گزرتی ہے۔

لہٰذا ۱ − ک = ۰ یا ک = ۱

پس مطلوبہ مساوات ہے ۳ لا^2 + ۵ لا ما + ما^2 − ما + ۲ = ۰

مشقیں

۴۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۳ لا^2 + ما^2 = ۴ اور لا ما = ۵ کے نقاطِ تقاطع اور نیز نقطہ (−۱، ۲) میں سے گزرے۔

۵۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی تراشوں

س = ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

اور س' = ا' لا^2 + ۲ ھ' لا ما + ب' ما^2 + ۲ گ' لا + ۲ ف' ما + ج' = ۰

کے نقاطِ تقاطع میں سے نیز مبدأ میں سے گزرے۔

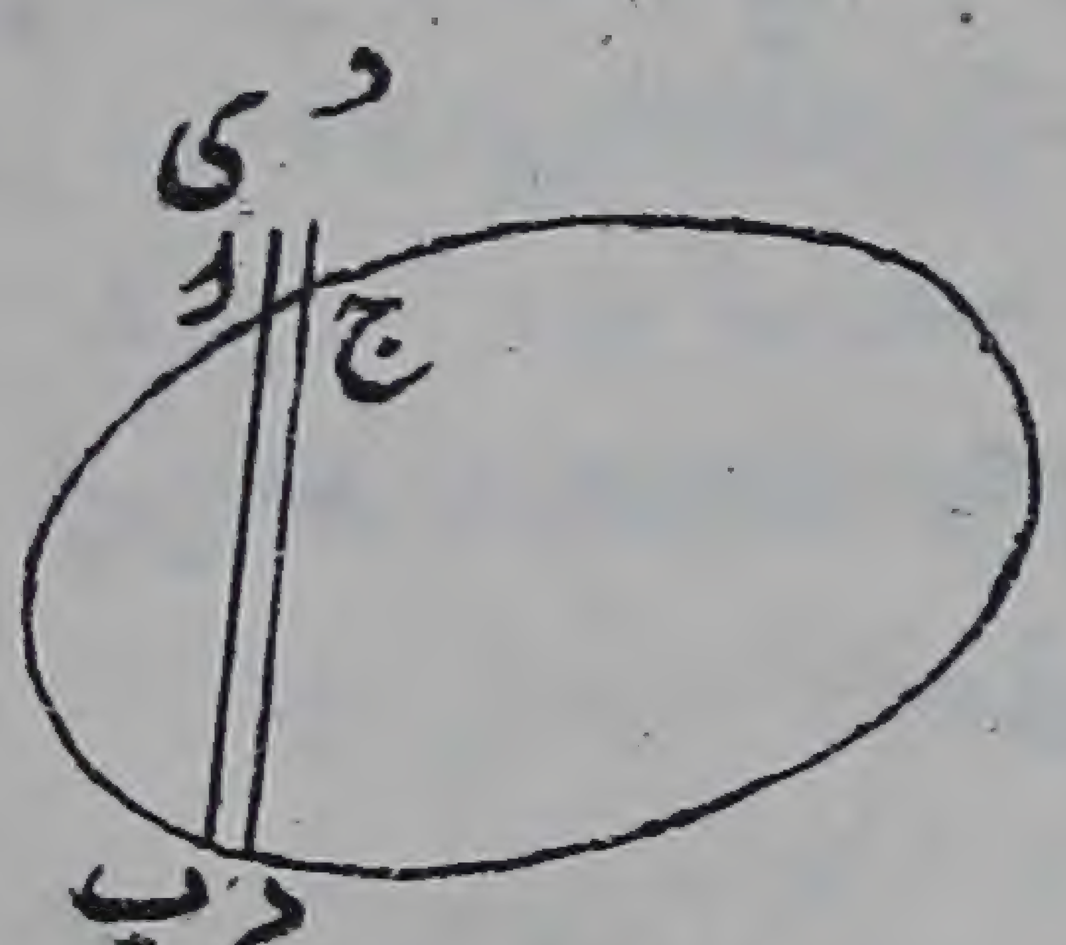
۶۔ ایک مخروطی، لا² + لا ما + ما² = ۳ اور ۲ لا² + لا ما − ما² + ۳ لا = ۰
کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتی ہے اور اس کا ایک متقارب محور لا کے متوازی ہے، مخروطی کی مساوات معلوم کرو۔
(درجہ دوم کی رقموں میں ما جزوِ ضربی ہونا چاہیئے، دیکھو دفعہ ۱۱۰)

۷۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے چار نقاطِ تقاطع میں سے دو مکافی کھینچے جا سکتے ہیں۔
(یہاں حاصلہ مساوات میں درجہ دوم کی رقموں کو مربع کامل بنانا چاہیئے۔

۲۳۷۔ مساوات س + ک ی² = ۰ کی تعبیر

اب فرض کرو کہ نقاط ج اور د دونوں مخروطی پر اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ ج بتدریج حرکت کرتے کرتے ا کے پاس آ جاتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے اور د حرکت کرتے کرتے ب کے پاس آ جاتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب مخروطی س + ک ی د = ۰، س = ۰ سے ایسے چار نقاط پر ملتی ہے جن میں سے دو بالآخر ا پر منطبق ہوتے ہیں، اور باقی دو ب پر نیز اس انتہائی حالت میں د = ۰ بعینہ وہی ہے جو ی = ۰ ہے، پس ہم دیکھتے ہیں کہ مخروطی س + ک ی² = ۰ مخروطی س = ۰ کو اُن دو نقاط پر مس کرتی ہے جہاں خطِ مستقیم ی = ۰ مخروطی س = ۰ کو قطع کرتا ہے۔



شکل ۸۶

جب دو مخروطی تراشیں اس طرح سے ایک دوسرے کو دو نقاط پر

مس کریں تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ ان کا باہمی دوہرا تماس ہے۔

۲۳۸ - حوالہ کے محوروں کو مس کرنے والی مخروطیاں۔

اگر ایک مخروطی، س = ۰ کو ان نقاط پہ مس کرے جہاں ی = ۰
س = ۰ کو قطع کرتا ہے تو اس کی عام مساوات

$$\text{س} + \text{لہ}\,\text{ی}^{2} = 0 \quad \text{ہوگی۔}$$

اب فرض کرو کہ مساوات س = ۰ محوروں کو تعبیر کرتی ہے

$$\text{یعنی} \quad \text{س} \equiv \text{لا}\,\text{ما} = 0$$

تب ہم دیکھتے ہیں کہ اس مخروطی کی عام سے عام مساوات جو حوالہ کے محوروں کو ان نقاط پر مس کرتی ہے جہاں خط $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} - 1 = 0$ محاور کو قطع کرتا ہے $\text{لا}\,\text{ما} + \text{لہ}\,(\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} - 1)^{2} = 0$ ہے۔

$\frac{1}{\text{لہ}} = 2\,\text{مہ}$ رکھنے سے یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے

$$(\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} - 1)^{2} + 2\,\text{مہ}\,\text{لا}\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

۲۳۹ - حوالہ کے محوروں کو مس کرنے والا مکافی

اس مخروطی کی مساوات جو محوروں کو مس کرتی ہے اس شکل کی ہوتی ہے

$$(\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} - 1)^{2} + 2\,\text{مہ}\,\text{لا}\,\text{ما} = 0$$

اگر یہ مساوات قطع مکافی کو تعبیر کرے تو درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل بنائینگی۔ یہ رقمیں حسب ذیل ہیں

$$\text{لا}^{2}\,\text{ل}^{2} + 2\,\text{لا}\,\text{ما}\,(\text{ل}\,\text{م} + \text{مہ}) + \text{ما}^{2}\,\text{م}^{2}$$

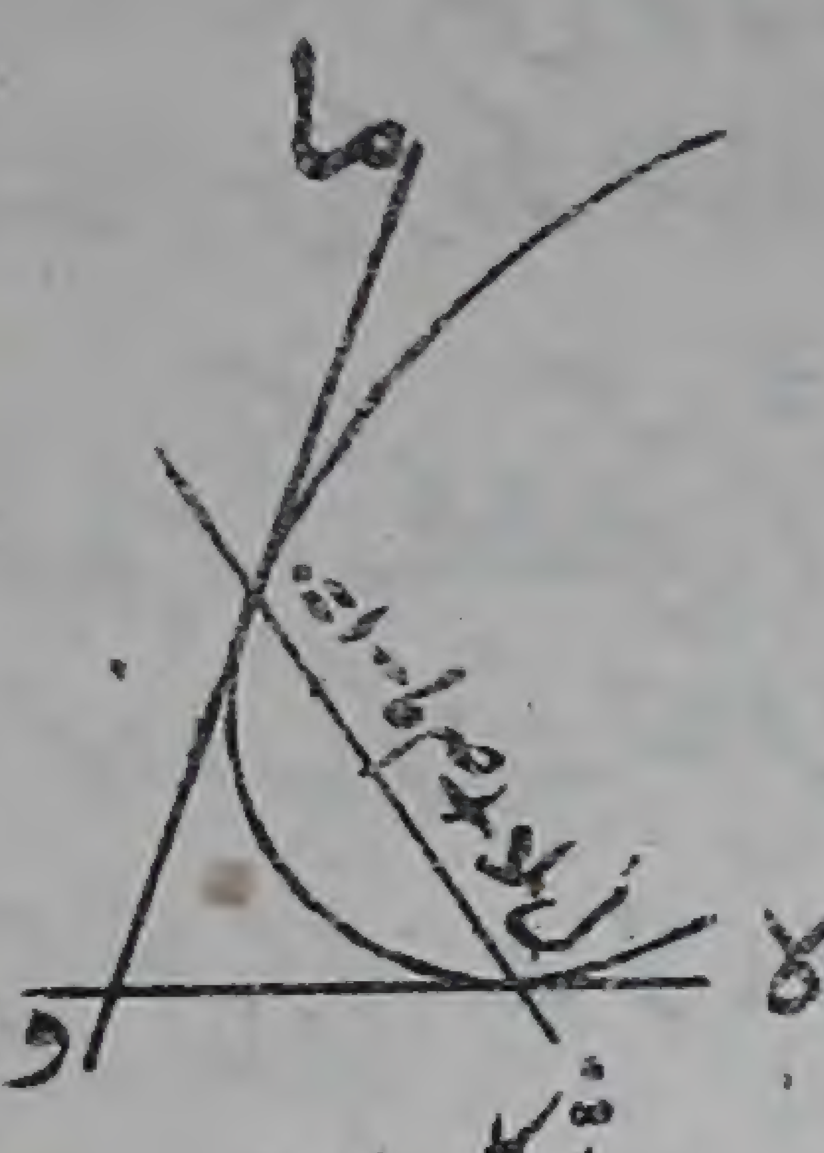
انکے مربع کامل ہونے کے لئے $\text{ل}^{2}\,\text{م}^{2} = (\text{ل}\,\text{م} + \text{مہ})^{2}$ یا $\text{مہ} = -2\,\text{ل}\,\text{م}$

(اصل مہ = ۰ ناقابل تسلیم ہے کیونکہ اس سے دو منطبقہ خطوط مستقیم
$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} = 1$ تعبیر ہوتے ہیں۔)

پس چونکہ مہ کی صرف ایک قیمت ہے، اس لئے ہمیں صرف ایک

مکانی حاصل ہوتا ہے جو محوروں سے دو نقاط پر ملتا ہے اور اس کی مساوات ہے (ل لا + م ما − ۱)^{۲} − ۴ ل م لا ما = ۰ یا (ل لا − م ما)^{۲} − ۲ ل لا − ۲ م ما + ۱ = ۰

یہ مساوات ایک مشہور شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے۔
فی الحقیقت چونکہ



شکل ۸۷

(ل لا + م ما − ۱)^{۲} = ۴ ل م لا ما

اسلئے ل لا + م ما − ۱ = ± ۲ $\sqrt{\text{ل م لا ما}}$

یعنی ل لا + م ما ∓ ۲ $\sqrt{\text{ل م لا ما}}$ = ۱

پس طرفین کے جذروں کو مساوی کرنے سے

$\sqrt{\text{ل لا}}$ + $\sqrt{\text{م ما}}$ = ۱ ...... (۲)

جہاں کوئی سی علامت دونوں جذروں کے ساتھ لی جا سکتی ہے۔

نوٹ — یہ مکانی محوروں سے اُن نقاط پر مس کرتا ہے جہاں خط ل لا + م ما − ۱ = ۰ ان سے ملتا ہے)

۲۴۰ — نقطہ م (لاَ، ماَ) سے مخروطی

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کے جو مماس کھینچ سکتے ہیں اُن کی مساوات معلوم کرو۔

اگر ن، ق نقاطِ تماس ہوں تو مماسات م ن، م ق ملکر ایک ایسی مخروطی بناتے ہیں جسکا متذکرہ بالا مخروطی کے ساتھ نقاط ن اور ق پر دوہرا تماس ہے، لیکن چونکہ ن ق نقطہ م کا قطبی ہے، اس لئے اِس کی مساوات ہے

لا (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + ما (ھ لاَ + ب ماَ + ف) + گ لاَ + ف ماَ + ج = ۰

لہٰذا دفعہ ۲۳۴ کی رو سے مماسوں کی مطلوبہ مساوات کی شکل یہ ہے

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

+ لہ {(لا (ا لاَ + ھ ماَ + گ) + ما (ھ لاَ + ب ماَ + ف)

+ گ لاَ + ف ماَ + ج }^۲ = ۰

لہ کی قیمت اِس امر پر غور کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے کہ اگر یہ مساوات م میں سے گزرنے والے مماسوں کو تعبیر کرے تو یہ م کے محددوں (لاَ، ماَ) سے پوری ہوگی

∴ ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج

+ لہ { ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج }^۲ = ۰

پس لہ = − ۱ / (ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج)

اور مطلوبہ مساوات ہے

(ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج)

(ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج)

= { ا لا لاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج }^۲

اسے ہم نے اس سے پہلے دفعہ ۱۳۸ میں بھی معلوم کیا ہے۔

مشقیں

۸۔ نقطہ (۱، ۱) سے مخروطی لا^۲ + لا ما + ما^۲ = ۵ کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

ذیل کی مساواتوں پر دفعہ ۲۴۰ کا پورا عمل کرنے سے مخروطیوں کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے جا سکتے ہیں۔ اور اس امر کی تصدیق کرو کہ جوابات اُن نتائج کے مطابق ہیں۔

جو ان خاص صورتوں میں عام ضابطہ کو استعمال سے حاصل ہوتے ہیں۔

۹ - لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

۱۰ - ما^2 - ۴ ا لا = ۰

۱۱ - $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - ۱ = ۰$ ۔ ۱۲ - $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - ۱ = ۰$

۱۳ - امثلہ ۹ تا ۱۲ کے مماسات کے باہم علی القوائم ہونے کی شرائط لکھو اور ان سے مرتب دائروں کی مساواتیں مستنبط کرو۔ قطع مکافی کی صورت میں مرتب دائرہ کیا ہو جاتا ہے؟

۱۴ - اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (-۱، ۱) میں سے گزرے اور مخروطی ۳ لا^2 - لا ما + ۲ ما^2 + لا + ما + ۱ = ۰ سے اُن نقاط پر دوہرا تماس رکھے جہاں محور لا اِس مخروطی کو قطع کرتا ہے۔

۱۵ - اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزرے اور نیز اُن نقاط میں سے گزرے جہاں خطوط مستقیم لا + ما + ۱ = ۰، لا - ۳ ما + ۲ = ۰ مخروطی ۲ لا^2 + ۳ ما^2 = ۶ سے ملتے ہیں۔

۱۶ - ثابت کرو کہ ایک ہی ایسا مکافی کھینچ سکتا ہے جو ایک مفروضہ مخروطی کو دو نقاط پر مس کرے۔

(فرض کرو کہ ل لا + م ما + ن = ۰ اُس خط کی مساوات ہے جو نقاطِ تماس کو ملاتا ہے، پھر ک کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لئے محصلہ مخروطی ایک مکافی کو تعبیر کرے)

۱۷ - ثابت کرو کہ ایک اور صرف ایک ہی قائم قطع زائد کھینچ سکتا ہے جو ایک مفروضہ مخروطی کو دو نقاطِ معلومہ پر مس کرے۔

۱۸ - ایک مکافی محاور کو نقاط ا اور ب پر مس کرتا ہے جن کا فاصلہ مبدأ سے ا، ب کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ مکافی کی مساوات شکل $\pm\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} \pm \sqrt{\frac{\text{ما}}{\text{ب}}} = ۱$ میں تحویل

ہوسکتی ہے۔

۱۹- نیز ثابت کرو کہ (۱) مشق ۱۸ کے مکافی کے اُس حصہ کے لئے جو نقاط و ا ب کے اندر واقع ہوتا ہے مساوات کی دونوں علامتیں مثبت ہونی چاہئیں۔ (۲) جو حصہ نقطہ ا سے پرے واقع ہے اس کے لئے علامتیں + اور − ہونی چاہئیں اور جو حصہ ب سے پرے واقع ہے اس کے لئے علامتیں − اور + ہونی چاہئیں۔

۲۰- ایک مکافی کے وترِ خاص کے سروں پر مماس کھینچے گئے ہیں، ان مماسوں کو محور مان کر مکافی کی مساوات معلوم کرو۔ [واضح ہو یہ مماس علی القوائم ہیں]

۲۱- ثابت کرو کہ ا₁، ا₂، ا₃ کی تمام قیمتوں کے واسطے مساوات

$$\frac{\text{ا}_1}{\text{لا جم عہ}_1 + \text{ما جم عہ}_1 - \text{ع}_1} + \frac{\text{ا}_2}{\text{لا جم عہ}_2 + \text{ما جب عہ}_2 - \text{ع}_2} + \frac{\text{ا}_3}{\text{لا جم عہ}_3 + \text{ما جب عہ}_3 - \text{ع}_3} = 0$$

سے وہ مخروطی تعبیر ہوتی ہے جو تین خطوطِ مستقیم $\text{لا جم عہ}_1 + \text{ما جب عہ}_1 - \text{ع}_1 = 0$ وغیرہ کے تین نقاطِ تقاطع میں سے گذرتی ہے۔

(دیکھو کہ یہ درجہ دوم کی مساوات ہے اور کسی دو خطوط کا نقطۂ تقاطع اس پر واقع ہوتا ہے۔)

۲۲- وہ شرائط معلوم کرو کہ مشق ماقبل کی مخروطی ایک دائرہ کو تعبیر کرے اور ثابت کرو کہ یہ شرائط اس طرح لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\text{ا}_1\,\text{جم}\,(\text{عہ}_2 + \text{عہ}_3) + \text{ا}_2\,\text{جم}\,(\text{عہ}_3 + \text{عہ}_1) + \text{ا}_3\,\text{جم}\,(\text{عہ}_1 + \text{عہ}_2) = 0$$

$$\text{ا}_1\,\text{جب}\,(\text{عہ}_2 + \text{عہ}_3) + \text{ا}_2\,\text{جب}\,(\text{عہ}_3 + \text{عہ}_1) + \text{ا}_3\,\text{جب}\,(\text{عہ}_1 + \text{عہ}_2) = 0$$

(لا^2 اور ما^2 کے سروں کو مساوی رکھو اور لا ما کا سر صفر بناؤ، محور قائم فرض کرو)

۲۳- اوپر کی مساواتوں کو ا₁، ا₂، ا₃ کے لئے حل کرنے سے ثابت کرو کہ بیرونی دائرہ کی مساوات حسب ذیل شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{\text{حبب}(\text{عہ}_2 - \text{عہ}_3)}{\text{لا جم عہ}_1 + \text{ما حبب عہ}_1 - \text{ع}_1} + \frac{\text{حبب}(\text{عہ}_3 - \text{عہ}_1)}{\text{لا جم عہ}_2 + \text{ما حبب عہ}_2 - \text{ع}_2} + \frac{\text{حبب}(\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)}{\text{لا جم عہ}_3 + \text{ما حبب عہ}_3 - \text{ع}_3} = 0$$

۱۴۳ — پانچ نقاطِ معلومہ میں سے ایک اور صرف ایک ہی مخروطی کھینچ سکتی ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ دو مخروطیوں کے چار نقاطِ تقاطع اور ان کی سطح مستوی پر کے ایک اور نقطہ میں سے ایک مخروطی کھینچ سکتی ہے، اس طرح سے ہمیں ایک مخروطی حاصل ہوتی ہے جو پانچ نقاطِ معلومہ میں سے گزرتی ہے اور یہ عمل ہمیشہ ہو سکتا ہے۔

اگر ا، ب، ج، د، ع پانچ نقطے ہوں تو نقاط ا، ب، ج، د میں سے مخروطیوں کا ایک نظام گزرتا ہے اور اس نظام میں سے ایک مخروطی خطوط اب، ج د پر مشتمل ہے اور ایک اور مخروطی خطوط ب ج، ا د پر۔

ان کے نقاط مشترکہ ا، ب، ج، د میں سے گزرنے والی کسی مخروطی کی مساوات س + ک سؔ = ۰ ہے، جہاں

س = ۰ خطوط اب اور ج د کی مساوات ہے

اور سؔ = ۰ خطوط ب ج اور ا د کی مساوات ہے۔

اب ہم ک کی ایسی قیمت معلوم کر سکتے ہیں کہ مخروطی

س + ک سؔ = ۰

نقطہ ع میں سے گزرے، چونکہ بلحاظ ک کے یہ مساوات درجہ اول ہے اس لئے صرف ایک ہی ایسی مخروطی کھینچ سکتی ہے۔

مندرجہ بالا نتیجہ پر ہم حسب ذیل طریقہ سے بھی پہنچ سکتے ہیں۔

مخروطی کی مساوات ہمیشہ اس شکل کی ہوتی ہے

$$\text{و لا}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\,\text{گ لا} + 2\,\text{ف ما} + \text{ج} = 0$$

چونکہ مساوات کی سب رقموں کو ہم کسی ایک سر پر تقسیم کر سکتے ہیں اس لئے یہ سمجھنا

چاہیئے کہ مساوات بالا میں چھ سر نہیں بلکہ درحقیقت پانچ سر ہیں۔

پس چونکہ مساوات میں فی الحقیقت پانچ سر ہیں اس لیئے ایک مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرائی جاسکتی ہیں بعینہ اسی طرح جیسے کہ ایک خط مستقیم سے دو شرطیں پوری کرائی جاسکتی ہیں۔

اگر پانچ نقطے دئے ہوئے ہوں تو ان کے محدد مساوات

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

میں مندرج کرنے سے ہمیں سروں کی نسبتیں معلوم کرنے کے لئے درجۂ اول کی پانچ ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ اُن نسبتوں کو معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں۔

ظاہر ہے کہ بالعموم جب ایک مخروطی کوئی شرط پوری کرے تو اس کی مساوات کے سر بھی ایک خاص ربط پورا کریں گے۔

عملی طور پر اس دفعہ کا پہلا قاعدہ زیادہ موجب سہولت ہوتا ہے۔

۲۴۲ - چار نقاطِ معلومہ میں سے گزرنے والی مخروطیاں۔

فرض کرو کہ نقاط ا، ب، ج، د ہیں، اب اور ج د کو علاوہ اُن کو اتنا خارج کرو کہ یہ و پر ملیں، خطوط و اب، و ج د کو لا اور ما کے محور مانو۔

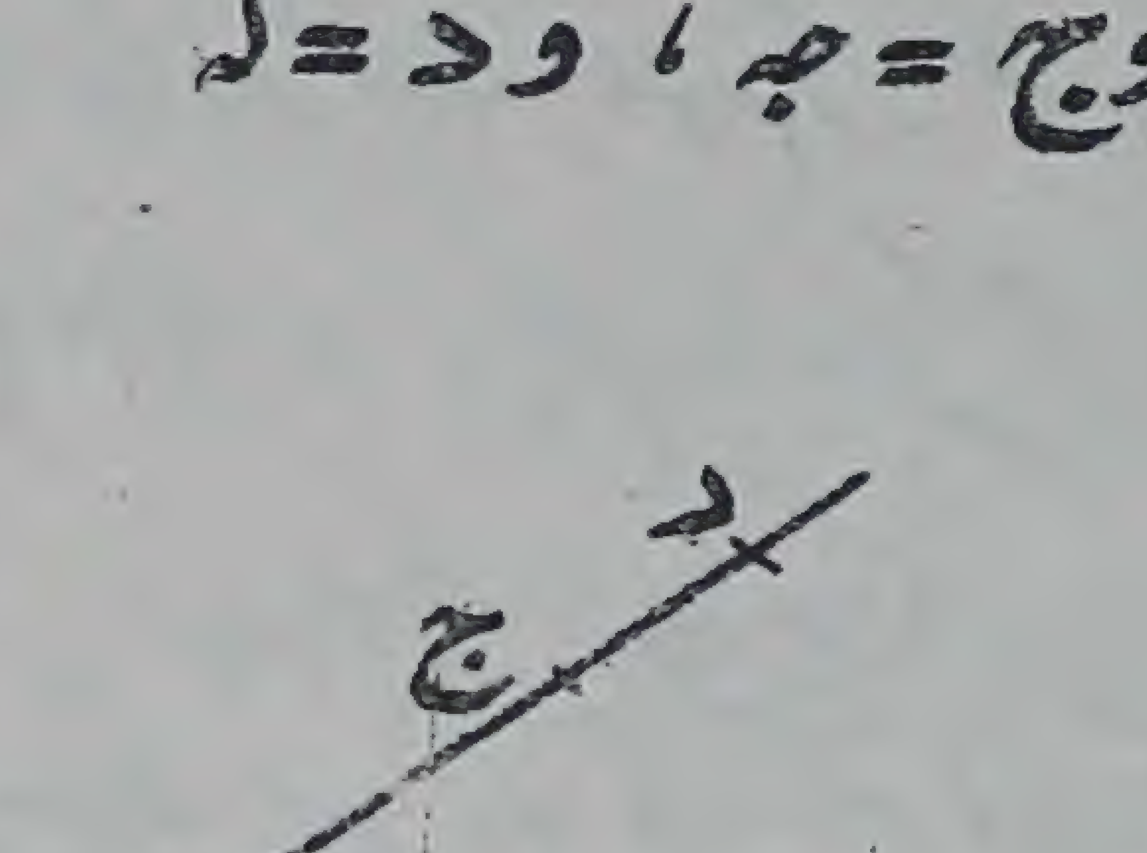
فرض کرو کہ و ا = عہ، و ب = بہ، و ج = جہ، و د = لہ

تب ا ج کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{جہ}} = 1$$

اور ب د کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{لہ}} = 1$$



شکل ۸۸

نیز ا ب ہے ما = ۰

اور ج د ہے لا = ۰

پس ان چار نقاط میں سے گزرنے والی دو مخروطی تراشیں ہیں۔

$$\text{لا ما} = ۰ \quad \text{اور} \quad \left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{جہ}} - ۱\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{لہ}} - ۱\right) = ۰$$

لہذا ان چار نقطوں میں سے گزرنے والی کوئی اور مخروطی ہے

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{جہ}} - ۱\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{لہ}} - ۱\right) + \text{مہ لا ما} = ۰$$

جہاں مہ کی قیمت کچھ ہی ہو سکتی ہے -

مشقیں

۲۴ - اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ذیل میں سے گزرے

(۰، ۰)، (۱، ۰)، (۰، ۲)، (۲، ۱)، (۴، ۲)

۲۵ - اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ذیل میں سے گزرے

(۰، ۰)، (۰، ۱)، (۰، ۳)، (۲، ۱)، (۴، ۲)

۲۶ - مساوات (۳) سے جو مخروطیاں تعبیر ہوتی ہیں ان میں سے ایک ہے

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{لہ}} - ۱\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{جہ}} - ۱\right) = ۰$$

مہ کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے یہ مخروطی حاصل ہوتی ہے -

۲۴۳ - ہم ماسکہ مخروطی تراشیں -

اب ہم مجمل طور پر چند ایسی مخروطیوں کے ایک نظام کے خواص پر بحث کرینگے جن کے ماسکے وہی ہوں -

اس قسم کی مخروطیاں ہم ماسکہ مخروطیاں کہلاتی ہیں ان کے بہت سے خواص خالص ہندسی طریقوں سے بھی حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن یہاں ہم محض تحلیلی طریقوں کو مدِ نظر رکھیں گے -

۲۴۴ - ہم ماسکہ نظام کی مساوات -

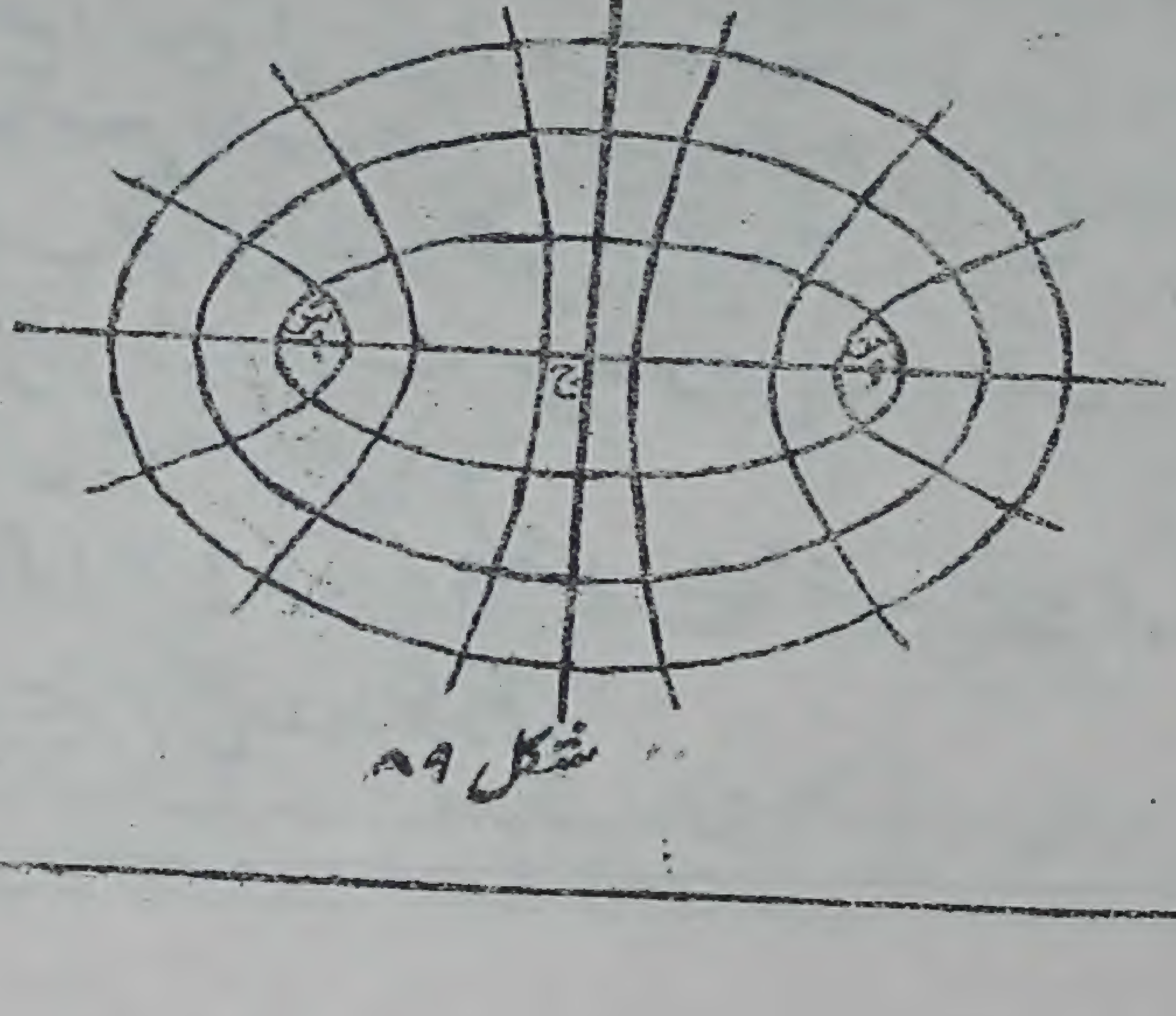
ایک مخروطی کی عام سے عام مساوات جس کے ماسکے وہی ہوں جو $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے ہیں

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}} = 1$$

ہے جہاں لہ مستقل ہے۔

اولاً اگر ایک مخروطی کے ماسکے س اور سَ وہی ہوں جو ایک معلوم مخروطی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے ہیں تو اس کا مرکز بھی وہی ہوگا جو معلوم مخروطی کا ہے اور اس کے محور بھی بلحاظ سمت کے معلوم مخروطی کے محوروں پر منطبق ہونگے۔ اس کی وجہ ظاہر ہے کیونکہ س سَ سب مخروطیوں کے محور اعظم کی مشترک سمت ہے اور اگر س سَ کے وسطی نقطہ میں سے ایک خط محور اعظم پر عمود وار کھینچا جائے تو یہ خط سب مخروطیوں کا محور اصغر ہوگا۔

پس ماسکے، مرکز، محوروں کی سمتیں سب مخروطیوں کے لئے وہی ہیں۔



شکل ۸۹

اس سے معلوم ہوا کہ اس نظام کی کسی اور مخروطی کی مساوات یہ ہوسکتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\bar{\text{ا}}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\bar{\text{ب}}^2} = 1$$

لیکن $\text{ج س}^2 = \text{ا}^2\,\text{ز}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ .... (دیکھو دفعہ ۱۶۱)

$$\therefore\ \text{ا}^2 - \text{ب}^2 = \bar{\text{ا}}^2 - \bar{\text{ب}}^2$$

پس اگر $\bar{\text{ا}}^2 = \text{ا}^2 + \text{لہ}$ تو

$$\bar{\text{ب}}^2 = \text{ب}^2 + \text{لہ}$$

اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = 1 \quad \text{......(۴)}$$

۴۴۵ — طالب علم امور ذیل کی آسانی سے تصدیق کرسکتا ہے۔
اگر ا بڑا ہو ب سے تو مخروطی تراشش

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = 1$$

(۱) قطع ناقص ہوگی جبکہ لہ مثبت ہو یا جبکہ لہ منفی ہو اور مقداراً ب^2 سے کم ہو یعنی جبکہ $\text{لہ} > -\text{ب}^2$

(۲) خطِ مستقیم $\text{ما} = 0$ (یعنی لا کا محور) ہوگی جبکہ $\text{لہ} = -\text{ب}^2$

(۳) قطع زائد ہوگی جبکہ $\text{لہ} < -\text{ب}^2$ اور $> -\text{ا}^2$

(۴) خطِ مستقیم $\text{لا} = 0$ ہوگی (یعنی ما کا محور) ہوگی جبکہ $\text{لہ} = -\text{ا}^2$

(۵) ایک خیالی قطع ناقص ہوگی جبکہ $\text{لہ} < -\text{ا}^2$

۴۴۶ — سطح مستوی پر کے کسی نقطہ میں سے ایک ہم ماسکہ نظام کی دو مخروطیاں کھنچ سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ $(\bar{\text{لا}}، \bar{\text{ما}})$ کوئی نقطہ ہے، تب ہمیں لہ کی وہ قیمت معلوم کرنی چاہیئے جس سے مخروطی

$\frac{لا^۲}{ا^۲+له} + \frac{ما^۲}{ب^۲+له} = ۱$ نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرے —

لہٰذا $\frac{لا_۱^۲}{ا^۲+له} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲+له} = ۱$

یا $لا_۱^۲(ب^۲+له) + ما_۱^۲(ا^۲+له) = (ا^۲+له)(ب^۲+له)$

یعنی $له^۲ + له(ا^۲+ب^۲-لا_۱^۲-ما_۱^۲) + ا^۲ب^۲ - ا^۲ما_۱^۲ - ب^۲لا_۱^۲ = ۰$

له میں یہ درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس لئے له کی دو قیمتیں ایسی ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کے جواب میں جو ہم ماسکہ حاصل ہوگا وہ نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزریگا —

مثال — وہ مخروطیاں دریافت کرو جو $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۱} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکہ ہوں اور نقطہ (۱، ۱) میں سے گزریں —

یہاں له کے لئے مساوات ہے

$\frac{لا^۲}{۲+له} + \frac{ما^۲}{۱+له} = ۱$ یا $\frac{۱}{۲+له} + \frac{۱}{۱+له} = ۱$

یعنی $له^۲ + له - ۱ = ۰$ یا $له = \frac{۱}{۲}(-۱ \pm \sqrt{۵})$

پس مطلوبہ مخروطیاں یہ ہیں

$$\frac{لا^۲}{۲-\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۵})} + \frac{ما^۲}{۱-\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۵})} = ۱$$

اور $$\frac{لا^۲}{۲-\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{۵})} + \frac{ما^۲}{۱-\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{۵})} = ۱$$

یعنی $\frac{۲لا^۲}{۳-\sqrt{۵}} - \frac{۲ما^۲}{\sqrt{۵}-۱} = ۱$ اور $\frac{۲لا^۲}{\sqrt{۵}+۳} + \frac{۲ما^۲}{\sqrt{۵}+۱} = ۱$

ان میں سے پہلی مخروطی صریحاً قطع زائد ہے اور دوسری قطع ناقص —

۲۴۷ - ایک نقطہ میں سے جو دو ہم ماسکے کھنچ سکتے ہیں اُن میں سے ایک قطع ناقص ہوتا ہے اور دوسرا قطع زائد۔

فرض کرو کہ بہ = ب² + لہ، تب اگر بہ منفی ہو تو مخروطی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لہ}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}}=1$$

صریحاً قطع زائد ہوگی اور اگر بہ مثبت ہو تو مخروطی ناقص ہوگی۔

مساوات یوں بھی لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2-\text{ب}^2+\text{بہ}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}}=1$$

پس اگر مخروطی نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گزرے تو بہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^2-\text{ب}^2+\text{بہ}}+\frac{\text{ماَ}^2}{\text{بہ}}=1$$

$$\text{یا}\quad \text{بہ}(\text{ا}^2-\text{ب}^2+\text{بہ})=\text{بہ}\,\text{لاَ}^2+(\text{ا}^2-\text{ب}^2+\text{بہ})\,\text{ماَ}^2$$

$$\text{یعنی}\quad \text{بہ}^2+\text{بہ}(\text{ا}^2-\text{ب}^2-\text{لاَ}^2-\text{ماَ}^2)-(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{ماَ}^2=0$$

اب $\text{ا} > \text{ب}$ لہذا اصلوں کا حاصل ضرب منفی ہے۔

(دیکھو ٹوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۵۶)

پس اصلیں حقیقی ہیں جن میں سے ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔

پس ایک مخروطی ناقص ہے اور دوسری زائد۔

۲۴۸ - دو ہم ماسکہ مخروطیاں ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطیاں یہ ہیں

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1\quad\text{اور}\quad\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لہ}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}}=1$$

اور ان کا نقطۂ تقاطع (لا، ما) ہے، تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ان مخروطیوں کے نقطہ (لا، ما) پر کے مماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں

اب دو مماس حسب ذیل ہیں

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2 + \text{ل}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2 + \text{ل}} = 1$$

یہ علی القوائم ہونگے اگر

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2(\text{ا}^2 + \text{ل})} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2(\text{ب}^2 + \text{ل})} = 0 \qquad (\text{حصہ اول دفعہ ۱۹})$$

$$\text{اب} \quad \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2 + \text{ل}} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2 + \text{ل}} = 1$$

تفریق کرنے سے

$$\text{لا}_1^2\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{1}{\text{ا}^2 + \text{ل}}\right) + \text{ما}_1^2\left(\frac{1}{\text{ب}^2} - \frac{1}{\text{ب}^2 + \text{ل}}\right) = 0$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{لا}_1^2\,\text{ل}}{\text{ا}^2(\text{ا}^2 + \text{ل})} + \frac{\text{ما}_1^2\,\text{ل}}{\text{ب}^2(\text{ب}^2 + \text{ل})} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2(\text{ا}^2 + \text{ل})} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2(\text{ب}^2 + \text{ل})} = 0$$

لیکن یہ شرط بعینہٖ وہی ہے جو ماسوں کے علی القوائم ہونے کی شرط ہے پس ہم اسکہ تراشیں اپنے نقاطِ تقاطع پر ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتی ہیں۔

۲۴۹ ۔ ایک معلومہ نظام کی صرف ایک ہی مخروطی ایسی ہو سکتی ہے جو ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات یہ ہے

$$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} = 1$$

اس کے لئے شرط کہ یہ خط مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2+لہ} + \frac{ما^2}{ب^2+لہ} = ۱$ کو مس کرے

$$(ا^2+لہ)ل^2 + (ب^2+لہ)م^2 = ۱$$ (دفعہ ۱۴۱)

ہے اور یہ لہ میں درجہ اول کی مساوات ہے جس کی صرف ایک ہی اصل ہے۔ پس معلوم ہوا کہ صرف ایک ہی ہم ماسکہ ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۲۷ — ثابت کرو کہ نقطہ (۱، ۲) میں سے مخروطی $۲لا^2 + ما^2 = ۱$ کے جو ہم ماسکے کھینچ سکتے ہیں اُن میں سے ایک ناقص ہے اور دوسرا زائد۔

۲۸ — ص ن + صَ ن = مستقل، اس خاصیت سے ثابت کرو کہ صرف ایک ہی ایسا ناقص کھینچ سکتا ہے جسکے ماسکے دئے ہوئے ہوں اور جو ایک نقطۂ معلومہ میں سے گزرے۔

قطع زائد کے لئے بھی یہی خاصیت ثابت کرو۔

۲۹ — اس امر کو مدّنظر رکھ کر کہ ایک مرکز دار مخروطی کے کسی نقطہ پر کا مماس اس کے ماسکی فاصلوں کے درمیان کے داخلی یا خارجی زاویوں کی تنصیف کرتا ہے دفعہ ۲۴۸ کا نتیجہ حاصل کرو۔

۳۰ — ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو $\frac{لا^2}{۲} + ما^2 = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکہ ہے اور لا + ما = ۶ کو مس کرتی ہے $\frac{۲لا^2}{۳۷} + \frac{۲ما^2}{۳۵} = ۱$ ہے

۳۱ — اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (ا جم عہ، ب جب عہ) میں سے گزرتا ہے اور ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکہ ہے۔

۳۲ — مخروطیوں کے ایک ہم ماسکہ نظام کے لحاظ سے ایک معلومہ خطِ مستقیم کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{له}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{له}} = 1$ .... (۱)
ہم ماسکہ مخروطیوں کے نظام میں سے ایک مخروطی ہے اور معلومہ
خطِ مستقیم $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} = 1$ ہے۔
فرض کرو کہ مخروطی (۱) کے لحاظ سے خط مذکورہ کا قطب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$
ہے، تب نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ کا قطبی یعنی

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2+\text{له}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2+\text{له}} = 1 \quad .... \quad (\text{دفعہ } ۱۸۹)$$

وہی خط ہے جو $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} = 1$ سے تعبیر ہوتا ہے۔
پس سروں کا مقابلہ کرنے سے $\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2+\text{له}} = \text{ل}$ اور $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2+\text{له}} = \text{م}$
اس لئے $\text{لا}_1 = (\text{ا}^2+\text{له})\,\text{ل}$، $\text{ما}_1 = (\text{ب}^2+\text{له})\,\text{م}$
قطبوں کا طریق معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں میں سے له
کو ساقط کرنا چاہیئے۔

اب $\frac{\text{لا}_1}{\text{ل}} - \frac{\text{ما}_1}{\text{م}} = \text{ا}^2 + \text{له} - (\text{ب}^2 + \text{له}) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$

پس طریق کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}} - \frac{\text{ما}}{\text{م}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

پس مطلوبہ طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مفروضہ خطِ مستقیم پر عمود وارد ہے،
اب مفروضہ خطِ مستقیم ہم ماسکہ مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرتا ہے،
فرض کرو کہ نقطۂ تماس ن ہے اور ن ت مفروضہ خطِ مستقیم ہے، تب
مس کرنے والے ہم ماسکہ کے لحاظ سے ن قطب ہے۔ پس مطلوبہ
طریق خطِ مستقیم ن گ ہے جو ن میں سے ن ت پر عمود کھینچا گیا ہے۔
نتیجہ صریح۔ اگر ن ت کے قطبوں کا طریق ن گ ہو تو ن گ کے

قطبوں کا طریق ن ت ہوگا۔

چونکہ ن میں سے گزرنے والے دو ہم ماسکے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور ن ت ایک مخروطی کا مماس ہے اس لیے ن گ دوسری مخروطی کا مماس ہوگا، پس ن گ کے قطبوں میں سے ایک قطب ن ہے اور چونکہ طریق مطلوبہ خطِ مستقیم ن گ پر عمود وار ہے اس لئے یہ طریق خط ن ت ہی ہے۔

مشقیں

۳۲۔ مخروطی $۲ لا^۲ + ۳ ما^۲ = ۶$ کی ہم ماسکہ مخروطیوں کے لحاظ سے خط $لا + ما = ۵$ کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

۳۳۔ اگر $ل لا + م ما = ۱$ کے قطبوں کا طریق بلحاظ ہم ماسکہ نظام $\frac{لا^۲}{ا^۲ + لہ} + \frac{ما^۲}{ب^۲ + لہ} = ۱$ کے $ل_۱ لا + م_۱ ما = ۱$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ا^۲ - ب^۲)\, ل ل_۱ = (ب^۲ - ا^۲)\, م م_۱ = ۱$$

۳۴۔ مشق ماقبل سے ثابت کرو کہ ان دو خطوطِ مستقیم کا باہمی رابطہ متکافی ہے۔

۲۵۱۔ ہم ماسکہ مکافی ۔ اب تک ہم نے اپنی توجہ ہم ماسکہ مرکز دار مخروطیوں تک ہی محدود رکھی ہے۔ یہاں ہم ہم ماسکہ مکافیوں کے متعلق بھی چند الفاظ سپردِ قلم کرنا چاہتے ہیں۔

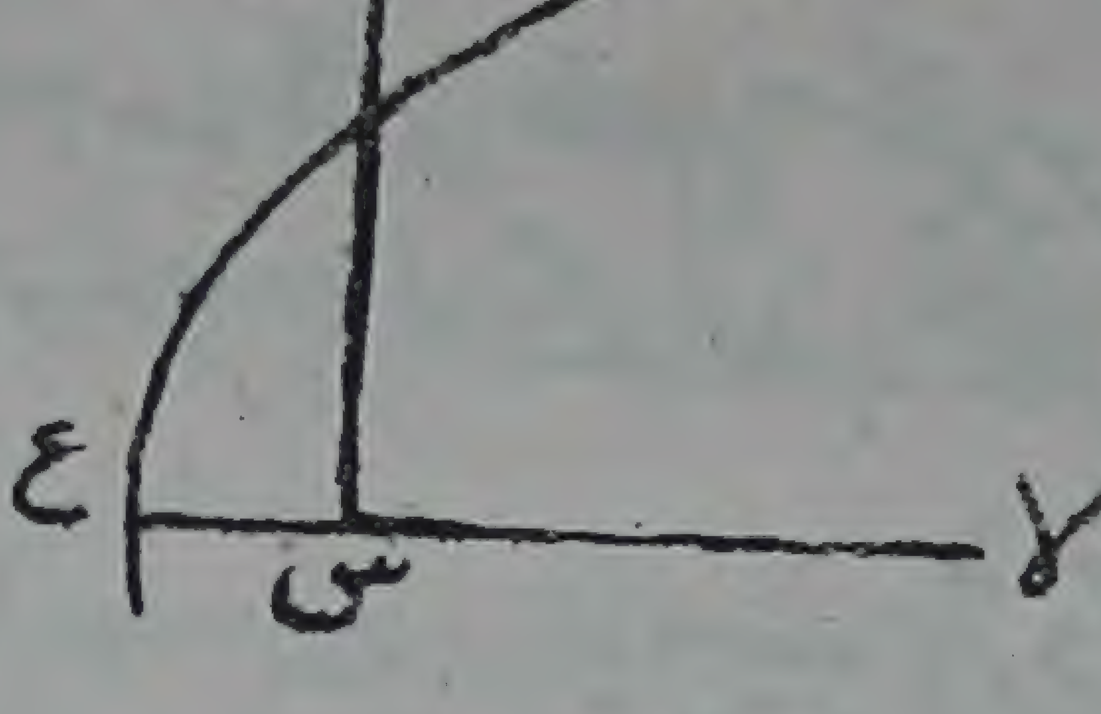
چونکہ مکافی میں ایک ہی ماسکہ ہوتا ہے اس لئے یہ صورت پہلی صورت سے مختلف ہے۔

اگر دو مکافیوں کا ماسکہ اور محور دونوں ایک ہی ہوں تو ان کو ہم ماسکہ مکافی کہتے ہیں۔

۲۵۲۔ مکافیوں کے ہم ماسکہ نظام کی مساوات

مشترک ماسکہ س کو مبدأ مانو اور مشترک محور کو لا کا

محور فرض کرو۔ تب ہم جانتے ہیں کہ اگر رأس ع کو مبدأ مانا جائے تو مکافی کی مساوات کی شکل یہ ہوتی ہے



شکل ۹۰

ما^{۲} = ۴ لہ لا جہاں لہ = س ع

پس مبدأ کو س پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

ما^{۲} = ۴ لہ (لا + لہ) ....(۵)

اور یہ عام مساوات مطلوبہ ہے۔

ہم ماسکہ مکافیوں کے مندرجہ ذیل خواص کو ہم طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں۔ ہم مرکز دار مخروطیوں کی متناظر خاصیتوں کے حاصل کرنے کے جو طریقے ہیں اُن سے اِن مسائل کے حاصل کرنے کی ترکیب کا پتہ چلتا ہے۔

مشقیں

۳۵ ۔ کسی معلومہ نقطہ میں سے دو ہم ماسکہ مکافی کھینچ سکتے ہیں۔

۳۶ ۔ کسی معلومہ نقطہ میں سے گزرنے والے دو ہم ماسکہ مکافیوں کے قعر مقابل سمتوں میں ہوتے ہیں۔ (یہ نتیجہ اس امر پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ لہ میں مساوات درجہ دوم کی اصلیں مختلف العلامت ہیں۔)

۳۷ ۔ دو ہم ماسکہ مکافی ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

۳۸ ۔ خط مستقیم ل لا + م ما = ۱ کے قطب کا طریق بلحاظ ہم ماسکہ مکافیوں ما^{۲} = ۴ لہ (لا + لہ) کے خطِ مستقیم م لا - ل ما + م^{۲}/ل = ۰ ہے۔

[فرض کرو کہ خطِ مذکور کا قطب بلحاظ ما^{۲} = ۴ لہ (لا + لہ) ہے (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$) ہے، تب معلومہ خطِ مستقیم وہی ہوگا جو ما ما$_{۱}$ - ۲ لہ لا = ۲ لہ (لا$_{۱}$ + ۲ لہ)

ہے، اس سے ظاہر ہے کہ ل² + ۲ الر = − ۱/ل اور ۲ لہ = − ل ما۱/م۱]

۳۹ — اگر دو خطوطِ مستقیم میں سے پہلا خط دوسرے کے قطب کا طریق ہو تو دوسرا پہلے کے قطب کا طریق ہوگا۔

باب ہژدہم پر متفرق مشقیں

۴۰ — اگر دو قائم قطع زائدوں کے چار نقاطِ تقاطع ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم کے ازواج ب ج، اد اور ج ا، ب د اور اب، ج د میں سے ہر ایک کے خط علی القوائم ہیں، اس سے حاصل کرو کہ ان چار نقطوں میں سے کسی تین کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اُس کا مرکز عمودی چوتھا نقطہ ہے۔

۴۱ — اب ج ایک مثلث ہے، اد، ا سے ب ج پر عمود کھینچا گیا ہے اور ن اس مثلث کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ دن × دا = دب × دج، د کو مبدأ مان کر اس سے حاصل کرو کہ ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرنے والے تمام قائم زائد اس کے مرکز ہندسی میں سے بھی گزرتے ہیں۔

۴۲ — مشق ما قبل کے قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریق ایک دائرہ ہے جو خطوط ب ج، ج ا، اب، ان، ب ن، ج ن، کے وسطی نقطوں میں سے اور عمودوں کے پایوں میں سے گزرتا ہے (اس دائرہ کو نو نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔)

۴۳ — ایک دائرہ پر کے چار نقطوں میں سے گزرنے والی سب مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۴۴ — ثابت کرو کہ مخروطی (لا²/عہ + ما²/جہ − ۱)(لا²/بہ + ما²/لہ − ۱) + مہ لا ما = ۰ کے لحاظ سے مبدأ کے قطبی کی مساوات ہے

$$لا\left(\frac{۱}{ع}+\frac{۱}{ب}\right)+ما\left(\frac{۱}{ج}+\frac{۱}{ل}\right)-۲=۰$$

۴۵ - خطوطِ مستقیم لا = ۲، ما + ۱ = ۰، لا + ما = ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کے رأسوں میں سے گزرنے والی مخروطی کی عام مساوات دریافت کرو۔

۴۶ - مشق ماقبل کے مثلث کے بیرونی دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔

۴۷ - ایک ناقص اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ دو ثابت علی القوائم خطوطِ مستقیم کو مس کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۴۸ - مخروطی $\left(\frac{لا}{م}+\frac{ما}{ن}-۱\right)^{۲}=۲ک\ لا\ ما$ کے مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۴۹ - اگر س = ۰ اور سَ = ۰ دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ (لاَ، ماَ) کا قطبی بلحاظ س + ل سَ = ۰ کے ی + ل یَ = ۰ ہے جہاں ی = ۰ قطبی ہے بلحاظ س کے اور یَ = ۰ قطبی ہے بلحاظ سَ کے۔

۵۰ - مخروطیوں ا لا^{۲} + ۲ ل لا ما + ب ما^{۲} = ۱ کے نظام کو شکل میں دکھاؤ جبکہ ہ اور ب مستقل ہوں اور ل متغیر ہو۔

۵۱ - اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جن پر ناقص $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}+\frac{ما^{۲}}{ب^{۲}}=۱$ ہم ماسکہ قائم قطع زائد کو قطع کرتا ہے۔

۵۲ - ہم ماسکہ مخروطیوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اور اس کے محورِ اعظم پر کے ایک ثابت نقطہ سے مخروطیوں کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نقاطِ تماس کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز محورِ اعظم پر ہے۔

۵۳ - دو ہم ماسکہ مخروطیوں کے دو متوازی مماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا فرق

مستقل ہے۔

۵۴ ــ چار ثابت نقطوں میں سے مخروطیوں کا جو نظام گزرتا ہے اسکے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ سب قطبی ایک اور ثابت نقطہ ق میں سے گزرتے ہیں، نیز ق کے قطبی ن میں سے گزرتے ہیں۔

۵۵ ــ دائرہ کے اندر ایک ذوا ربعۃ الاضلاع بنایا گیا ہے، اس کے مقابل کے اضلاع کی مساواتیں

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

اور $\text{اَ لا}^2 + ۲\,\text{ھَ لا ما} + \text{بَ ما}^2 + ۲\,\text{گَ لا} + ۲\,\text{فَ ما} + \text{جَ} = ۰$

ہیں۔ ثابت کرو کہ $\text{ھَ}(\text{ب} - \text{ا}) = \text{ھ}(\text{بَ} - \text{اَ})$

۵۶ ــ اگر دو مخروطیاں دو نقاط تماس رکھتی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ کسی اور نقطہ پر نہیں مل سکتیں۔

۵۷ ــ کسی ثابت سمت میں ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کے مماس کھینچے گئے ہیں، ان مماسوں کے نقاطِ تماس کا طریق معلوم کرو۔

۵۸ ــ اگر $\text{س} \equiv \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$

اور $\text{سَ} \equiv \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{گَ لا} + ۲\,\text{فَ ما} + \text{جَ} = ۰$

تو ثابت کرو کہ ک کی وہ قیمتیں جن کے لئے $\text{س} + \text{ک سَ} = ۰$ ایک نقطہ کو تعبیر کرتا ہے مساوات درجہ دوم

$$(\text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج}) + \text{ک}(۲\,\text{گ گَ} + ۲\,\text{ف فَ} - \text{ج} - \text{جَ}) + \text{ک}^2(\text{گَ}^2 + \text{فَ}^2 - \text{جَ}) = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

۵۹ ــ ایک مکافی محاور کو نقاط (ا، ۰)، (۰، ب) پر مس کرتا ہے، وہ شرط معلوم کرو کہ خطِ مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{ع}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ اس مکافی کو مس کرے۔

۶۰ - ا، ب، ج، د ایک مخروطی پر کے چار نقطے ہیں، ا ب
ج د کا نقطۂ تقاطع ع ہے، ج ا، ب د کا تقاطع ف ہے،
ج ب، ا د کا تقاطع گ ہے، مشق ۴۴ سے حاصل کرو کہ ع کا
قطبی بلحاظ اس مخروطی کے ف اور گ دونوں میں سے گزرتا ہے
اس سے مستنبط کرو کہ مثلث ع ف گ ایسا ہے کہ اس کا ہر ایک
ضلع مقابل کے راس کا قطبی ہے (یعنی مثلث مزدوج بالذات ہے)

۶۱ - ثابت کرو کہ اُن مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق جو دو قائم زائدوں
کے چار نقاطِ تقاطع میں سے گزرتی ہیں ایک دائرہ ہے -

۶۲ - ایک ناقص کے کوئی دو متوازی مماس ایک ایسے ثابت دائرہ
کو قطع کرتے ہیں جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہے، ثابت کرو کہ نقاط تقاطع کو ملانے سے
جو مستطیل بنتا ہے اس کے باقی دو اضلاع ایک ہم ماسکہ مخروطی کو مس
کرتے ہیں -

۶۳ - ایک نقطہ کے محدد مساواتوں $لا = ا\,جم^2 طہ$، $ما = ب\,جب^2 طہ$
کی شکل میں دئے ہوئے ہیں، ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک ایسے مکافی
کا حصہ ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے، اگر طہ معلوم ہو تو اس سے
جو نقطہ متعین ہوتا ہے اس پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو -

۶۴ - اگر خطِ مستقیم $لا\,جم طہ + ما\,جب طہ = ع$ دو ناقصوں

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad اور \quad \frac{لا^2}{ا^2 + لہ} + \frac{ما^2}{ب^2 + لہ} = ۱$$

کو قطع کرے
اور ان مخروطیوں کے لحاظ سے خطِ مذکورہ کے قطب ہ اور ہَ
ہوں تو ثابت کرو کہ $ہ\,ہَ = \frac{لہ}{ع}$

۶۵ - ثابت کرو کہ ہم ماسکوں $لا^2/(ا^2 + لہ) + ما^2/(ب^2 + لہ) = ۱$
کے لحاظ سے نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی مخروطی $\sqrt{لا\,لاَ} + \sqrt{-ما\,ماَ} + \sqrt{ا^2 - ب^2} = ۰$
کو مس کرتے ہیں -

باب نوزدہم

لفاف

۲۵۳ - **لفاف** - فرض کرو کہ کسی منحنی کی مساوات میں رقوم کے سر ایک ایسی مقدار مہ پر موقوف ہیں جو بدل سکتی ہے ، تب ظاہر ہے کہ اگر مہ کو کوئی خاص قیمت دی جائے تو اس سے ایک خاص منحنی حاصل ہوتا ہے اور مہ کی قیمت میں تغیر کرنے سے منحنیوں کا ایک نظام حاصل ہوتا ہے -

اس خیال کے ادراک کی غرض سے شاید چند مثالیں طالب علم کے لئے زیادہ مفید ثابت ہونگی -

خط مستقیم کی مساوات

(ا لا + ب ما + ج) + مہ (اَ لا + بَ ما + جَ) = ۰

مقدار مہ پر موقوف ہے - جب مہ بدلتا ہے تو ہمیں خطوطِ مستقیم کا ایک نظام یا قبیل حاصل ہوتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ سب خطوطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں -

(دیکھو حصہ اوّل ، دفعہ ۲۸)

نیز اگر ہم مساوات

ا = مہ لا + اُ/مہ

میں مہ کو مختلف قیمتیں دیں تو ہمیں خطوطِ مستقیم کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور اس سلسلہ کا ہر ایک خط مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کو مس کرتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۸)۔

ایک اور مثال یہ ہے کہ مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{مہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{مہ}} = ۱$$

ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہے۔

متبدل۔ مقدار مہ کو متبدل کہتے ہیں اور منحنیوں کے نظام کے متعلق یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ ایک متبدل پر موقوف ہے۔

۴۵۲— انتہائی تقاطع۔ اگر ہم مہ کو کوئی خاص قیمت مہ$_1$ دیں تو ہمیں ایک خاص منحنی حاصل ہوتا ہے جس کا ناپ اور مقام وغیرہ پورے طور پر متعین ہو جاتا ہے۔ اب اگر ہم مہ کو ایک اور قیمت ایسی دیں جو مہ$_1$ سے بقدر ایک نہایت چھوٹی مقدار د کے مختلف ہو یا بالفاظ دیگر مہ کی بجائے مہ$_1$ + د رکھیں جہاں د بہت چھوٹا ہے تو ہمیں ایک اور منحنی حاصل ہوگا جو پہلے منحنی سے ذرا سا ہٹا ہوا ہوگا۔ یہ دو منحنی ایک دوسرے کو چند نقطوں پر قطع کرتے ہیں اور اگر د کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے تو یہ نقطے منحنیات کے انتہائی تقاطع کہلاتے ہیں۔

مثلاً نظام $\text{ما} = \text{مہ}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{مہ}}$ میں

ایک خاص خطِ مستقیم

$$\text{ما} = \text{مہ}_1\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{مہ}_1}$$

ہے، اگر ہم مہ کو ایک اور قیمت مہ$_1$ + د دیں جو مہ$_1$ سے بقدر ایک نہایت چھوٹی مقدار کے مختلف ہو تو ہمیں پہلے خط کے نہایت قریب ایک اور خط حاصل ہوتا ہے جو $\text{ما} = (\text{مہ}_1 + \text{د})\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{مہ}_1 + \text{د}}$ ہے۔

اب یہ دونوں خط مکافی ما = ۴ ا لا کے مماس ہیں اور چونکہ ایک منحنی کے دو متصل مماس ایک دوسرے سے منحنی پر ملتے ہیں، اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ موجودہ صورت میں انتہائی تقاطع کے نقطے اس مکافی پر واقع ہوتے ہیں جس کو خطِ مستقیم مس کرتے ہیں۔ ہم ابھی دیکھینگے کہ یہ عام طور پر درست ہے۔

۲۵۵ – انتہائی تقاطع کا طریق۔

اگر ہم ایک نظام کے سب منحنی لیں اور ہر ایک منحنی کے نقاطِ تقاطع اُس منحنی کے ساتھ معلوم کریں جو اس کے نہایت قریب واقع ہوتا ہے تو ہمیں تقاطع کے لاانتہا نقطے حاصل ہونگے اور یہ سب کے سب ایک منحنی پر واقع ہونگے جس کو انتہائی تقاطع کا طریق کہتے ہیں۔

مثلاً شکل ۹۱ میں فرض کرو کہ منحنی خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ایک نظام کے پاس پاس کے پانچ منحنیوں کے حصے ہیں، نیز فرض کرو کہ ۱، ۲ سے نقطہ ن پر ملتا ہے اور ۲، ۳ سے ق پر اور ۳، ۴ سے ر پر اور ۴، ۵ سے س پر ملتا ہے، تب ن، ق، ر، س سب انتہائی تقاطع کے طریق پر واقع ہونگے جب کہ ان منحنیات کو ایک دوسرے کے لاانتہا قریب لایا جائے۔

۲۵۶ – ابتدائی منحنیات میں سے ہر ایک انتہائی تقاطع کے طریق کو مس کرسکتا ہے۔

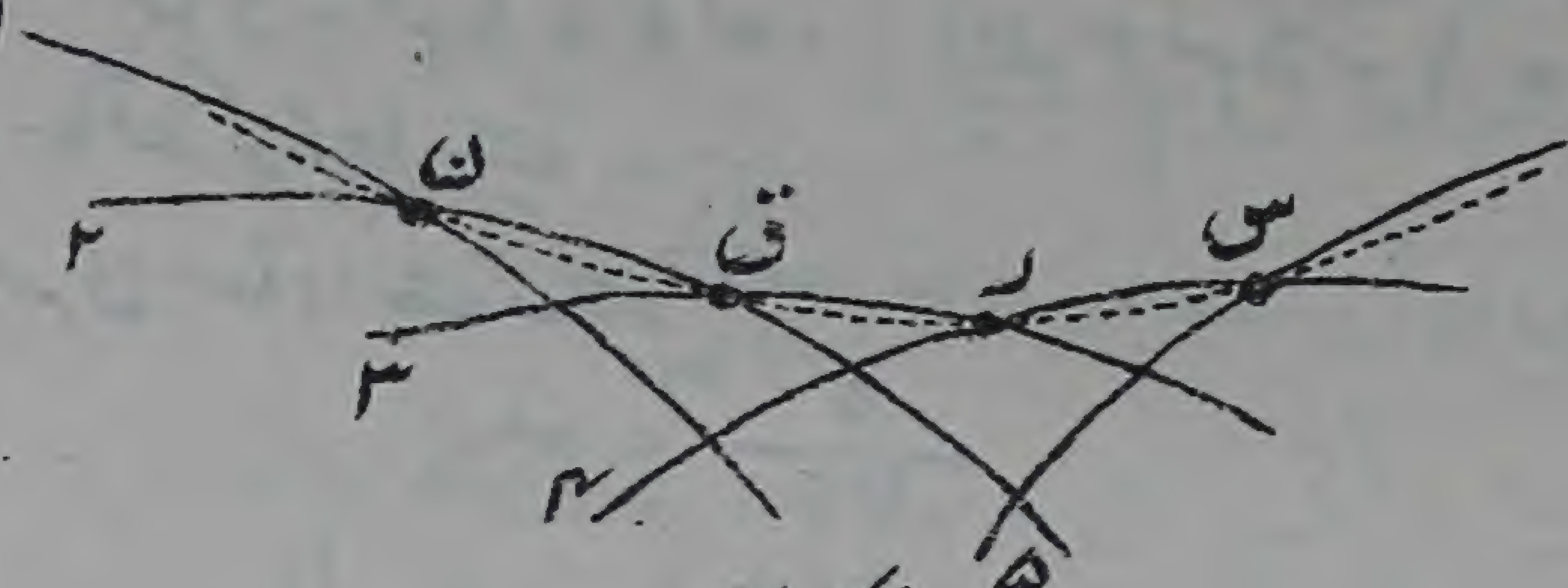
منحنی ۲ (شکل ۹۱) پر غور کرو۔ یہ انتہائی تقاطع کے طریق سے جس کو منقوط خط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے اُن نقطوں پر ملتا ہے جہاں

(۱)، یہ ۱ سے ملتا ہے یعنی ن پر

(۲)، یہ ۳ سے ملتا ہے یعنی ق پر

اب اگر یہ تین منحنی ۱، ۲، ۳ ایک دوسرے کے نہایت قریب آجائیں تو ن، ق کے نزدیک آجاتا ہے۔ پس انتہائی تقاطع

کے نقاط کا طریق منحنی ۲ سے دو منطبقہ نقاط پر ملتا ہے اور بناءً علیہ اس کو مس کرتا ہے



شکل ۹۱

اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ انتہائی تقاطع کے نقطوں کا طریق ابتدائی منحنیات میں سے ہر ایک کو مس کرتا ہے۔ اس بنا پر اس طریق کو نظام مذکور کا **لفاف** کہتے ہیں۔

مثال۔ ہم ابتدائی اصولوں سے خطوطِ مستقیم کے نظام

ما = مہ لا + ا/مہ یا مہ^۲ لا ـ مہ ما + ا = ۰

پر غور کرتے ہیں۔ مہ کو دو خاص قیمتیں مہ$_۱$، مہ$_۲$ دینے سے ہمیں دو خطوطِ مستقیم مہ$_۱^۲$ لا ـ مہ$_۱$ ما + ا = ۰ اور مہ$_۲^۲$ لا ـ مہ$_۲$ ما + ا = ۰ حاصل ہوتے ہیں۔ لہذا تفریق کرنے سے اُن کے نقطۂ تقاطع پر

(مہ$_۱^۲$ ـ مہ$_۲^۲$) لا ـ (مہ$_۱$ ـ مہ$_۲$) ما = ۰ یا (مہ$_۱$ + مہ$_۲$) لا ـ ما = ۰

پس اگر ہم فرض کریں کہ مہ$_۲$ بلحاظ قیمت مہ$_۱$ کے نہایت قریب آجاتا ہے تو آخر الذکر مساوات ہو جاتی ہے

۲ مہ$_۱$ لا ـ ما = ۰

جو انتہائی تقاطع کے نقطہ کے محددوں سے پوری ہوتی ہے۔

(یہ بات قابلِ غور ہے کہ مہ$_۱$ ـ مہ$_۲$ پر تقسیم کرنے سے ہم دائیں جانب کے رکن کو متطابقاً صفر ہونے سے بچا لیتے ہیں اور اس طرح مہ$_۲$ کو مہ$_۱$ کے مساوی رکھ سکتے ہیں)

لیکن مہ$_۱^۲$ لا ـ مہ$_۱$ ما + ا = ۰

پس انتہائی تقاطع کا طریق معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساواتوں

$$\text{مہ}^{2}\,\text{لا} - \text{مہ}\,\text{ما} + ۱ = ۰ \quad \text{اور} \quad ۲\,\text{مہ}\,\text{لا} - \text{ما} = ۰$$

سے مہ کو ساقط کرنا چاہیئے۔

دوسری مساوات سے

$$\text{مہ} = \frac{\text{ما}}{۲\,\text{لا}}$$

لہٰذا

$$\frac{\text{ما}^{2}}{۴\,\text{لا}^{2}}\,\text{لا} - \frac{\text{ما}}{۲\,\text{لا}}\,\text{ما} + ۱ = ۰$$

یعنی

$$\text{ما}^{2} - ۴\,\text{لا} = ۰$$

اور دفعات بالا کی بناء پر ہمیں اسی جواب کی توقع تھی۔

۲۵۷ ـ ایک منحنی کی مساوات یہ ہے

$$\text{مہ}^{2}\,\text{ن} + \text{مہ}\,\text{ق} + \text{ر} = ۰$$

جہاں ن، ق، اور ر متغیرات لا اور ما کے تفاعل ہیں اور مہ ایک متبدل ہے، اس منحنی کا لفافہ معلوم کرو۔

ہمیں انتہائی تقاطع کے نقطوں کا طریق معلوم کرنا چاہیئے۔ اس نظام کے دو منحنی

$$\text{مہ}_{۱}^{2}\,\text{ن} + \text{مہ}_{۱}\,\text{ق} + \text{ر} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{مہ}_{۲}^{2}\,\text{ن} + \text{مہ}_{۲}\,\text{ق} + \text{ر} = ۰ \qquad \ldots\ldots (۱)$$

ہیں۔ ان کے نقاط تقاطع کے محدد دونوں مساواتوں (۱) کو پورا کرتے ہیں۔ لہٰذا تفریق کرنے سے یہ $\text{ن}(\text{مہ}_{۱}^{2} - \text{مہ}_{۲}^{2}) + \text{ق}(\text{مہ}_{۱} - \text{مہ}_{۲}) = ۰$ کو یعنی $\text{ن}(\text{مہ}_{۱} + \text{مہ}_{۲}) + \text{ق} = ۰$ کو پورا کرتے ہیں۔

اب اگر ہم مہ۲ کو بلحاظ قیمت کے مہ۱ کے نہایت ہی قریب لے جائیں یعنی ان کے فرق کو نہایت ہی کم کردیں تو ان منحنیات کے نقاط تقاطع لفافہ پر کے نقطے بن جاتے ہیں، لہٰذا مہ۲ کو مہ۱ کے مساوی رکھنے سے بالآخر حاصل ہوتا ہے

$$۲\,\text{مہ}\,\text{ن} + \text{ق} = ۰$$

پس مطلوبہ طریق حاصل کرنے کے لئے ہمیں

$$۲\,\text{مہ}\,\text{ن} + \text{ق} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{مہ}^{۲}\,\text{ن} + \text{مہ}\,\text{ق} + \text{ل} = ۰$$

میں سے مہ کو ساقط کرنا چاہیئے۔

$$\text{مساوات اول سے}\quad \text{مہ} = -\frac{\text{ق}}{۲\,\text{ن}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ق}^{۲}}{۴\,\text{ن}^{۲}}\,\text{ن} - \frac{\text{ق}}{۲\,\text{ن}} \times \text{ق} + \text{ل} = ۰$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ق}^{۲} = ۴\,\text{ن}\,\text{ل} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس طرح لفافہ کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں ذیل کا کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

کلیہ۔ متبدل کے لحاظ سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے اس کی اصلوں کے باہم مساوی ہونے کی شرط لکھو، یہ شرط لفافہ کی مساوات ہوگی۔

۲۵۸۔ دفعہ ماقبل کے نتیجہ کو تعبیر کرنے کا ایک اور نہایت دلچسپ طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے۔

نظام زیر بحث کے اُن منحنیات پر غور کرو جو ایک نقطۂ معلومہ میں سے گزرتے ہیں، ایسے منحنی صرف دو ہیں کیونکہ ن، ق، ل میں محدد لا، ما درج کرنے سے مساوات

$$\text{مہ}^{۲}\,\text{ن} + \text{مہ}\,\text{ق} + \text{ل} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے اور چونکہ یہ مہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے نقطہ (لا، ما) میں سے گذرنے والے صرف دو منحنی ہیں۔

اب اگر (لا، ما) میں سے گذرنے والے دو منحنی ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو نقطہ (لا، ما) لفافہ پر واقع ہوگا اور منحنیوں کے ایک دوسرے پر منطبق ہونے کی شرط یہ ہے کہ مہ کی مساوات درجۂ دوم

میں ، مہ کی دو قیمتیں مساوی ہوں یعنی

$$\text{ق}^2 = 4\,\text{ن}\,\text{ل}$$

اور یہی شرط دفعہ ۲۵۷ میں معلوم کی گئی ہے۔

مثال — ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک نقطۂ معلومہ کے قطبیوں کا لفاف معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ہم ماسکہ نظام کی ایک مخروطی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}} = 1$$

ہے ، نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ کا قطبی بلحاظ اس کے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2+\text{لہ}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2+\text{لہ}} = 1$$

ہے۔

اب لفاف معلوم کرنے کے لئے ہمیں لہ کو متبدل تصور کرنا چاہئے۔
قطبی کی مساوات بالا ہے

$$(\text{ا}^2+\text{لہ})(\text{ب}^2+\text{لہ}) - (\text{ب}^2+\text{لہ})\,\text{لا}\,\text{لا}_1 - (\text{ا}^2+\text{لہ})\,\text{ما}\,\text{ما}_1 = 0$$

یا

$$\text{لہ}^2 + \text{لہ}\,(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{لا}\,\text{لا}_1 - \text{ما}\,\text{ما}_1) + \text{ا}^2\text{ب}^2 - \text{ب}^2\,\text{لا}\,\text{لا}_1 - \text{ا}^2\,\text{ما}\,\text{ما}_1 = 0$$

پس کلیۂ مذکورہ کی رو سے مطلوبہ لفاف ہے

$$(\text{ا}^2+\text{ب}^2-\text{لا}\,\text{لا}_1-\text{ما}\,\text{ما}_1)^2 = 4\,(\text{ا}^2\text{ب}^2-\text{ب}^2\,\text{لا}\,\text{لا}_1-\text{ا}^2\,\text{ما}\,\text{ما}_1)$$

چونکہ درجہ دوم کی رقمیں $(\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1)^2$ ہیں ، اس لئے مساوات مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔ پس مطلوبہ لفاف مکافی ہے۔

مشقیں

۱۔ کسی نقطہ میں سے نظام $\text{م}^2\,\text{لا} - \text{م}\,\text{ما} + \text{ا} = 0$ کے دو خط گذرتے ہیں اور وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اگر نقطۂ مذکورہ مکافی

ما² = ۴ ا لا پر واقع ہو جو لفافت ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

مہ (ا لا + ب ما) + ۱/مہ (ب لا - ا ما) + ۱ = ۰

میں مہ کو مختلف قیمتیں دینے سے خطوطِ مستقیم کا جو قبیل حاصل ہوتا ہے اس کا لفافت قائم ہذلولی ہے، اس کے محوروں کے طول اور مقام معلوم کرو۔

۳۔ ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محوروں پر اس کے مقطوعوں کا حاصل ضرب مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا لفافت ایک قطع زائد ہے جس کے متقارب ابتدائی محور ہیں۔

(ایک مقطوعہ کو متبدل مانو اور دوسرے مقطوعہ کو شرطِ مذکورۂ بالا کے ذریعہ مقطوعہ کی رقوم میں بیان کرو۔)

۴۔ مکانی پر ایک نقطہ ن ہے اور ن ص اس کا معین ہے۔ متوازی الاضلاع ن ص ع ق کے قطر ص ق کا لفافت معلوم کرو۔

۲۵۹۔ بعض اوقات ایسے منحنی کے لفافت معلوم کرنے کی ضرورت پڑتی ہے جس کی مساوات میں دو متبدل شامل ہوں اور یہ متبدل ایک مساوات کے ذریعہ باہم مربوط ہوں۔ سادہ صورتوں میں متبدلوں کی معلوم مساوات کے ذریعہ ہم منحنی کی مساوات سے ایک متبدل کو ساقط کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات اور طریقوں سے کام لیا جاتا ہے ملاحظہ ہو ذیل کی مثال ۳۔

مثال۔ (۱) دائرہ (لا - ج)² + ما² = د² کا لفافت معلوم کرو جبکہ

ج² + د² = ک²

د کو ساقط کرنے سے

(لا - ج)² + ما² = ک² - ج² یا ۲ ج² - ۲ ج لا + ما² - ک² = ۰

ج میں جو یہ مساوات درجہ دوم ہے اس کی اصلوں کو مساوی بنانے سے

لفاف حاصل ہوتا ہے۔
پس لفاف ہے

لا^{2} = ۲ (ما^{2} - ک^{2}) یا لا^{2} - ۲ ما^{2} + ۲ ک^{2} = ۰

جو صریحاً قطع زائد ہے۔

(۲) محددوں کے محوروں پر ایک متحرک خط مستقیم کے مقطوعوں کا حاصل جمع مستقل رہتا ہے، خط مستقیم کا لفاف معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ج اور د مقطوعے ہیں اور ک ان کا مستقل مجموعہ ہے، تب

ج + د = ک

اور خط کی مساوات ہے لا/ج + ما/د = ۱

ان میں سے ج کو ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا/(ک - د) + ما/د = ۱

یا د (ک - د) - د لا - (ک - د) ما = ۰

یا د^{2} - (ک - لا + ما) د + ک ما = ۰

مطلوبہ لفاف متبدل د کی دو قیمتوں کو مساوی کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے یہ ہے

(ک - لا + ما)^{2} = ۴ ک ما یا لا^{2} - ۲ لا ما + ما^{2} - ۲ ک لا - ۲ ک ما + ک^{2} = ۰

جو قطع مکافی ہے کیونکہ درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل ہیں۔
(اس ثبوت کا دفعہ ۲۶۱ کے ثبوت کے ساتھ مقابلہ کرو)

(۳) منحنی ن جم طہ + ق جب طہ = ر کا لفاف

ن^{2} + ق^{2} = ر^{2}

ہے جہاں ن، ق، ر محددوں کے تفاعل ہیں اور طہ متبدل ہے۔

فرض کرو کہ ت = مس $\frac{\text{طہ}}{2}$ ، تب

$$\text{جم طہ} = \frac{1 - \text{ت}^2}{1 + \text{ت}^2} \text{ ، جب طہ} = \frac{2\text{ت}}{1 + \text{ت}^2}$$

$$\therefore \text{ن} \frac{1 - \text{ت}^2}{1 + \text{ت}^2} + \text{ق} \frac{2\text{ت}}{1 + \text{ت}^2} = \text{ل}$$

$$\text{یا ن} (1 - \text{ت}^2) + 2\text{ت} \times \text{ق} = \text{ل} (1 + \text{ت}^2)$$

$$\text{یعنی ت}^2 (\text{ن} + \text{ل}) - 2 \text{ت ق} + (\text{ل} - \text{ن}) = 0$$

لفاف کی مساوات یہ شرط معلوم کرنے سے حاصل ہوگی کہ اس مساوات میں ت کی قیمتیں مساوی ہیں۔

$$\text{پس لفاف ہے ق}^2 = (\text{ن} + \text{ل}) (\text{ل} - \text{ن})$$

$$\text{یا ن}^2 + \text{ق}^2 = \text{ل}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

یہ جواب یاد رکھنے کے قابل ہے، اگرچہ طالب علم کو چاہئے کہ ہر صورت میں بالعموم پورا عمل کرے جو اوپر دیا گیا ہے۔

مشقیں

۵ - لفافوں کا طریقہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ خطِ مستقیم $\text{لا جم طہ}/\text{ا} + \text{ما جب طہ}/\text{ب} = 1$ منحنی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو مس کرتا ہے جہاں طہ متبدل ہے۔

۶ - ثابت کرو کہ خطِ مستقیم $\text{ا لا جم طہ} + \text{ب ما جب طہ} = \text{ج}$ کا لفاف $\text{ا}^2 \text{لا}^2 + \text{ب}^2 \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ ہے

۷ - ایک متحرک خطِ مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے عمود کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا پایہ ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہوتا ہے، خطِ مستقیم کا لفاف معلوم کرو۔

[نقطہ مفروضہ کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ ثابت خط مستقیم ہے لا + ا = ۰ ، اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو ل لا + ھم ما + ا = ۰ اور لا + ا = ۰ کے نقطۂ تقاطع کو مبدأ سے ملائے - پھر اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ خط ، ل لا + ھم ما + ا = ۰ پر عمود ہو - جواب قطع مکافی ہوگا ، دیکھو دفعہ ۱۴۵]

(۸) و لا ، و ما دو ثابت خطوطِ مستقیم ہیں اور ایک متحرک خط اب جو اِن خطوں کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے اس طرح حرکت کرتا ہے کہ لہ × و ا + مہ × و ب مستقل ہے - ثابت کرو کہ خط مذکور کا لفاف مکافی ہے -

۲۶۰ - عام لفاف - یہ بات قابل غور ہے کہ دفعات ۲۵۳ - ۲۵۹ میں لفافوں پر جو بحث کی گئی ہے وہ ہر قسم کے منحنیوں پر حاوی ہے اور محض دوسرے درجے کے منحنیوں تک محدود نہیں -

نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر منحنی کی مساوات میں متبدل مہ کی قوت ۲ سے زیادہ ہو تو (کم از کم نظری طور پر) لفاف کی مساوات یہ شرط معلوم کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے کہ اس مساوات میں مہ کی دو اصلیں مساوی ہیں -

مثال - مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے عمادوں کا لفاف معلوم کرو - عماد کی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ما} = \text{ھم لا} - ۲\,\text{ا ھم} - \text{ا ھم}^3 \quad \text{یا} \quad \text{ا ھم}^3 + \text{ھم}(۲\,\text{ا} - \text{لا}) + \text{ما} = ۰$$

مساواتوں کے مسائل کی رو سے اگر ھم$_1$ ، ھم$_2$ ، ھم$_3$ اس مساوات کی اصلیں ہوں تو ھم$_1$ + ھم$_2$ + ھم$_3$ = ۰

$$\text{ھم}_1\text{ھم}_2 + \text{ھم}_1\text{ھم}_3 + \text{ھم}_2\text{ھم}_3 = (۲\,\text{ا} - \text{لا}) / \text{ا}$$

$$\text{ھم}_1\text{ھم}_2\text{ھم}_3 = -\text{ما} / \text{ا}$$

لفاف کے لئے م کی دو قیمتیں مساوی ہونی چاہئیں، فرض کرو کہ

$م_1 = م_2$

تب $۲م_1 + م_3 = ۰$ .... (۱)

$م_1^2 + ۲م_1م_3 = (۲ا - لا)/ا$ ...... (۲)

$م_1^2 م_3 = - ما/ا$ .... (۳)

مساوات (۱) کے ذریعہ $م_3$ کو ساقط کرنے سے

$م_1^2 - ۴م_1^2 = (۲ا - لا)/ا$ یا $م_1^2 = (لا - ۲ا)/۳ا$

$-۲م_1^3 = -ما/ا$ یا $م_1^3 = ما/۲ا$

$م_1$ کو ساقط کرنے سے ہمیں لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$\left(\frac{لا - ۲ا}{۳ا}\right)^3 = م_1^6 = \left(\frac{ما}{۲ا}\right)^2$ یا $۴(لا - ۲ا)^3 = ۲۷ ا ما^2$

نوٹ۔ کسی منحنی کے عمادوں کے نظام کے لفاف کو منحنی کا پیچیدہ کہتے ہیں۔

مشق

۹۔ خطِ مستقیم $مہ^3 لا - مہ^2 ما + ج = ۰$ کا لفاف معلوم کرو جہاں مہ متبدل ہے۔

۲۶۱۔ اگر خطِ مستقیم $ل لا + م ما + ۱ = ۰$ میں سر ل اور م اس ربط

$ال^2 + ۲ھ ل م + ب م^2 + ۲گ ل + ۲ف م + ج = ۰$

کے ذریعہ باہم منسلک ہوں تو خطِ مذکور کا لفاف ایک مخروطی ہوگی۔

پہلے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ اس نظام کے کتنے خط نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔

پس لازماً ل لا$_1$ + م ما$_1$ + ۱ = ۰

اور ا ل^2 + ۲ ھ ل م + ب م^2 + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰

اب اگر ہم دوسری مساوات کو پہلی مساوات کی مدد سے متجانس بنائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ل^2 + ۲ ھ ل م + ب م^2 - ۲ (گ ل + ف م) (ل لا$_1$ + م ما$_1$) + ج (ل لا$_1$ + م ما$_1$)^2 = ۰

(دیکھو حصۂ اول دفعہ ۳۸)

یہ مساوات نسبت ل : م میں درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس کی دو اصلیں ہیں۔

اب اگر نسبت ل : م کی قیمت معلوم ہو تو خط کی سمت متعین ہو جاتی ہے پس (لا$_1$، ما$_1$) میں سے گزرنے والے خط کی دو سمتیں نسبت ل : م کی دو قیمتوں سے حاصل ہوتی ہیں، لہٰذا بالعموم (لا$_1$، ما$_1$) میں سے دو خط گزرتے ہیں۔

لفاف معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس امر کے لئے شرط معلوم کرنی چاہئے کہ یہ دو خط ایک دوسرے پر منطبق ہوں یعنی ل : م کے لئے درجہ دوم کی جو مساوات اوپر درج کی گئی ہے اس کی اصلیں مساوی ہوں۔

اب درجہ دوم کی یہ مساوات یوں بھی لکھی جا سکتی ہے

ل^2 (ا - ۲ گ لا$_1$ + ج لا$_1^2$) + ۲ ل م (ھ - گ ما$_1$ - ف لا$_1$ + ج لا$_1$ ما$_1$)

+ م^2 (ب - ۲ ف ما$_1$ + ج ما$_1^2$) = ۰

لہٰذا اصلوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے

(ا - ۲ گ لا$_1$ + ج لا$_1^2$) (ب - ۲ ف ما$_1$ + ج ما$_1^2$) = (ھ - گ ما$_1$ - ف لا$_1$ + ج لا$_1$ ما$_1$)^2

یا (اب - ھ^2) + ۲ لا$_1$ (ھ ف - ب گ) + ۲ ما$_1$ (گ ھ - ا ف) + لا$_1^2$ (ب ج - ف^2)

+ ما$_1^2$ (ج ا - گ^2) + ۲ لا$_1$ ما$_1$ (ف گ - ج ھ) = ۰

لا اور ما میں دوسرے درجہ سے بڑے درجہ کی رقمیں کٹ جاتی ہیں۔
پس لفاف ایک مخروطی ہے جس کی مساوات یہ ہے

(ب ج - ف^۲) لا^۲ + ۲ لا ما (ف گ - ج ھ) + ما^۲ (ج ا - گ^۲)

+ ۲ لا (ھ ف - ب گ) + ۲ ما (گ ھ - ا ف) + (ا ب - ھ^۲) = ۰

مثال ۱۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوطِ مستقیم پر اس کے مقطوعوں کا حاصل جمع مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط ہمیشہ ایک مکافی کو مس کرتا ہے۔

مفروضہ خطوطِ مستقیم کو محددوں کے محور مانو اور خطِ مستقیم کی مساوات

ل لا + م ما - ۱ = ۰ فرض کرو

تب محوروں پر کے مقطوعے $\frac{۱}{ل}$ اور $\frac{۱}{م}$ ہیں

اب $\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{م}$ = مستقل = عہ (فرض کرو)

یعنی عہ ل م - ل - م = ۰

پس ل اور م میں یہ درجہ دوم کا ربط ہے اور حسب سابق یہ خط ایک مخروطی کو مس کرتا ہے۔ نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے دو خطوطِ مستقیم کی سمتیں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

عہ ل م - (ل + م) (ل لا + م ما) = ۰ یا ل^۲ لا + ل م (لا + ما - عہ) + م^۲ ما = ۰

شرط انطباق یہ ہے

(لا + ما - عہ)^۲ = ۴ لا ما یا لا^۲ - ۲ لا ما + ما^۲ - ۲ عہ لا - ۲ عہ ما + عہ^۲ = ۰

یہ مساوات صریحاً مکافی کو تعبیر کرتی ہے اور اسکی شکل ذیل کی صورت میں بھی تحویل ہو سکتی ہے

√لا + √ما + √عہ = ۰

پس مکافی مذکور محددوں کے محوروں کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُن عمودوں کا حاصل ضرب جو دو ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے جائیں مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ یہ ایک مخروطی کو مس کرتا ہے۔

مفروضہ نقطوں کے خطِ وصل کو لا کا محور مانو اور فرض کہ نقاطِ معلوم ا، ب بالترتیب (ج، ۰) اور (- ج، ۰) ہیں، محور قائم ہیں۔

خط ل لا + م ما + ۱ = ۰ پر کے عمود ہیں

$$\frac{\text{ل ج} + ۱}{\sqrt{\text{ل}^۲ + \text{م}^۲}} \quad \text{اور} \quad \frac{- \text{ل ج} + ۱}{\sqrt{\text{ل}^۲ + \text{م}^۲}}$$

$$\text{پس} \quad \frac{۱ - \text{ل}^۲ \text{ج}^۲}{\text{ل}^۲ + \text{م}^۲} = \text{مستقل} = \text{ب}^۲ \quad (\text{فرض کرو})$$

$$\therefore \text{ب}^۲ (\text{ل}^۲ + \text{م}^۲) + \text{ل}^۲ \text{ج}^۲ = ۱$$

چونکہ یہ ل اور م میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے لفافہ ایک مخروطی ہے۔

اس لفافہ کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساوات درجہ دوم

$$\text{ب}^۲ (\text{ل}^۲ + \text{م}^۲) + \text{ج}^۲ \text{ل}^۲ - (\text{ل لا} + \text{م ما})^۲ = ۰$$

میں $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی قیمتوں کو مساوی بنانا چاہیے۔

مساوات بالا کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\text{ل}^۲ (\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{لا}^۲) - ۲ \, \text{ل م لا ما} + \text{م}^۲ (\text{ب}^۲ - \text{ما}^۲) = ۰$$

اور لفافہ کی مساوات ہے

$$(\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{لا}^۲)(\text{ب}^۲ - \text{ما}^۲) = \text{لا}^۲ \text{ما}^۲ \quad \text{یا} \quad \text{لا}^۲ \text{ب}^۲ + \text{ما}^۲ (\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲) = \text{ب}^۲ (\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲)$$

یعنی $\frac{لا^{۲}}{ب^{۲}+ج^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$

پس لفاف ایک ناقص ہے جس کے محوروں کے طول $۲\sqrt{ب^{۲}+ج^{۲}}$
اور ۲ب ہیں اور جس کے ما سکے نقاطِ مذکورہ ہیں۔

مشقیں

۱۰۔ اگر عمودوں کا حاصل ضرب ($-$ب^{۲}) ہو تو اسی طرح ثابت کرو کہ لفاف قطع زائد ہے جس کے ماسکے نقاطِ مذکورہ ہیں۔

باب نوزدہم پر متفرق مثالیں

۱۱۔ ایک خطِ مستقیم دو ثابت خطوطِ مستقیم کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ کا ایک مثلث بناتا ہے، ثابت کرو کہ اول الذکر خط کا لفاف ایک زائد ہے جس کے متقارب مذکورہ بالا خطوطِ مستقیم ہیں۔

۱۲۔ ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو محوروں پر اس کے مقطوعوں کا فرق مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ متحرک خط کا لفاف قطع مکافی ہے۔

۱۳۔ ایک دائرہ لا کے محور پر لڑکتا ہے، اس کا لفاف معلوم کرو۔

۱۴۔ ج ن اور ج ق ایک ناقص کے مزدوج قطر ہیں، اُس خط کا لفاف معلوم کرو جو ن اور ق کے معینوں کے وسطی نقاط کو وصل کرتا ہے۔

۱۵۔ خطِ مستقیم $ما = م\,لا + ا\,م\sqrt{۱ + م^{۲}} + ج - م\,ب$ کا لفاف معلوم کرو جہاں م متغیر ہے۔

۱۶۔ ایک مکافی محدودوں کے محوروں کو مس کرتا ہے اور وتر تماس کی مساوات ا لا + ب ما = ۱ ہے، لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ

خطِ مستقیم ا لا لہ + ب ما = لہ / (لہ + ۱) ہمیشہ منحنی کو مس کرتا ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ وہ سب خطوط جو عہ کو مختلف قیمتیں دینے سے مساوات (لا جم عہ + ما جب عہ)^{2} = ا جم^{2} عہ + ب جب^{2} عہ سے حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۱۸۔ مشق ماقبل کی مدد سے ایک ثابت مخروطی کے دو علی القوائم مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۱۹۔ اگر ایک ناقص کے دو مماس ایک ہم مرکز دائرہ کے محیط پر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ثابت کرو کہ اُن کا وترِ تماس ایک اور ناقص کو مس کرتا ہے۔

۲۰۔ ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُن عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ جو دو ثابت نقطوں سے اس پر نکالے جائیں مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ خطِ مستقیم کا لفاف قطع ناقص ہے۔

۲۱۔ کئی نقطوں سے ایک متحرک خطِ مستقیم پر عمود نکالے گئے ہیں، اگر ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ اس خط کا لفاف قطع ناقص ہے۔

۲۲۔ ایک ناقص کے دو نقاط ن اور ق پر کے مماس علی القوائم ہیں، ثابت کرو کہ ن ق ایک ثابت ہم مرکز ناقص کو مس کرتا ہے۔

۲۳۔ ایک ناقص کا وتر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا وسطی نقطہ ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس وتر کا لفاف قطع مکافی ہے۔

۲۴۔ اگر کتاب کا ایک ورق اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک کونہ مقابل کے کسی ایک ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ شکن کے خط کا لفاف قطع مکافی ہے۔

بابِ بستم

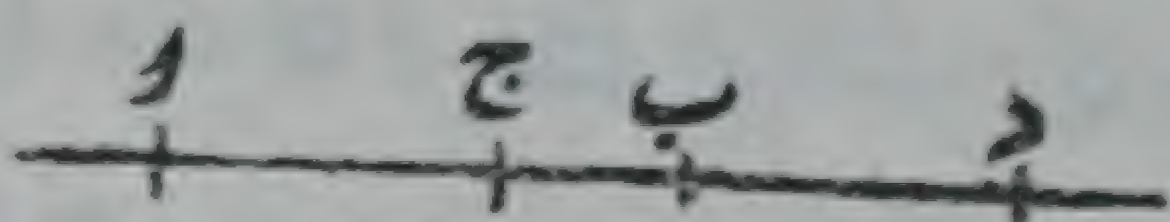
موسیقی تقسیم

۲۶۲ ـ **موسیقی صف** ـ تعریف ـ ایسے نقطوں کی کسی تعداد کو جو ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں نقطوں کی **صف** کہتے ہیں۔

چار نقطے ا، ب، ج، د موسیقی **صف** میں ہوں گے اگر ان میں سے دو نقطے باقی دو نقاط کے درمیانی فاصلہ کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کریں

یعنی $\frac{\text{اج}}{\text{جب}} = \frac{\text{اد}}{\text{بد}}$ .... (۱)

مثلاً فرض کرو کہ ج اور د خط اب کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں



شکل ۹۲

تب ا، ب، ج، د ایک موسیقی صف بناتے ہیں اور نقاط ج، د کا زوج نقاط ا، ب کے زوج کا **موسیقی مزدوج** کہلاتا ہے۔

۲۶۳ ـ اگر نقاط ج اور د نقاط ا اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں تو ا اور ب نقاط ج اور د کے موسیقی مزدوج ہوں گے۔

کیونکہ حسب مفروض $\frac{\text{اج}}{\text{جب}} = + \frac{\text{اد}}{\text{بد}}$

جہاں فاصلوں کی علامتوں کو ملحوظ رکھا گیا ہے، اس سے

$$\frac{\text{اج}}{\text{اد}} = + \frac{\text{جب}}{\text{بد}}$$

یعنی ا اور ب خط ج د کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح۔ نقاط ا، ب، ج، د کا باہمی ربط یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\text{اج} \times \text{بد}}{\text{اد} \times \text{بج}} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

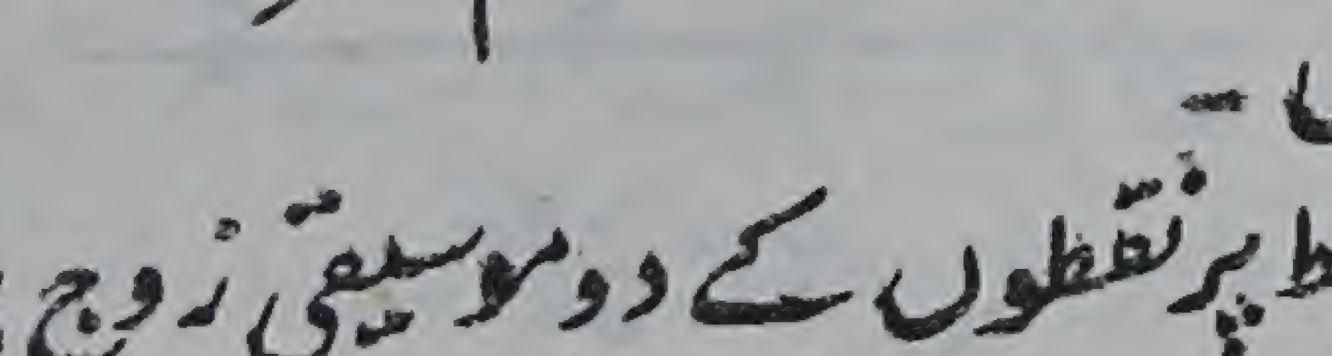
کیونکہ $\frac{\text{اج} \times \text{بد}}{\text{اد} \times \text{جب}} = 1$ اور $\text{بج} = -\,\text{جب}$

یہ نتیجہ یاد رکھنا چاہئے۔ شمار کنندہ میں نقطوں کی ترتیب وہی ہے جس میں کہ یہ خط پر واقع ہوتے ہیں اور نسب نما میں پہلا نقطہ تو وہی ہے لیکن باقی نقطوں کی ترتیب الٹ دی گئی ہے۔ مثلاً

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} & \text{د} \\ \text{ا} & \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \end{matrix} \right\}$$

اوپر کے تمکافی ربط کے لحاظ سے ہم اکثر اوقات یوں کہینگے کہ نقطوں کے دو زوج موسیقی ہیں۔

۴۲۶۔ ایک خط پر نقطوں کے دو موسیقی زوج ہیں، اگر ان کے فاصلے اس خط پر کے کسی نقطہ سے ناپے جائیں تو ان فاصلوں کا باہمی ربط دریافت کرو۔



شکل ۹۳

فرض کرو کہ و وہ نقطہ جس سے سب فاصلے ناپے گئے ہیں و ہے اور وا، وب، وج، ود کے طول بالترتیب لا۱، لا۲، لا۳، لا۴ ہیں۔ (یہ کہنے کی ضرورت نہیں کہ جو فاصلے ایک سمت میں ناپے جائیں گے وہ مثبت ہوں گے اور جو مقابل سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی ہوں گے)

$$\text{تب}\quad \frac{\text{اج}}{\text{جب}} = \frac{\text{اد}}{\text{بد}}$$

اب اج = $\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۱}$ ، جب = $\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۳}$ وغیرہ

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے $\dfrac{\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۱}}{\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۳}} = + \dfrac{\text{لا}_{۴} - \text{لا}_{۱}}{\text{لا}_{۴} - \text{لا}_{۲}}$ کیونکہ بالعموم کوئی فاصلہ مثلاً اد، د کے لا۴ کو ا کے لا۱ سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے وغیرہ وغیرہ۔

پس مساوات بالا سے $(\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۱})(\text{لا}_{۴} - \text{لا}_{۲}) - (\text{لا}_{۴} - \text{لا}_{۱})(\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۳}) = ۰$

یا ضرب دیجانے اور رقوم کو اکھٹا کرنے سے

$$۲(\text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲} + \text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴}) - \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۴} - \text{لا}_{۲}\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۲}\text{لا}_{۴} = ۰$$

$$\therefore ۲(\text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲} + \text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴}) = (\text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۲})(\text{لا}_{۳} + \text{لا}_{۴}) \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

نتیجہ صریح — برعکس اس کے جب یہ ربط پورا ہو تو

$$\frac{\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۱}}{\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۳}} = - \frac{\text{لا}_{۴} - \text{لا}_{۱}}{\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۴}}$$

اور نقطوں کے زوج ا، ب اور ج، د موسیقی ہوں گے۔

پس اگر نقطہ و کے ایک مقام کے لئے ربط (۳) پورا ہو تو چار نقطے موسیقی ہوں گے اور نقطہ و کے ہر مقام کے لئے یہ ربط درست ہو گا۔

۲۶۵ - خاص صورتیں - نقطہ و کو خاص مقامات پر فرض کرنے سے ہم دفعۂ ماقبل کے نتیجہ سے دو نہایت ضروری ربط حاصل کر سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ نقطہ و، ا پر منطبق ہوتا ہے،
تب $\text{لا}_1 = 0$ اور ربط ہو جاتا ہے

$$2\,\text{لا}_3\,\text{لا}_4 = \text{لا}_2\left(\text{لا}_3 + \text{لا}_4\right) \quad \text{یا} \quad \frac{2}{\text{لا}_2} = \frac{1}{\text{لا}_3} + \frac{1}{\text{لا}_4}$$

پس اب اوسطِ موسیقی ہے اج، اد کا۔ اس سے موسیقی اوسطوں اور موسیقی صفوں کا تعلق ظاہر ہوتا ہے۔
پس اج، اب، اد موسیقی ترتیب میں ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ نقطہ و، اب کا وسطی نقطہ ہے، تب $\text{لا}_1 = -\text{لا}_2$ یعنی $\text{لا}_1 + \text{لا}_2 = 0$ اور مساوات (۳) کی بائیں جانب صفر ہو جاتی ہے

$$\text{پس}\quad \text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{لا}_3\,\text{لا}_4 = 0 \quad \text{یا} \quad \text{لا}_3\,\text{لا}_4 = \text{لا}_1^2$$

لہذا اگر ج اور د، ا اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں اور و وسطی نقطہ ہو اب کا تو

$$\text{وج} \times \text{ود} = \text{وا}^2 = \text{وب}^2$$

صریحاً ج اور د، و کے ایک ہی جانب واقع ہیں ورنہ وج × ود کو منفی ہونا چاہئے۔ اس سے ا اور ب کے لحاظ سے ج کے موسیقی مزدوج نقطہ کو معلوم کرنے کا نہایت آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال - ایک خط پر کے چار نقطوں کے فاصلے اس پر کے ایک ثابت نقطہ سے بالترتیب ۵، $\frac{1}{4}$ ۷، ۸، $\frac{1}{2}$ ۹ اکائیاں ہیں، معلوم کرو کہ ان میں سے کوئی زوج دوسرے زوج کا موسیقی مزدوج ہے یا نہیں۔

ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ ان میں سے کسی نقطہ سے باقی نقطوں کے فاصلوں کو اس طرح ترتیب دیا جا سکتا ہے کہ یہ فاصلے سلسلۂ

موسیقی میں ہوں (مقابلہ کرو (۱) سے)
پہلے نقطہ سے دوسرے، تیسرے، چوتھے نقطوں کے فاصلے بالترتیب $\frac{1}{3}$ ۲، ۳، $\frac{1}{2}$ ۴ ہیں، اگر ان کو سلسلۂ موسیقی میں ترتیب دینا ممکن ہو تو ظاہر ہے کہ ان کے متکافیوں یعنی $\frac{3}{7}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{9}$ کو سلسلۂ حسابیہ میں ترتیب دینا ممکن ہوگا، لیکن مؤخر الذکر اپنی موجودہ ترتیب میں ہی سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، لہٰذا پہلے اور تیسرے نقطہ کا زوج دوسرے اور چوتھے نقطہ کے زوج کا موسیقی مزدوج ہے اور برعکس اس کے [دیکھو (۱)]

۲۶۶ - موسیقی صف کی خاص صورتیں - لاتناہی پر کا نقطہ۔ اگر نقاط ا، ب اور ج، د دو موسیقی زوج ہوں اور ج، اب کا وسطی نقطہ ہو تو د لاتناہی پر ہوگا۔

کیونکہ اج = ج ب اس لئے لازماً اد مساوی ہوگا د ب کے اور یہ صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ دونوں مقداریں لاتناہی ہوں کیونکہ ان مقادیر کا فرق محدود ہے۔

پس اب کے وسطی نقطہ کا موسیقی مزدوج اس خط پر لاانتہا فاصلہ پر واقع ہوتا ہے (دیکھو دفعات ۱۹۹، ۲۰۰)

یہ امر اس طرح غور کرنے سے بھی واضح ہو جاتا ہے۔ اگر و، اب کا وسطی نقطہ ہو تو وج × ود = وا^2 (دفعہ ۲۶۵) کیونکہ ج، و کے جتنا قریب آتا جاتا ہے د اتنا ہی اس سے پرے ہٹتا ہے اور بالآخر جب ج، و پر منطبق ہو جاتا ہے تو د لاتناہی پر چلا جاتا ہے۔

الفاظ میں اس اہم نتیجہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں۔

ایک خط پر کے کوئی دو نقطے، ان کا درمیانی نقطہ اور اس خط کا لاتناہی پر کا نقطہ چاروں ملکر ایک موسیقی صف بناتے ہیں۔

مشقیں

۱ - ثابت کرو کہ دفعہ ۲۶۵، صورت اول میں د ج اوسط موسیقی ہے

د ب اور د ا کا۔

۲۔ ایک خط پر کے چار نقطوں کے فاصلے اس پر کے ایک ثابت نقطہ سے بالترتیب ۳، ۴، ۵، $۳\frac{۲}{۳}$ انچ ہیں، یہ معلوم کرو کہ ان میں سے کوئی دو باقی دو کے موسیقی مزدوج ہیں یا نہیں۔

۳۔ ایک خط پر کے نقطہ و سے جو مبدا ہے چار نقاط ا، ب، ج، د کے فاصلے $\text{لا}_۱$، $\text{لا}_۲$، $\text{لا}_۳$، $\text{لا}_۴$ ہیں، ثابت کرو کہ اگر ربط

$$۲\left(\text{لا}_۱\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳\text{لا}_۴\right) = \left(\text{لا}_۱ + \text{لا}_۲\right)\left(\text{لا}_۳ + \text{لا}_۴\right)$$

مبدأ و کے لئے پورا ہو تو یہی ربط و کے ہر مقام کے لئے پورا ہوگا۔

۴۔ اگر ج اور د بلحاظ ا اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں اور و ا = ۲، و ب = ۴ تو ج کے جو مقامات ذیل میں دئے گئے ہیں اُن کے لحاظ سے د کے مقامات کی نشان دہی کرو

و ج = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، −۱، −۲، −۳، −۴، −۵، −۶

۵۔ اگر ا ب کا وسطی نقطہ و ہو اور $\text{وج} \times \text{ود} = \frac{۱}{۴}\,\text{اب}^۲$ تو ثابت کرو کہ ج اور د، ا ب کی داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۶۔ اگر ج اور د موسیقی مزدوج ہوں ا اور ب کے (شکل ۹۳) تو ثابت کرو کہ ج اور د ہمیشہ مقابل سمتوں میں حرکت کرتے ہیں۔ نیز ج اور د میں سے وہ نقطہ زیادہ سرعت سے حرکت کرتا ہے جو و سے زیادہ فاصلہ پر ہو۔

۷۔ اگر ج حرکت کرکے جَ پر اور د حرکت کرکے دَ پر چلا جائے جہاں ج جَ اور د دَ بہت چھوٹے ہیں تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{د دَ}}{\text{ج جَ}} = \frac{\text{ود}}{\text{وج}}$

۲۶۷۔ مبدأ و سے نقطوں کے دو زوجوں کے فاصلے درجہ دوم کی مساواتوں

$$ا_1 لا^2 + ۲ ب_1 لا + ج_1 = ۰ \quad \text{اور} \quad ا_2 لا^2 + ۲ ب_2 لا + ج_2 = ۰$$

سے معلوم ہوتے ہیں، اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ دونوں زوج موسیقی ہوں۔

فرض کرو کہ پہلی مساوات کی اصلیں $لا_1$، $لا_2$ ہیں اور دوسری کی $لا_3$، $لا_4$، تب ہم جانتے ہیں کہ

$$۲(لا_1 لا_2 + لا_3 لا_4) = (لا_1 + لا_2)(لا_3 + لا_4) \quad \text{(دفعہ ۲۶۴)}$$

لیکن مسائل مساوات درجہ دوم کی رُو سے

$$لا_1 + لا_2 = -۲ ب_1 / ا_1 \quad \text{اور} \quad لا_3 + لا_4 = -۲ ب_2 / ا_2$$

$$لا_1 لا_2 = ج_1 / ا_1 ، \quad لا_3 لا_4 = ج_2 / ا_2 \quad \text{(ٹیوٹوریل الجبرا، دوم ۱۵۶)}$$

$$\text{لہذا} \quad ۲\left(\frac{ج_1}{ا_1} + \frac{ج_2}{ا_2}\right) = \left(-\frac{۲ ب_1}{ا_1}\right)\left(-\frac{۲ ب_2}{ا_2}\right)$$

$$\text{یا} \quad ا_1 ج_2 + ا_2 ج_1 = ۲ ب_1 ب_2 \quad \cdots\cdots\cdots (۳)$$

نتیجہ صریح۔ نقطوں کا ایک ایسا زوج معلوم کیا جا سکتا ہے جو دو اور معلومہ زوجوں میں سے ہر ایک کا موسیقی مزدوج ہو۔

فرض کرو کہ معلومہ زوج مساواتوں $ا_1 لا^2 + ۲ ب_1 لا + ج_1 = ۰$ اور $ا_2 لا^2 + ۲ ب_2 لا + ج_2 = ۰$ سے حاصل ہوتے ہیں۔

تب اگر دو نقاط جو $ا لا^2 + ۲ ب لا + ج = ۰$ سے تعبیر ہوتے ہیں پہلے زوج کے موسیقی ہوں تو $ا ج_1 + ج ا_1 - ۲ ب ب_1 = ۰$۔ اور اگر یہ دو نقطے دوسرے زوج کے موسیقی مزدوج ہوں تو $ا ج_2 + ج ا_2 - ۲ ب ب_2 = ۰$۔

ان دو مساواتوں سے ا، ب، ج کی نسبتیں حسب معمول حاصل ہو سکتی ہیں۔ (ٹیوٹوریل الجبرا، حصہ دوم، دفعہ ۶۸)

مشقیں

۸- ایک خط پر کے ایک ثابت نقطہ و سے نقاط ا اور ب کے فاصلے مساوات

لا^{2} - ۵ لا + ۳ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں، اگر و ج = ۱ تو و د معلوم کرو جہاں ج اور د مزدوج ہیں ا اور ب کے۔

(فرض کرو کہ و د = عہ، تب جو نقطے درجہ دوم کی دو مساواتوں (لا - ۱) (لا - عہ) = ۰ اور لا^{2} - ۵ لا + ۳ = ۰ سے تعبیر ہوتے ہیں موسیقی مزدوج ہونے چاہئیں)

۹- ق کی وہ قیمت معلوم کرو کہ نقاط کا زوج

لا^{2} + ۲ لا - ۱ = ۰، لا^{2} + ۴ لا + ق = ۰

کا موسیقی مزدوج ہو۔

۱۰- نقطوں کا ایسا زوج معلوم کرو جو ذیل کے دو زوجوں کا موسیقی مزدوج ہو

لا = ۱، لا = ۳ اور لا = ۴، لا = ۶

۱۱- نقطوں کا وہ زوج جو دونوں زوجوں

ا$_{1}$ لا^{2} + ۲ ب$_{1}$ لا + ج$_{1}$ = ۰ اور ا$_{2}$ لا^{2} + ۲ ب$_{2}$ لا + ج$_{2}$ = ۰

کے لحاظ سے موسیقی ہے مساوات

(ا$_{1}$ لا + ب$_{1}$) (ب$_{2}$ لا + ج$_{2}$) - (ا$_{2}$ لا + ب$_{2}$) (ب$_{1}$ لا + ج$_{1}$) = ۰

سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۶۹- و عہ، و بہ اور و جہ، و لہ شعاعوں کے دو زوج ہیں، ایک خطِ مستقیم ان سے ا، ب اور ج، د پر ملتا ہے، اگر ا، ب

اور ج، د موسیقی مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ ہر خطِ مستقیم جو اِن شعاعوں سے ملتا ہے اِن پر موسیقی نسبت سے تقسیم ہو جاتا ہے۔

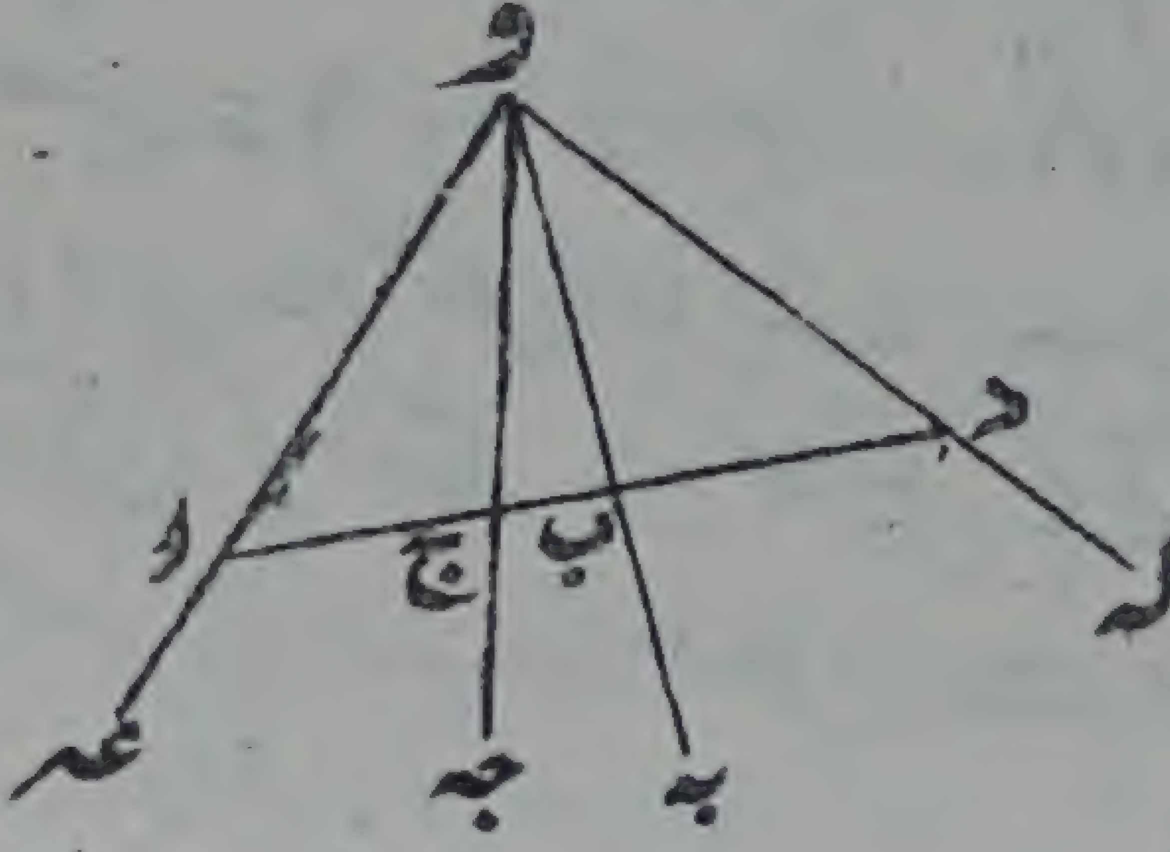
ا، ب اور ج، د موسیقی نقطے ہوں گے اگر

$$\frac{\text{اج} \times \text{بد}}{\text{اد} \times \text{بج}} = -1 \quad \ldots\ldots \quad (\text{دفعہ ۲۶۳})$$

نقطہ و سے اس خط پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اس عمود کا طول ع ہے۔ تب

$$\text{اج} \times \text{ع} = ۲ \triangle \text{اوج}$$

$$= \text{وا} \times \text{وج جب اوج}$$



شکل ۹۴

اور اس لئے

$$\text{اج} = \text{وا} \times \text{وج جب اوج} / \text{ع}$$

ب د، ا د اور ب ج کیلئے بھی اسی طرح کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

پس مساوات بالا میں درج کرنے سے

$$\frac{(\text{وا} \times \text{وج جب اوج}/\text{ع}) \times (\text{وب} \times \text{ود جب بود}/\text{ع})}{(\text{وا} \times \text{ود جب اود}/\text{ع}) \times (\text{وب} \times \text{وج جب بوج}/\text{ع})} =$$

جس سے

$$\frac{\text{جب اوج} \times \text{جب بود}}{\text{جب اود} \times \text{جب بوج}} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

اب اس شرط میں قطع کرنے والے خط کے مقام کی کوئی تخصیص نہیں بلکہ یہ محض شعاعوں کے باہمی میلان پر موقوف ہے، پس اگر یہ ایک قاطع خط کے لئے درست ہو تو یہ سب خطوں کے لئے درست ہوگی۔

۲۷۰۔ پنسل۔ تعریف۔ اگر کئی خطوطِ مستقیم ایک ہی نقطے میں سے گذریں تو یہ ایک پنسل بناتے ہیں۔

اس نقطہ کو راس کہتے ہیں اور ہر خط کو منفرداً پنسل کی شعاع کہتے ہیں مثلاً و ا، و ج، و ب، و د (شکل ۹۴ میں) ایک پنسل بناتے ہیں، اس قسم کی پنسل کو مختصراً و (ا ج ب د) لکھا جاتا ہے۔

موسیقی پنسل۔ تعریف۔ اگر خطوطِ مستقیم کے دو زوج و عہ، و بہ اور و جہ، و لہ کسی خط (اور راس نے حسب سابق سب قاطع خطوط) سے موسیقی نقطوں پر ملیں تو خطوطِ مستقیم کے ان زوجوں کو موسیقی زوج کہتے ہیں یا اصطلاحاً اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ چار خطوط و عہ، و بہ، و جہ، و لہ موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

تظلیل۔ تعریف۔ اگر ایک خط کے کسی نقطہ ن کو ایک ثابت نقطہ و سے ملایا جائے اور و ن ممدودہ کسی اور خط سے نَ پر ملے تو نَ کو نقطہ ن کا ظل کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۱۔ اس سے ظاہر ہے کہ اگر چار نقطے ایک موسیقی صف بنائیں تو کسی اور خط پر ان کے ظل بھی موسیقی صف بنائینگے۔

نتیجہ صریح ۲۔ ایک موسیقی صف کے نقطوں کو کسی راس کے ساتھ ملانے سے جو پنسل حاصل ہوتی ہے وہ موسیقی ہوتی ہے۔

۱۷۲۔ صورتِ خاص۔ دفعۂ ماقبل کے نتیجہ سے ہم ایک اور نتیجہ مستنبط کرتے ہیں جس کے ذریعہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کوئی مفروضہ پنسل موسیقی ہے یا نہیں۔

فرض کرو کہ قاطع خط ا ب ج د، و لہ کے متوازی ہے، تب د لا نہایہ پر ہوگا اور بنا بریں ج، ا ب کا وسطی نقطہ ہوگا پس اگر چار خط موسیقی پنسل بنائیں اور ان میں سے ایک خط کے متوازی ایک قاطع خط کھینچا جائے تو باقی تین خطوں میں سے دو خطوں کے درمیان قاطع کا جو حصہ منقطع ہوتا ہے اس کی تنصیف تیسرا خط کرتا ہے، اس کا عکس بھی درست ہے۔

مثلاً قطع زائد کے مماس کا وہ حصہ جو اس کے متقاربوں کے

درمیان منقطع ہوتا ہے نقطۂ تماس پر دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے اور چونکہ مماس مزدوج قطر کے متوازی ہوتا ہے اس لئے ثابت ہوا کہ قطع زائد کے کوئی دو مزدوج قطر متقاربوں کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوتے ہیں۔

تحلیلی طریقہ سے بھی اس کی تصدیق ہو سکتی ہے قطع زائد

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱

کے متقارب ہیں ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ اور خطوط ا$_1$ لا^2 + ۲ ھ$_1$ لا ما + ب$_1$ ما^2 = ۰ مزدوج قطر ہوں گے اگر

ا ب$_1$ + ب ا$_1$ − ۲ ھ ھ$_1$ = ۰ (دیکھو مشق ۱۰، صفحہ ۲۳۵)

لیکن دفعہ ۲۷۲ کی رو سے یہ شرط وہی ہے جو پوری ہونی چاہئے تاکہ یہ خط متقاربوں کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوں۔

۲۷۲۔ اس امر کے لئے شرط معلوم کرو کہ مساواتوں

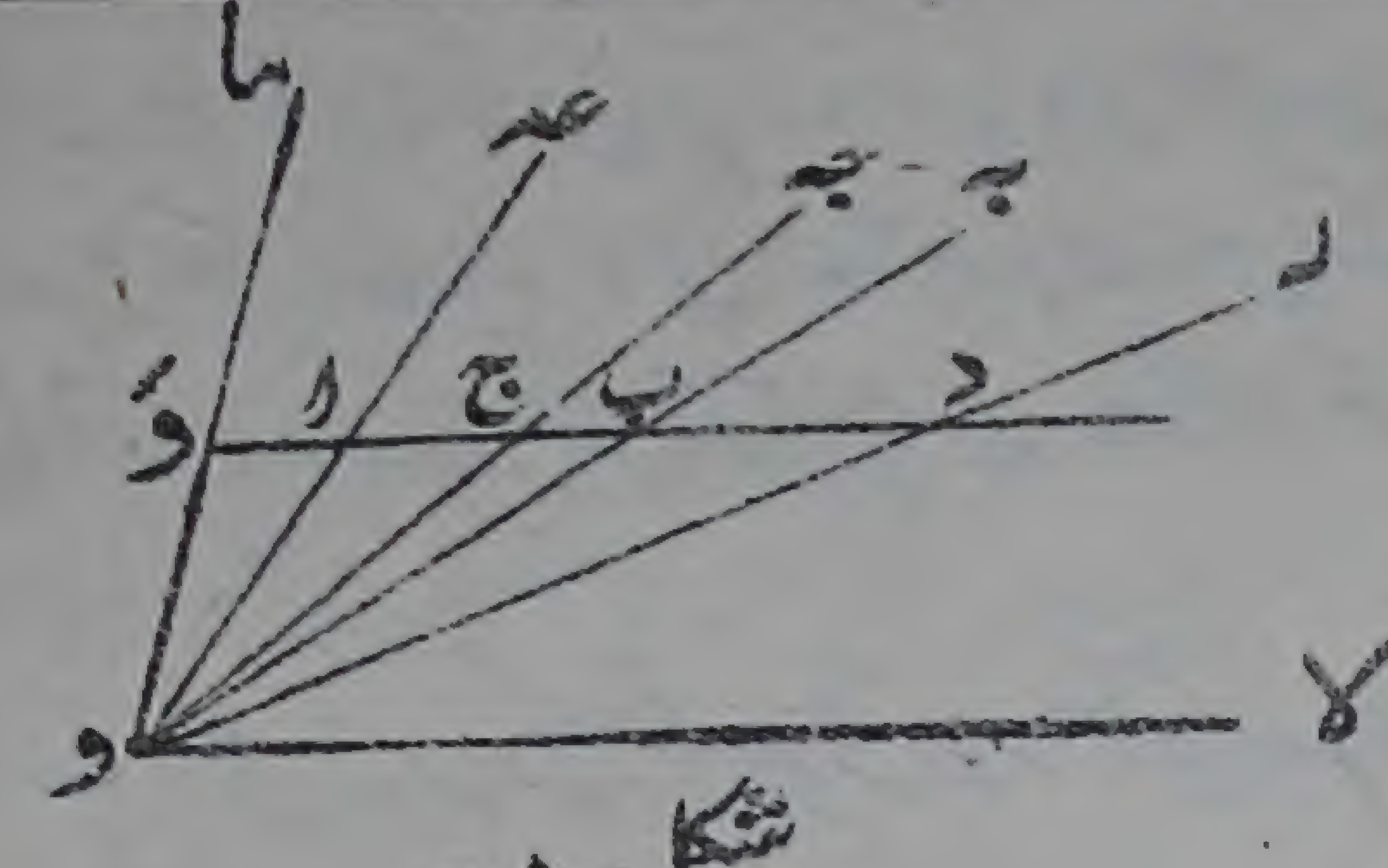
ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ اور ا$_1$ لا^2 + ۲ ھ$_1$ لا ما + ب$_1$ ما^2 = ۰

سے خطوط مستقیم کے جو دو زوج تعبیر ہوتے ہیں وہ باہم موسیقی ہوں۔

فرض کرو کہ خطوط کا پہلا زوج و عہ، و بہ ہے اور دوسرا و جہ، و دہ ہے۔

نیز فرض کرو کہ خط ما = ۱، و ما سے و پر اور خطوط کے زوجوں سے بالترتیب ا، ب، ج، د پر ملتا ہے، تب ا، ب اور ج، د موسیقی ہیں، و ا، و ب کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں پہلی مساوات میں ما = ۱ رکھنا چاہئے، لہذا و ا، و ب مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

ا لا^2 + ۲ ھ لا + ب = ۰



شکل ۹۵

اسی طرح سے دوسرا زوج وَج، وَد مساواتِ ذیل کی اصلیں ہیں

$$ا_{۲}\,لا^{۲} + ۲\,ھ_{۲}\,لا + ب_{۲} = ۰$$

لہٰذا دفعہ ۲۶۷ کی رُو سے شرطِ مطلوبہ ہے

$$ا_{۱}\,ب_{۲} + ا_{۲}\,ب_{۱} - ۲\,ھ_{۱}\,ھ_{۲} = ۰ \quad .... (۵)$$

نتیجہ صریح ۔ فرض کرو کہ خطوں کا دوسرا زوج حوالہ کے محور ہیں

یعنی $ا_{۲} = ب_{۲} = ۰$

اس صورت میں شرطِ بالا ہو جاتی ہے $ھ_{۱}\,ھ_{۲} = ۰$۔ لیکن چونکہ $ھ_{۲}$ صفر نہیں ہے اس لئے $ھ_{۱} = ۰$۔

پس خطوط $ا\,لا^{۲} + ب\,ما^{۲} = ۰$ محوروں کے لحاظ سے موسیقی خط ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ خط $ما - ھ\,لا = ۰$ اور $ما + ھ\,لا = ۰$ موسیقی ہیں کیونکہ ان کی مساوات ہے

$$ما^{۲} - ھ^{۲}\,لا^{۲} = ۰$$

جس میں لا ما کی رقم نہیں ہے۔

نتیجہ صریح ۲ ۔ اگر خطوطِ مستقیم کے دو زوج موسیقی ہوں اور ایک زوج کے خط علی القوائم ہوں تو یہ خط دوسرے زوج کے درمیانی زاویوں کی

تنصیف کریں گے
علی القوائم خطوطِ مستقیم کے زوج کو محددوں کے محور فرض کرو، تب دوسرے خط $ا\,لا^2 + ب\,ما^2 = ۰$ ہیں، اور یہ صریحاً محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

مشقیں

۱۲۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو اور د، ب ج کا وسطی نقطہ ہو تو خطوط ا ب، ا د، ا ج اور قاعدہ کے متوازی ا میں سے گزرنیوالا خط موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۳۔ دو خط اور ان خطوں کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصّف موسیقی پنسل بناتے ہیں۔
(کسی قاطع کے لئے یہ امر اقلیدس م ۶، ش ۳ سے ظاہر ہے یا یوں غور کرو کہ اگر دو منصفوں میں سے ایک منصف کے متوازی خط کھینچا جائے تو یہ خط ایک مثلث متساوی الساقین قطع کرتا ہے اور چونکہ منصّفین علی القوائم ہیں اس لئے دوسرا منصف اس مثلث کے قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے)

۱۴۔ تین خط و ا، و ب، و ج دئے ہوئے ہیں، ایک اور خط و د ایسا کھینچنا مقصود ہے کہ و ا، و ب اور و ج، و د موسیقی مزدوج ہوں، و د کے کھینچنے کے لئے ذیل کے عمل کی صداقت ثابت کرو، و ج پر کوئی نقطہ ن لو اور ن م، ن ل بالترتیب و ا، و ب کے متوازی کھینچو جو و ب، و ا سے بالترتیب م اور ل پر ملیں اور پھر و د کو م ل کے متوازی کھینچو۔

۱۵۔ ایک متحرک خطِ مستقیم کسی چار ثابت خطوطِ مستقیم و عہ، و بہ، و جہ، و لہ سے نقاط ا، ب، ج، د پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $\frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب}$ کی قیمت قاطع خط کے تمام مقامات

کے لئے وہی ہے۔

۱۶- ثابت کرو کہ خطوط ما = ۳ لا اور ما = ۴ لا کا زوج اور ما = ۵ لا، ۳ ما = ۱۱ لا کا زوج موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

(ثابت کرو کہ جن نقطوں پر یہ خط لا = ۱ سے ملتے ہیں وہ موسیقی صف بناتے ہیں)

۱۷- ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم کے زوج لا^۲ + ۲ لا ما - ما^۲ = ۰ اور ۳ لا^۲ - ۴ لا ما - ما^۲ = ۰ موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۸- خواہ محور قائم ہوں یا مائل، خطوطِ مستقیم ما = م لا اور ما = - م لا محوروں کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۹- لہ کی وہ قیمت معلوم کرو کہ خطوطِ مستقیم کے زوج

۳ لا^۲ + لا ما - ما^۲ = ۰ اور لا^۲ + لہ لا ما + ما^۲ = ۰

موسیقی پنسل بنائیں۔

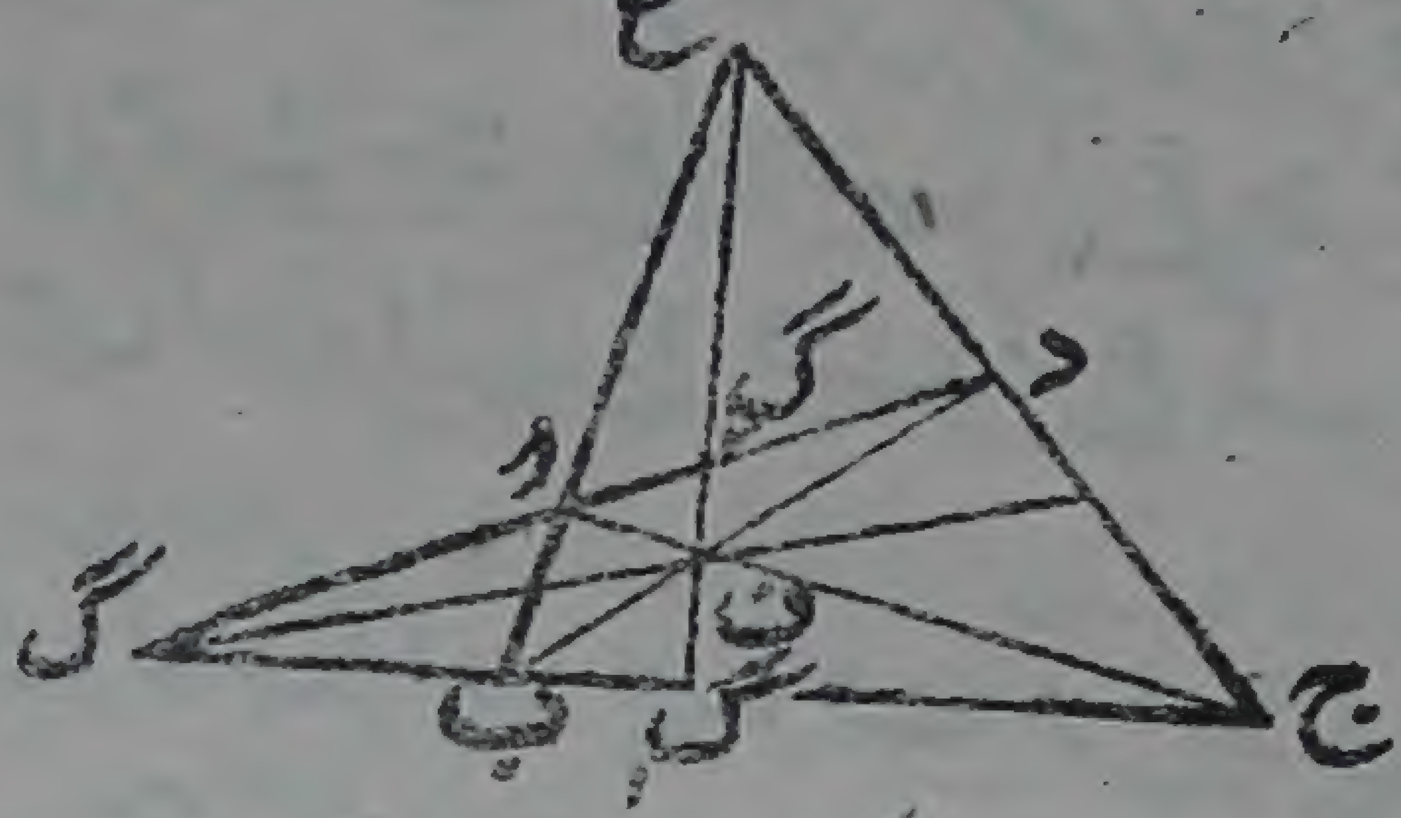
۲۰- اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ جو خط خیالی زوج لا^۲ + ما^۲ = ۰ کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں وہ علی القوائم ہیں۔

۲۱- اگر حوالہ کے محور ایک دوسرے سے زاویہ سہ بنائیں تو ثابت کرو کہ جو خط خیالی زوج لا^۲ + ۲ لا ما جم سہ + ما^۲ = ۰ کے ساتھ موسیقی پنسل بنائیں ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

۲۷۳- ذو اربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت۔

ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د ہے، ب ج اور ا د، گ پر ملتے ہیں، ب ا، ج د نقطہ ع پر اور ب د، ا ج نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوں کے زوج گ ع، گ ف اور گ ا، گ ب موسیقی ہیں۔

گ ب ج اور گ ا د کو حوالہ کے محور مانو،



شکل ۹۶

اگر گ ا = عه، گ ب = به، گ ج = جه، گ د = له
تو ہم خطوطِ مستقیم کی مساواتیں حسب ذیل لکھ سکتے ہیں

ا ب ہے $\frac{\text{لا}}{\text{به}} + \frac{\text{ما}}{\text{عه}} = 1$ ؛ ا ج ہے $\frac{\text{لا}}{\text{جه}} + \frac{\text{ما}}{\text{عه}} = 1$

ج د ہے $\frac{\text{لا}}{\text{جه}} + \frac{\text{ما}}{\text{له}} = 1$ ؛ ب د ہے $\frac{\text{لا}}{\text{به}} + \frac{\text{ما}}{\text{له}} = 1$

گ ع خطوط ا ب، ج د کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے نیز مبدا اس پر واقع ہے اس لئے اس کی مساوات ہے

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{به}} + \frac{\text{ما}}{\text{عه}} - 1\right) - \left(\frac{\text{لا}}{\text{جه}} + \frac{\text{ما}}{\text{له}} - 1\right) = 0$$

$$\text{یا}\quad \text{لا}\left(\frac{1}{\text{به}} - \frac{1}{\text{جه}}\right) + \text{ما}\left(\frac{1}{\text{عه}} - \frac{1}{\text{له}}\right) = 0$$

اسی طرح سے آخری دو مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ گ ف کی مساوات ہے

$$\text{لا}\left(\frac{1}{\text{به}} - \frac{1}{\text{جه}}\right) - \text{ما}\left(\frac{1}{\text{عه}} - \frac{1}{\text{له}}\right) = 0$$

چونکہ گ ع اور گ ف کی مشترک مساوات میں لا ما والی رقم نہیں ہے اس لئے خط گ ع، گ ف محوروں کے ساتھ ملکر ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۲۷۲، نتیجہ صریح ۱)

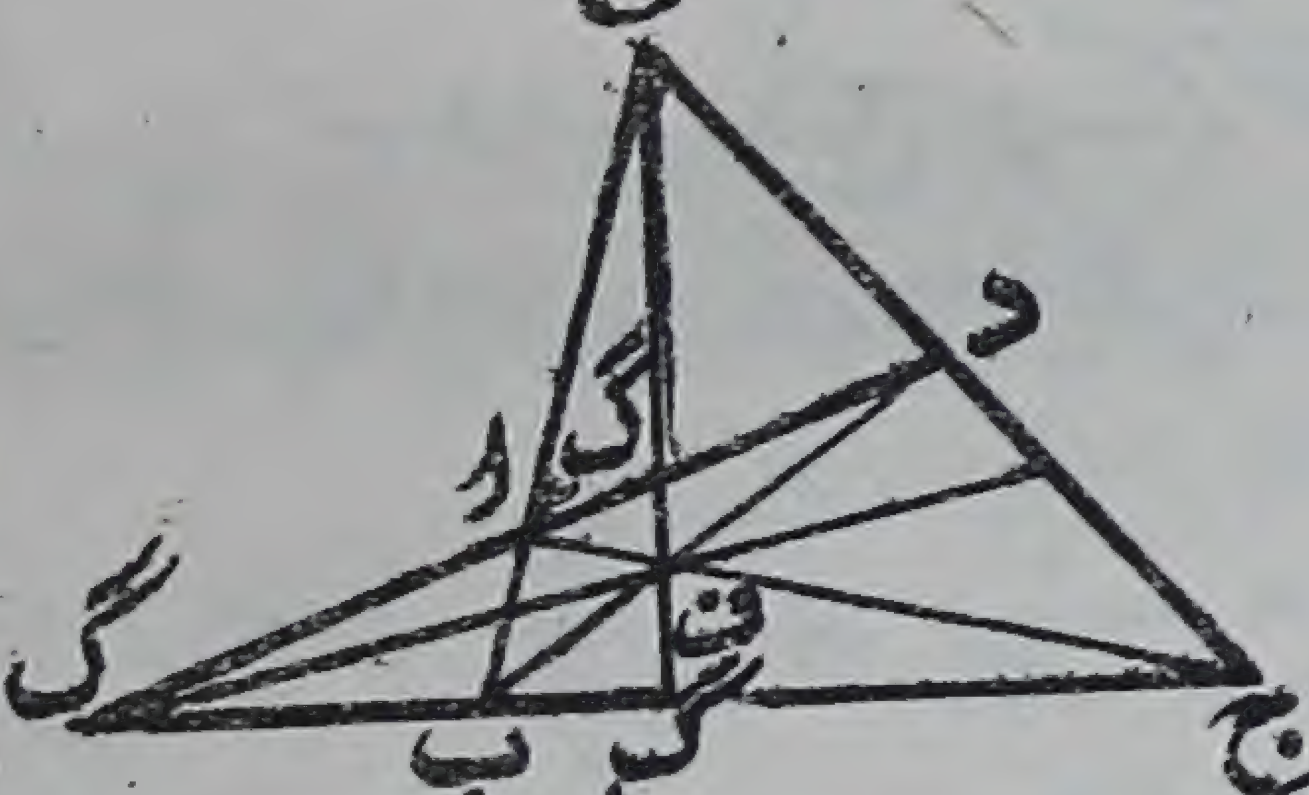
ذیل کے نتائج صریح کو طالب علم مشقیں سمجھ کر خود ثابت کرے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اسی طرح سے ع ا ب، ع د ج کو محور ماننے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ازواج ع ف، ع گ اور ع ا ب، ع د ج موسیقی ہیں۔

نتیجہ صریح ۲۔ ف کو مبدا اور ب ف د اور ا ف ج کو محور مانکر ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ازواج ف ع، ف گ اور ف ا، ف ب موسیقی ہیں۔

۴۲۷۔ مکمل ذوار بعۃ الاضلاع اور اس کے خواص۔

پوری شکل کو مکمل ذوار بعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔ ایسی شکل کھینچنے کا آسان طریقہ یہہ ہے کہ پہلے ہم خطوط ع ا ب اور ع د ج کھینچیں جو ع پر ملتے ہیں، پھر متقاطع خطوط گ ب ج اور گ ا د کھینچیں۔ اس کو غور سے دیکھ لینا طالب علم کیلئے مفید ثابت ہوگا کیونکہ اگر ایسا کرنے کی بجائے نقطے ا، ب، ج، د پہلے سے لئے جائیں تو اکثر اوقات شکل کے مختلف خطوط تقریباً متوازی ہونگے اور شکل بہت بڑی بن جائیگی۔



شکل ۹۷

یہ بات بھی توجہ کے قابل ہے کہ نقاط ع، ف، گ درحقیقت ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د کے لحاظ سے متشاکل ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک نقطہ، نقطۂ تقاطع ہے ایسے دو خطوط کا جو ا، ب، ج، د میں سے دو دو راسوں کو ملانے سے پیدا ہوں۔

اگر نقاط تقاطع ع، ف، گ میں سے کسی ایک میں سے حسب ذیل چار خطوط کھینچے جائیں تو یہ خط موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

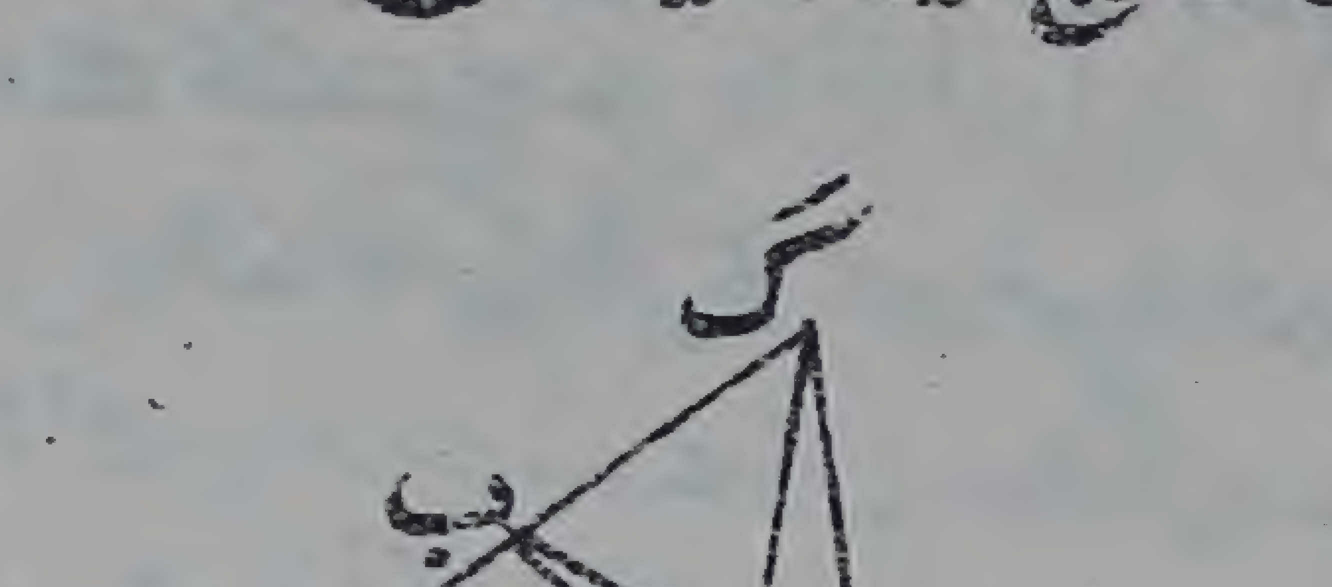
(۱) پہلے دو خط ایک تقاطع (مثلاً ف) کو باقی دو نقاط تقاطع

گ، ع سے وصل کرتے ہیں

(۲) دوسرے دو خط اسی نقطۂ تقاطع ف کو ابتدائی ذوار بعۃ الاضلاع کے نقاط ا، ب، ج، د سے ملاتے ہیں۔

۲۷۵ – دفعہ ۲۷۳ کے نتائج سے ہمیں بلحاظ دو نقاط معلومہ ج اور د کے نقطہ گ کے موسیقی مزدوج معلوم کرنے کی ایک آسان اور دلچسپ ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

کوئی نقطہ گ لو اور گ ج، گ د، گ گَ کو ملاؤ، تب ج سے کوئی خط ج ا کھینچو جو گ گَ سے ف پر اور گ د سے ا پر ملے، د ف کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ گ ج سے ب پر ملے۔ اس کے بعد ب ا کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ ج د سے ع پر ملے۔



شکل ۹۸

تب ع مطلوبہ نقطہ ہے، جیسا کہ ماقبل سے ظاہر ہے۔

ممکن ہے کہ طالب علم یہ خیال کرے کہ مندرجہ بالا عمل طویل اور پیچیدہ ہے اور کوئی اس قسم کا عمل کہ پہلے ج د کی و پر تنصیف کی جائے اور پھر د گَ × و ع = و د² بنایا جائے زیادہ موزوں ہے۔ درحقیقت جو عمل ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ علم ہندسہ میں سب سے زیادہ ضروری ہے اور یہ اس بنا پر کہ اس میں صرف رولر یعنی پٹری سے کام لینا پڑتا ہے یہ امر دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ طالب علم اقلیدسی عملوں کی جانچ کرے اور دیکھے کہ ان سب میں پرکار سے کام لینا پڑتا ہے۔

امثلہ دفعہ ۲۷۲ مشق ۴۱ میں زیادہ آسان عمل بتایا گیا ہے۔

مشق

۴۴ – شکل ۹۷ کے مکمل ذوار بعۃ الاضلاع میں اگر ع ف محدودہ

ب ج سے گ پر ملے تو ثابت کرو کہ نقاط کے زوج ب، ج اور گ، گ موسیقی ہیں۔

یہ ثابت کرنے کے بعد کہ پنسل ع (ب ف ج گ) موسیقی ہے اس سے مستنبط کرو کہ ف (گ ج گ ب) بھی موسیقی ہے یعنی ف (گ ج ع ب) موسیقی ہے۔

(یہ سب امور اس اصول سے ظاہر ہوتے ہیں کہ موسیقی پنسل کو ہر ایک خط موسیقی صف پر قطع کرتا ہے)

۲۷۶ — مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج نقطے اُن نقطوں کے موسیقی مزدوج ہوتے ہیں جن پر اول الذکر نقطوں کو ملانے والا خط مخروطی سے ملتا ہے۔

بالفاظ دیگر اگر ا اور ب دو ایسے نقطے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطبی دوسرے میں سے گزرے اور ا ب مخروطی سے نقاط ن اور ق پر ملے تو نقاط ا، ب اور ن، ق کے زوج موسیقی ہونگے۔

فرض کرو کہ مخروطی

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے، نقطہ ا (لا$_1$، ما$_1$) ہے اور نقطہ ب (لا$_2$، ما$_2$) ہے، تب ا کا قطبی ہے

ا لا$_1$ لا + ھ (لا$_1$ ما + لا ما$_1$) + ب ما$_1$ ما + گ (لا + لا$_1$) + ف (ما + ما$_1$) + ج = ۰

اور چونکہ نقطہ ب (لا$_2$، ما$_2$) اس پر واقع ہے، اس لئے

ا لا$_1$ لا$_2$ + ھ (لا$_1$ ما$_2$ + لا$_2$ ما$_1$) + ب ما$_1$ ما$_2$ + گ (لا$_1$ + لا$_2$) + ف (ما$_1$ + ما$_2$) + ج = ۰

اب جن نسبتوں میں مخروطی خط ا ب کو تقسیم کرتی ہے مشہور و معروف نسبتی مساوات درجہ دوم

ک^2 س$_1$ + ۲ ک ل ص$_{21}$ + ل^2 س$_2$ = ۰ [دفعہ ۱۳۶]

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں

$$\text{م}_{۱۲} = \text{ا}\,\text{لا}_۱\text{لا}_۲ + \text{ھ}(\text{لا}_۱\text{ما}_۲ + \text{لا}_۲\text{ما}_۱) + \text{ب}\,\text{ما}_۱\text{ما}_۲ + \text{گ}(\text{لا}_۱ + \text{لا}_۲) + \text{ف}(\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲) + \text{ج}$$

$$\text{س}_۱ = \text{ا}\,\text{لا}_۱^۲ + ۲\text{ھ}\,\text{لا}_۱\text{ما}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱^۲ + ۲\text{گ}\,\text{لا}_۱ + ۲\text{ف}\,\text{ما}_۱ + \text{ج}$$

$$\text{س}_۲ = \text{ا}\,\text{لا}_۲^۲ + ۲\text{ھ}\,\text{لا}_۲\text{ما}_۲ + \text{ب}\,\text{ما}_۲^۲ + ۲\text{گ}\,\text{لا}_۲ + ۲\text{ف}\,\text{ما}_۲ + \text{ج}$$

اور ک ل کا سر صفر ہے، اس لئے دونوں نسبتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں یعنی ن اور ق، اب کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں، اس سے نتیجہ ثابت ہوا۔

۲۔ متبادل ثبوت۔ فرض کرو کہ و اور ا (شکل ۹۹) دو نقاط معلومہ ہیں، و کو مبدا مانو اور و ا کو لا کا محور فرض کرو، نیز فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ہے

$$\text{ا}\,\text{لا}^۲ + ۲\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^۲ + ۲\text{گ}\,\text{لا} + ۲\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

اگر مخروطی و لا سے ن اور ق پر ملے تو و ن اور و ق کے طول معلوم کرنے کے لئے ہمیں اوپر کی مساوات میں ما کو صفر بنانا چاہئے۔
پس و ن، و ق مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^۲ + ۲\text{گ}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰$$

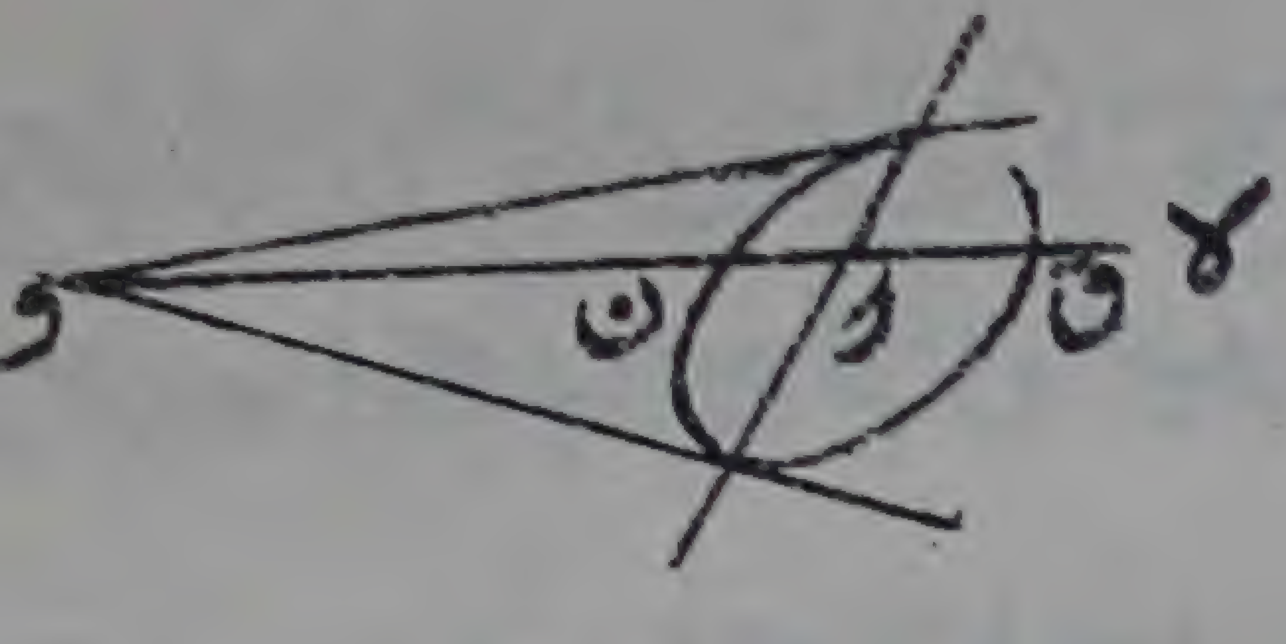
کی اصلیں ہیں، لہٰذا مساواتوں کے مسائل کی رو سے

$$\frac{۱}{\text{ون}} + \frac{۱}{\text{وق}} = -\frac{۲\text{گ}}{\text{ج}}$$

لیکن مبدا و (۰،۰) کا قطبی گ لا + ف ما + ج = ۰ ہے اور چونکہ یہ حسب مفروض ا میں سے گزرتا ہے اس لئے و ا کی قیمت مساوات گ لا + ج = ۰ سے حاصل ہوتی ہے

$$\therefore \frac{۱}{\text{وا}} = -\frac{\text{گ}}{\text{ج}}$$

ان دونوں نتیجوں کا مقابلہ کرنے سے
ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ



شکل ۹۹

$$\frac{۲}{و ا} = \frac{۱}{و ن} + \frac{۱}{و ق}$$

جس سے ظاہر ہے کہ و اور ا نقاط ن اور ق کے موسیقی مزدوج ہیں (دیکھو دفعہ ۲۶۵)

اس نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

کسی نقطہ میں سے گزرنے والا خط اُس نقطہ، منحنی اور اُس نقطہ کے قطبی سے موسیقی نسبت پر تقسیم ہو جاتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے ایک خط کھینچا جائے جو مخروطی سے ن اور ق پر ملے اور اس خط پر ایک اور نقطہ ل ایسا لیا جائے کہ و ل اوسطِ موسیقی ہو و ن اور و ق کے درمیان، تو جیسے خط و ن ق، و کے گرد گھومتا ہے ل ایک خطِ مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ کیونکہ وہ نقطہ جس پر خط و ن ق، و کے قطبی سے ملتا ہے حسب مسئلہ بالا خط و ن ق کی موسیقی تقسیم کرتا ہے، پس ل ہمیشہ و کے قطبی پر رہتا ہے۔

مشقیں

۴۲۳۔ اس کی تصدیق کرو کہ نقطے (۱، ۱)، (۲/۳ ، ۴/۳) مخروطی لا² + لا ما + ما² = ۳ کے لحاظ سے مزدوج نقطے ہیں، جس نسبت سے اِن کو ملانے والا خط منحنی سے تقسیم ہوتا ہے اس کے لئے مساوات درجہ دوم دریافت کرو اور اس سے تصدیق کرو کہ تقسیم موسیقی ہے۔

۴۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی، خطِ مستقیم ا ب کی موسیقی نسبت سے

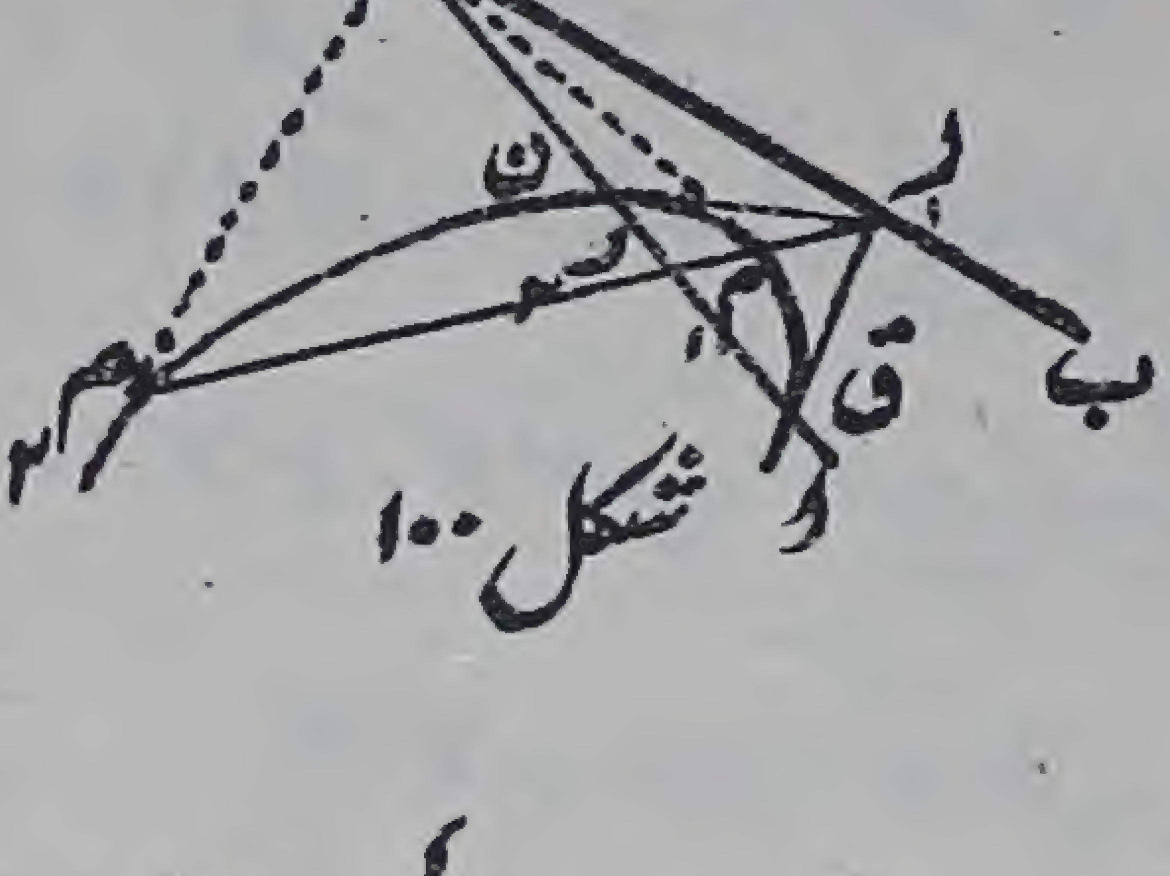
تقسیم کرے تو ا کا قطبی ب میں سے گزرتا ہے۔

۲۵۔ ا، ب، ج، د ایک مخروطی پر چار نقطے ہیں، اب، ج د سے ع پر، ب ج، اد سے گ پر، اج، ب د سے ف پر ملتا ہے، نیز ع ف، اد سے گ۱ پر اور ب ج سے گ۲ پر ملتا ہے۔ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے خواص سے ثابت کرو کہ نقطوں کے زوج گ، گ اور د، ا، زوج گ، گ۱ اور ج، ب موسیقی ہیں۔ اس سے مستنبط کرو کہ گ کا قطبی گ۱ اور گ۲ میں سے گزرتا ہے اور اس لئے یہ خط ع ف ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ مشق ماقبل میں مثلث ع ف گ ایسا ہے کہ اس کا ہر ایک ضلع مخروطی کے لحاظ سے مقابل کے رأس کا قطبی ہے۔ ایسے مثلث کو مخروطی کے لحاظ سے "مثلث مزدوج بالذات" کہتے ہیں۔

۲۷۸۔ مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج خط اور ان کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے مماس موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ و ا، و ب منحنی کے لحاظ سے مزدوج ہیں یعنی ایسے خط ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطب دوسرے پر واقع ہوتا ہے، تب اگر نقطہ و سے مماس وم۱، وم۲ کھینچے جائیں تو ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ خطوط و ا، و ب اور وم۱، وم۲ باہم موسیقی ہیں۔



شکل ۱۰۰

فرض کرو کہ خط و ا مخروطی سے ن اور ق پر ملتا ہے، تب حسب مفروض و ا کا قطب و ب پر واقع ہوتا ہے، لیکن و ا کا قطب ن اور ق پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ہے، اس لئے یہ مماس و ب پر (یعنی نقطہ ل پر) ملتے ہیں دیکھو شکل۔

اب ل کا قطبی ن ق نقطہ و میں سے گزرتا ہے

لہٰذا م م۲ جو و کا قطبی ہے نقطہ ل۲ میں سے گزرتا ہے
فرض کرو کہ م۱ م۲ ق ت سے ل۲ پر ملتا ہے، تب حسب دفعہ ۲۷۶
ل، اور ل۲ مزدوج ہیں م۱ اور م۲ کے۔
پس و ل، و ل۲ خطوط و م۱، و م۲ کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں (دفعہ ۲۷۰) یعنی خطوط و ا، و ب اور و م۱، و م۲ کے موسیقی ہیں۔

۲۷۹۔ متبادل ثبوت۔ اب ہم دفعۂ ماقبل کے مسئلہ کا خالص تحلیلی ثبوت مندرج کرتے ہیں تاکہ مسئلہ مذکور کی اہمیت اور اس طریقہ کی خوبی پوری طرح طالب علم کے ذہن نشین ہو جائے۔
فرض کرو کہ مزدوج خط محدود دک کے محور ہیں اور اس لئے و مبدا ہے۔ چونکہ محور بالعموم مخروطی

ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کے لحاظ سے مزدوج نہیں ہوتے اس لئے ضرور ہے کہ سروں کے درمیان کوئی شرط پوری ہو، اس شرط کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہیے کہ کن حالات کے ماتحت لا = ۰ کا قطب ما = ۰ پر واقع ہوتا ہے۔
اب لا، ما کا قطبی ہے

لا (ا لا + ھ ما + گ) + ما (ھ لا + ب ما + ف) + گ لا + ف ما + ج = ۰

لہٰذا لا = ۰ کا قطب معلوم کرنے کی مساواتیں ہیں

ھ لا + ب ما + ف = ۰ اور گ لا + ف ما + ج = ۰

اگر یہ نقطہ ما = ۰ پر واقع ہو تو

ھ لا + ف = ۰ اور گ لا + ج = ۰

لہٰذا ف گ = ج ھ .... (۱)

اب و میں سے گزرنے والے مماس ہیں

(گ لا + ف ما + ج)^{2} = ج (ا لا^{2} + ۲ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج)

دفعہ ۱۴۸

یا لا^{2} (ا ج - گ^{2}) - ۲ لا ما (ف گ - ج ھ) + ما^{2} (ب ج - ف^{2}) = ۰

لیکن لا ما والی رقم (۱) کی رو سے صفر ہے پس دفعہ ۲۷۲ کی رُو سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مماسوں کا زوج اور محور موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۲۸۰۔ اوپر کے مسئلہ کی مثال کے طور پر کسی مرکز دار تراش کے مزدوج قطروں پر غور کرو۔

مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج خط مزدوج قطر ہوتے ہیں کیونکہ کسی قطر کا قطب وہ نقطہ ہے جہاں اس قطر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ لیکن چونکہ یہ دونوں مماس مزدوج قطر کے متوازی ہیں، اس لئے یہ مزدوج قطر کے لاتناہی پر کے نقطہ پر ملتے ہیں (دیکھو دفعہ ۲۰۰) لہذا کسی قطر کا قطب اس کے مزدوج قطر پر واقع ہوتا ہے، پس حسب تشریح بالا مزدوج قطر مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج خط ہیں۔ نیز مرکز میں سے گزرنے والے مماس متقارب ہیں اسلئے معلوم ہوا کہ مزدوج قطروں کا زوج اور متقارب موسیقی پنسل بناتے ہیں

باب بستم پر متفرق مثالیں

۲۷۔ ایک خط پر کے ایک نقطہ ا معلومہ سے

ا، ا + $\frac{\text{۲ لا ما}}{\text{لا + ما}}$، ا + لا، ا + ما

فاصلوں پر نقطے لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہلا زوج دوسرے کا موسیقی ہے

۲۸۔ ثابت کرو کہ وہ نقطے جہاں ایک مثلث کے راسی زاویہ کے

داخلی اور خارجی منصف قاعدہ سے ملتے ہیں قاعدہ کے سروں کے موسیقی مزدوج ہیں۔

۲۹۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوطِ مستقیم کے زوج

لا^2 − ما^2 = ۰ اور ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰

موسیقی پنسل بنائیں۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم کا صرف ایک ہی زوج ایسا ہو سکتا ہے جو دو اور مفروضہ زوجوں میں سے ہر ایک کا موسیقی مزدوج ہو۔

۳۱۔ اگر محور قائم ہوں اور خطوط ا$_1$ لا^2 + ۲ ھ$_1$ لا ما + ب$_1$ ما^2 = ۰ کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ ہوں تو ثابت کرو کہ ا + ب = ۰ اور ا ب$_1$ + ب ا$_1$ − ۲ ھ ھ$_1$ = ۰

اِن مساواتوں کو ا اور ب کے لئے حل کرنے سے منصفوں کی مساواتیں حاصل کرو۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ محور لا پر کے دو نقطے جن کا فاصلہ مبدأ سے عہ اور بہ ہے بلحاظ دو اور نقطوں کے جن کے فاصلے مساوات ا لا^2 + ۲ ب لا + ج = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی ہوں گے اگر ا عہ بہ + ب (عہ + بہ) + ج = ۰

(مساوات درجہ دوم بناؤ جس کی اصلیں عہ اور بہ ہوں)

۳۳۔ اگر خطوط ما = م$_1$ لا، ما = م$_2$ لا اور خطوط ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ موسیقی ہوں تو ثابت کرو کہ

ا م$_1$ م$_2$ + ھ (م$_1$ + م$_2$) + ب = ۰

۳۴۔ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے قطر اور مقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خط موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۳۵۔ ایک موسیقی صف ا ب ج د اور ایک نقطہ و دونوں معلوم

ہیں، ثابت کرو کہ اگر ب میں سے ایک خط و د کے متوازی کھینچا جائے تو یہ خط و ا اور و ج سے ایسے نقطوں پر ملیگا جو ب سے متساوی الفصل ہوں گے۔

یہ بھی ثابت کرو کہ اگر ا ب ج د ایک اور موسیقی صف ایسی ہو کہ خط ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ پر ملیں تو خط د دَ بھی اسی نقطہ میں سے گزرے گا۔

۳۶ - ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم کے زوج $ما = م_1 لا$، $ما = م_2 لا$ اور $ما = م_3 لا$، $ما = م_4 لا$ صرف اُس وقت موسیقی ہوں گے

جبکہ $\frac{م_1 - م_3}{م_2 - م_3} \times \frac{م_2 - م_4}{م_1 - م_4} = -1$

(اُن نقطوں کو جن پر کہ اوپر کے خط، $لا = 0$ سے ملتے ہیں موسیقی ثابت کرو)

۳۷ - اگر خطوطِ مستقیم کے ازواجِ ذیل $ما = م_1 لا$، $ما = م_2 لا$، $ما = م_3 لا$، $ما = م_4 لا$ موسیقی ہوں تو ازواج $ما = \frac{ا + ب م_1}{ج + د م_1} لا$، $ما = \frac{ا + ب م_2}{ج + د م_2} لا$، $ما = \frac{ا + ب م_3}{ج + د م_3} لا$، $ما = \frac{ا + ب م_4}{ج + د م_4} لا$ بھی موسیقی ہوں گے جہاں ا، ب، ج، د کوئی مستقل ہیں۔

۳۸ - اگر ناقص کے چار قطر موسیقی پنسل بنائیں تو ان سب کے مزدوج قطر بھی موسیقی پنسل بنائیں گے۔

۳۹ - ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث بنایا گیا ہے، دائرہ کا ایک قطر کھینچا گیا ہے جو مثلث مذکور کے ایک ضلع پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ باقی دو اضلاع (ممدودہ بشرطِ ضرورت) اس قطر کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۴۰ - محددوں کے مبدا و میں سے خطوطِ مستقیم کھینچے گئے ہیں اور

اِن میں سے کوئی خط ون ق ص ایک ثابت خطِ مستقیم ل لا + م ما + س = ۰
سے ن پر اور ایک ثابت مخروطی ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
سے نقاط ق اور ص پر ملتا ہے، اگر نقطہ ر ایسا ہو کہ ن، ق، ر، ص
چار موسیقی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ر کا طریق مساوات ذیل سے
تعبیر ہو سکتا ہے

س (ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) = (ل لا + م ما + س)
× (گ لا + ف ما + ج)

آزمائشی پرچہ نمبر ۶

۱۔ اگر س = ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
اور سَ = اَ لا^{۲} + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^{۲} + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ = ۰
تو ثابت کرو کہ اُس مخروطی کی مساوات جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے
چار نقاطِ تقاطع میں سے گزرتی ہے س + ا سَ = ۰ کی شکل ہے۔
اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ اِن چار نقاطِ مشترک کے ایک
دائرہ پر واقع ہونے کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے
ھ : ھَ = ا ـ ب : اَ ـ بَ
۲۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو مساوات

ا لا^{۲} + ب ما^{۲} + ۲ ھ لا ما + ۲ ف جم^{۲} طہ × ما + ۲ گ جب^{۲} طہ × لا + ج = ۰
سے تعبیر ہوتی ہے جہاں طہ متغیر زاویہ ہے ہمیشہ دو ثابت نقطوں
میں سے گزرتی ہے۔
۳۔ خطوط لا = ۱، ما = ۲، لا ـ ما = ۰ کے راسوں میں سے جو
دائرہ گزرتا ہے اُس کی مساوات معلوم کرو۔

۴ - اگر عہ = ۰، بہ = ۰، جہ = ۰ خطوطِ مستقیم کی مساواتیں ہوں تو بتاؤ کہ عہ بہ = جہ² سے کیا تعبیر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مساوات

لا ما = لہ² (لا/ا + ما/ب - ۱)² سے ایک مخروطی تراش تعبیر ہوتی ہے جو محددوں کے محوروں کو مس کرتی ہے۔

۵ - خطوطِ مستقیم کا جو قبیل مساوات

مہ² (۲ لا + ۳ ما + ۴ ر) + مہ (۳ لا + ۴ ما + ۵ ر) + ۶ ر = ۰

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مس کرنے والے منحنی (لفافہ) کا مقام اور نوعیت معلوم کرو۔

۶ - ایک ناقص کے محور بلحاظ محل کے معلوم ہیں، اگر محوروں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو اس کا لفافہ معلوم کرو۔

۷ - "دوبر بیچہ" کی تعریف کرو اور مکانی کے بر بیچہ کی مساوات دریافت کرو۔

۸ - ایک خطِ مستقیم و لا پر چار موسیقی نقطے ن، ق، ر، س واقع ہیں جن میں سے ازواج ن، ر اور ق، س ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج ہیں۔ یہ سب نقطے و کے ایک ہی جانب واقع ہیں ثابت کرو کہ

(ون + ور) (وق + وس) = ۲ × ون × ور + ۲ وق × وس

۹ - ا، ب، ج، د ایک سطح مستوی پر کے چار نقطے ہیں اور اب اور دج ایک دوسرے کو گ پر، ب ج اور اد ایک دوسرے کو ف پر، اج اور ب د ایک دوسرے کو ع پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ خطوط ع (ب گ ج ف) موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

ایک خطِ مستقیم پر تین نقطے دئے ہوئے ہیں، محض پٹری کے ذریعہ

عمل کرنے سے اِن میں سے ایک نقطہ کا موسیقی مزدوج بلحاظ باقی ماندہ دو نقطوں کے معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر ایک نقطہ سے ایک خطِ مستقیم کھینچا جائے جو ایک مخروطی کو اور نیز مخروطی کے لحاظ سے جو نقطہ مذکورہ کا قطبی ہے اُس کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ یہ خط نقطۂ مذکورہ، منحنی، اور نقطۂ مذکورہ کے قطبی پر موسیقی نسبت سے تقسیم ہو جاتا ہے۔

بتاؤ کہ مسئلہ ماقبل کیا ہو جاتا ہے جبکہ خطِ مستقیم زائد کے ایک متقارب کے متوازی ہو یا مکافی کی صورت میں اُس کے قطر کے متوازی ہو یا نقطہ مذکورہ مخروطی کے مرکز پر واقع ہو۔

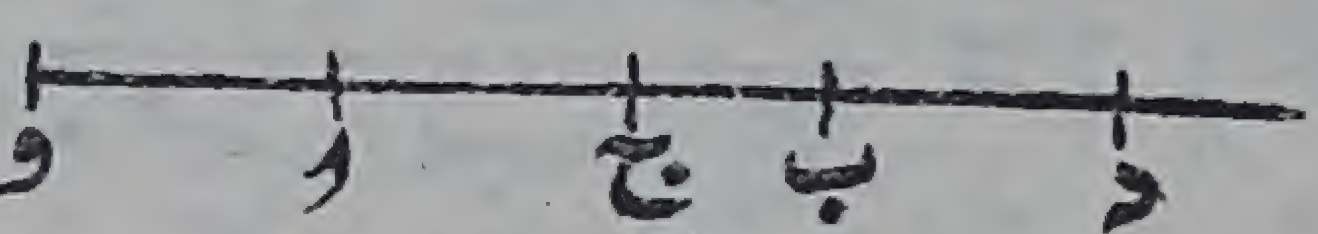
باب بست و یکم

چلیپی (غیر موسیقی) نسبتیں

۲۸۱ - تعریف - اگر ایک خطِ مستقیم پر چار نقطے ا، ج، ب، د دئے جائیں (دیکھو شکل ۱۰۱) تو نسبت

$$\frac{\text{ا ج} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ب ج}}$$

کو صف ا ج ب د کی غیر موسیقی یا چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں (ا ج ب د) - علامتوں کے لئے معمولی دستور کو ملحوظ رکھنا چاہئے یعنی ا ج = - ج ا



شکل ۱۰۱

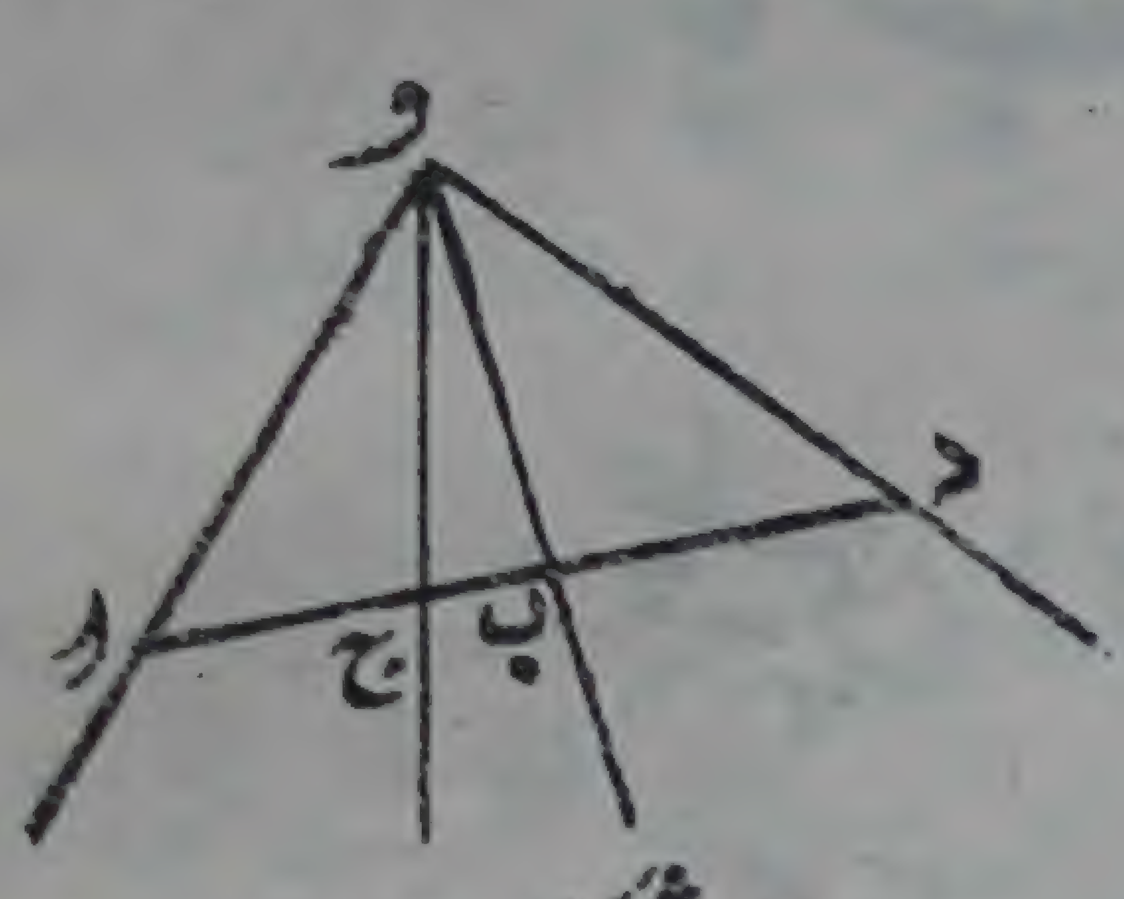
اوپر کی کسر کو لکھنے کا طریقہ بھی یاد رکھا جائے - شمار کنندہ میں نقطے اپنی ابتدائی ترتیب میں واقع ہوتے ہیں لیکن نسب نما میں دوسرے اور چوتھے نقطے باہم بدل دئے گئے ہیں -

اسی طرح سے اگر ہمارے پاس چار متراکز خط و ا، و ج، و ب، و د ہوں (شکل ۱۰۲) تو نسبت

$$\frac{\text{جب ا و ج} \times \text{جب ب و د}}{\text{جب ا و د} \times \text{جب ب و ج}}$$

کو شعاعوں و ا، و ج، و ب، و د کی پنسل کی غیر موسیقی یا چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں و (ا ج ب د)

۲۸۲ - چلیپی نسبتیں تظلیلی ہوتی ہیں - و سے خط ا ج ب د پر ایک عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا طول ع ہے، تب



شکل ۱۰۲

$$\text{ا ج} \times \text{ع} = ۲ \triangle \text{ا و ج}$$

$$= \text{و ا} \times \text{و ج} \times \text{جب ا و ج}$$

$$\text{یا ا ج} = \frac{\text{و ا} \times \text{و ج} \times \text{جب ا و ج}}{\text{ع}}$$

اسی قسم کی قیمتیں ب د، ا د، ب ج کے لئے حاصل ہو سکتی ہیں۔ لہذا چلیپی نسبت (ا ج ب د)

$$= \frac{\text{و ا} \times \text{و ج جب ا و ج} \times \text{و ب} \times \text{و د جب ب و د}}{\text{و ا} \times \text{و د جب ا و د} \times \text{و ب} \times \text{و ج جب ب و ج}}$$

$$= \frac{\text{جب ا و ج} \times \text{جب ب و د}}{\text{جب ا و د} \times \text{جب ب و ج}} = \text{و (ا ج ب د)}$$

اب فرض کرو کہ کوئی اور قاطع اسی پنسل کو اَ جَ بَ دَ پر کاٹتا ہے، تب (اَ جَ بَ دَ) = و (اَ جَ بَ دَ)

= و (ا ج ب د) = (ا ج ب د)

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی چلیپی نسبت کی قیمت تظلیل سے نہیں بدلتی (تظلیل کی تعریف کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۲۷۰، اس قسم کی تظلیل کو مخروطی تظلیل کہتے ہیں)

اب ہندسی مخروطات میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ مخروطی تظلیل کے ذریعہ ایک دائرہ کی تظلیل سے سب قسم کی مخروطی تراشیں یعنی

مکافی، ناقص اور زائد حاصل ہو سکتی ہیں اور برعکس اس کے کسی مخروطی تراش کی تظلیل سے ایک دائرہ حاصل ہو سکتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر چلیپی نسبتوں کی کوئی خاصیت دائرہ کے لئے ثابت کرلی جائے تو وہی خاصیت ہر قسم کی مخروطی تراشوں کے لئے درست ہوگی۔

چلیپی نسبت کی قیمت کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے، فرض کرو کہ ایک خط پر کے نقاط ا، ج، ب، د اس پر کے ایک ثابت مبدا و سے بالترتیب فاصلوں ا_1، ب_1، ج_1، د_1 پر ہیں۔ تب صریحاً (شکل ۱۰۱) سے

$$\frac{\text{اج} \times \text{بد}}{\text{اد} \times \text{بج}} = \frac{(\text{ج}_1 - \text{ا}_1)(\text{د}_1 - \text{ب}_1)}{(\text{د}_1 - \text{ا}_1)(\text{ج}_1 - \text{ب}_1)}$$

مخفی نہ رہے کہ شکل ۱۰۱ میں ب ج منفی ہوگا۔

چلیپی نسبت کی اس خاص صورت کو جبکہ یہ نسبت '-۱' کے مساوی ہو موسیقی نسبت کہتے ہیں، دیکھو دفعہ ۲۶۳ نتیجہ صریح۔

۲۸۳۔ چار نقطوں کی مختلف چلیپی نسبتیں۔ ایک خط مستقیم پر چار نقطے دئے ہوئے ہیں، اگر ان کو مختلف ترتیبوں سے لیا جائے تو صریحاً مختلف چلیپی نسبتیں حاصل ہونگی، ظاہر ہے کہ کل مختلف ترتیبیں ۲۴ ہیں لیکن ان سب سے چلیپی نسبت کی مختلف قیمتیں حاصل نہیں ہوتیں ذیل کی نسبتوں کی قیمتیں لکھنے سے اس امر کی آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے کہ

(اب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا)

اور اسی طرح سے باقی ترتیبوں کی صورت میں۔

لہذا مختلف ترتیبوں سے صرف ۲۴ ÷ ۴ یعنی ۶ مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ہم دیکھینگے کہ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے تعلق

رکھتی ہیں۔

تمہیدیہ ۔ اگر علامتوں کو ملحوظ رکھا جائے تو اس کی آسانی سے تصدیق ہوسکتی ہے کہ

$$\text{اج} \times \text{ب د} + \text{اب} \times \text{د ج} + \text{اد} \times \text{ج ب} = 0$$

کیونکہ یہ رقم $= (\text{اد} + \text{دج})\,\text{ب د} + (\text{اد} + \text{د ب})\,\text{د ج} + \text{اد} \times \text{ج ب}$

$$= \text{اد}\,(\text{ب د} + \text{د ج} + \text{ج ب}) + \text{د ج}\,(\text{ب د} + \text{د ب}) = 0$$

کیونکہ $\text{ب د} + \text{د ج} + \text{ج ب} = \text{ب د} + \text{د ب} = 0$

$$\text{اب}\ (\text{اد ب ج}) = \frac{\text{اد} \times \text{ب ج}}{\text{اج} \times \text{ب د}} = \frac{1}{(\text{اج ب د})} \quad \cdots\cdots (۱)$$

$$(\text{اب ج د}) = \frac{\text{اب} \times \text{ج د}}{\text{اد} \times \text{ج ب}} = \frac{\text{اب} \times \text{د ج}}{\text{اد} \times \text{ب ج}} \quad \cdots\cdots (۲)$$

$$\therefore\ (\text{اج ب د}) + (\text{اب ج د}) = \frac{\text{اج} \times \text{ب د} + \text{اب} \times \text{د ج}}{\text{اد} \times \text{ب ج}} = 1$$

(بموجب تمہیدیہ بالا)

یا $(\text{اب ج د}) = 1 - (\text{اج ب د})$

اور اسی طرح سے دوسری ترتیبوں کے لئے طالب علم کو بطور مشق کے اس کی تصدیق کرنی چاہئے کہ اگر (اج ب د) کی قیمت لہ کے مساوی ہو تو باقی پانچ نسبتوں کی قیمتیں

$$\frac{1}{\text{لہ}}\ ،\ 1-\text{لہ}\ ،\ \frac{1}{1-\text{لہ}}\ ،\ \frac{\text{لہ}}{\text{لہ}-1}\ ،\ \frac{\text{لہ}-1}{\text{لہ}}$$ ہونگی۔

۲۸۴ ۔ مثالیں ۔ اگر ا، ب، ج، د ایک دائرہ کے محیط پر ثابت نقطے ہوں اور و اس دائرہ پر کا کوئی اور نقطہ ہو تو چلیپی نسبت و (اج ب د) و کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ زوایا اوج، ج و ب، ب و د اور د و ا کی قیمتیں و کے مقام پر موقوف نہیں ہیں۔ (دیکھو

(اقلیدس م ۳، ش ۲۱)۔

دائرہ کی تطلیل ایک مخروطی تراش میں کرنے سے ہمیں یہ نہایت اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ مخروطی پر کے چار ثابت نقطوں کو اس پر کے کسی اور نقطہ سے ملانے سے جو پنسل حاصل ہوتی ہے اُس کی چلیپی نسبت کی قیمت مؤخر الذکر نقطہ کے ہر مقام کے لئے وہی رہتی ہے۔

نیز اگر ایک مخروطی کے چار ثابت مماس کھینچے جائیں تو کسی پانچویں مماس پر ان کے نقاطِ تقاطع سے جو صف بنے گی اُسکی چلیپی نسبت مستقل ہوگی۔

فرض کرو کہ ایک معلومہ دائرہ پر چار ثابت نقطے ا، ب، ج، د ہیں اور ان پر کے مماس کسی اور نقطہ ق پر کے مماس کو نقاط ل، م، ن، ر پر قطع کرتے ہیں، اگر دائرہ کا مرکز و ہو تو

$$\angle \text{ل و م} = \angle \text{ل و ق} - \angle \text{م و ق} = \tfrac{1}{2} \angle \text{ا و ق}$$

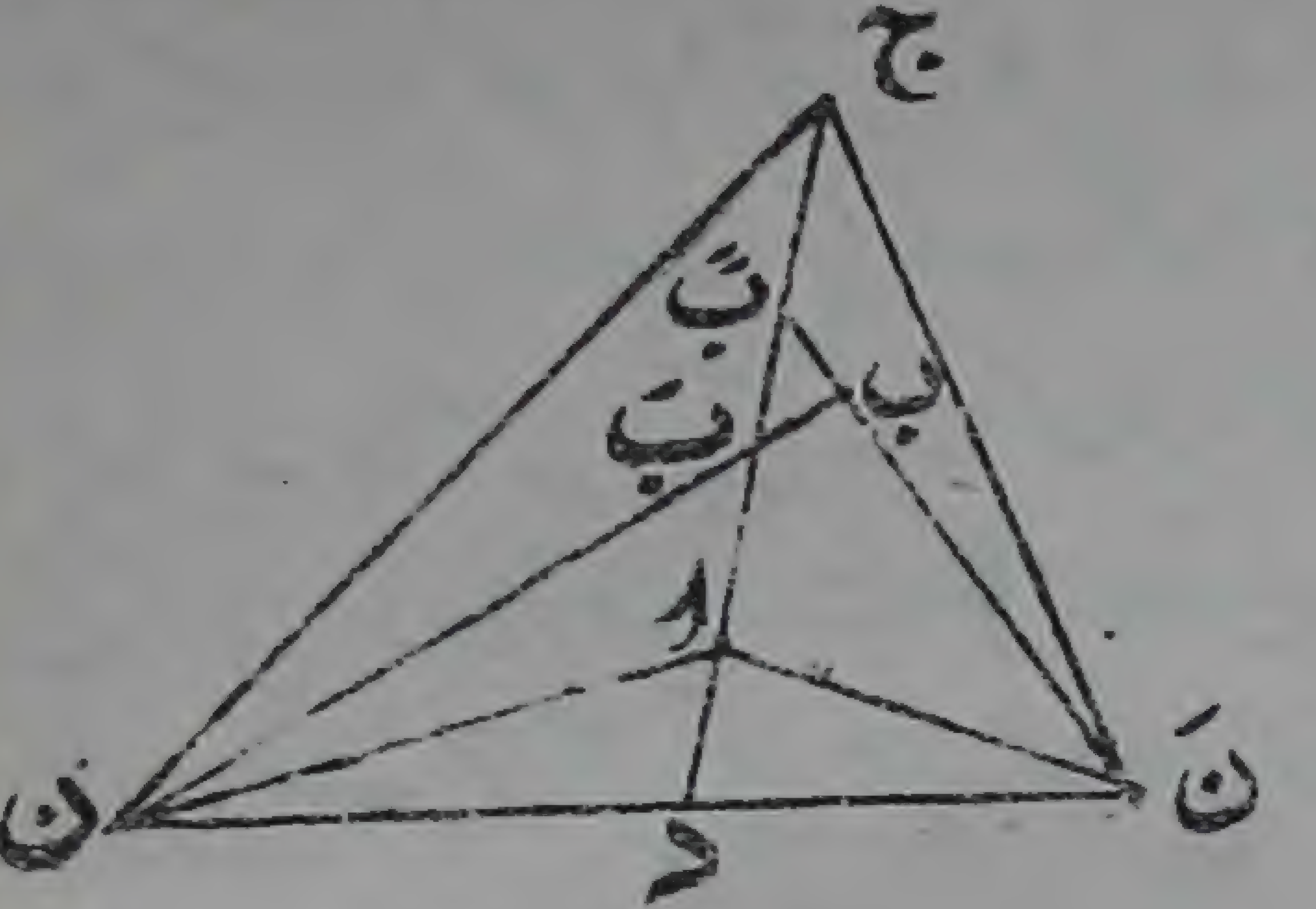
$$- \tfrac{1}{2} \angle \text{ب و ق} = \tfrac{1}{2} \angle \text{ا و ب}$$ اور اس لئے

مستقل ہے۔

پس پنسل و (ل م ن ر) کے زاویے مستقل ہیں، اس لئے پنسل کی چلیپی نسبت مستقل ہے، لہٰذا صف کی چلیپی نسبت بھی مستقل ہے۔ تطلیل کے ذریعہ مسئلہ کی توسیع مخروطی تراشوں کی صورت میں بھی ہو سکتی ہے۔

۲۸۵ - اگر دو پنسلوں کی چلیپی نسبتیں مساوی ہوں اور ان کی ایک شعاع مشترک ہو تو دونوں جٹوں کی باقی تین تین شعاعوں میں سے متناظر شعاعوں کے نقاطِ تقاطع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں گے۔

فرض کرو کہ پنسلیں ن (نَ ا ب ج) اور نَ (ن ا ب ج) ہیں اور ن نَ ان کی مشترک شعاع ہے۔



شکل ۱۰۳

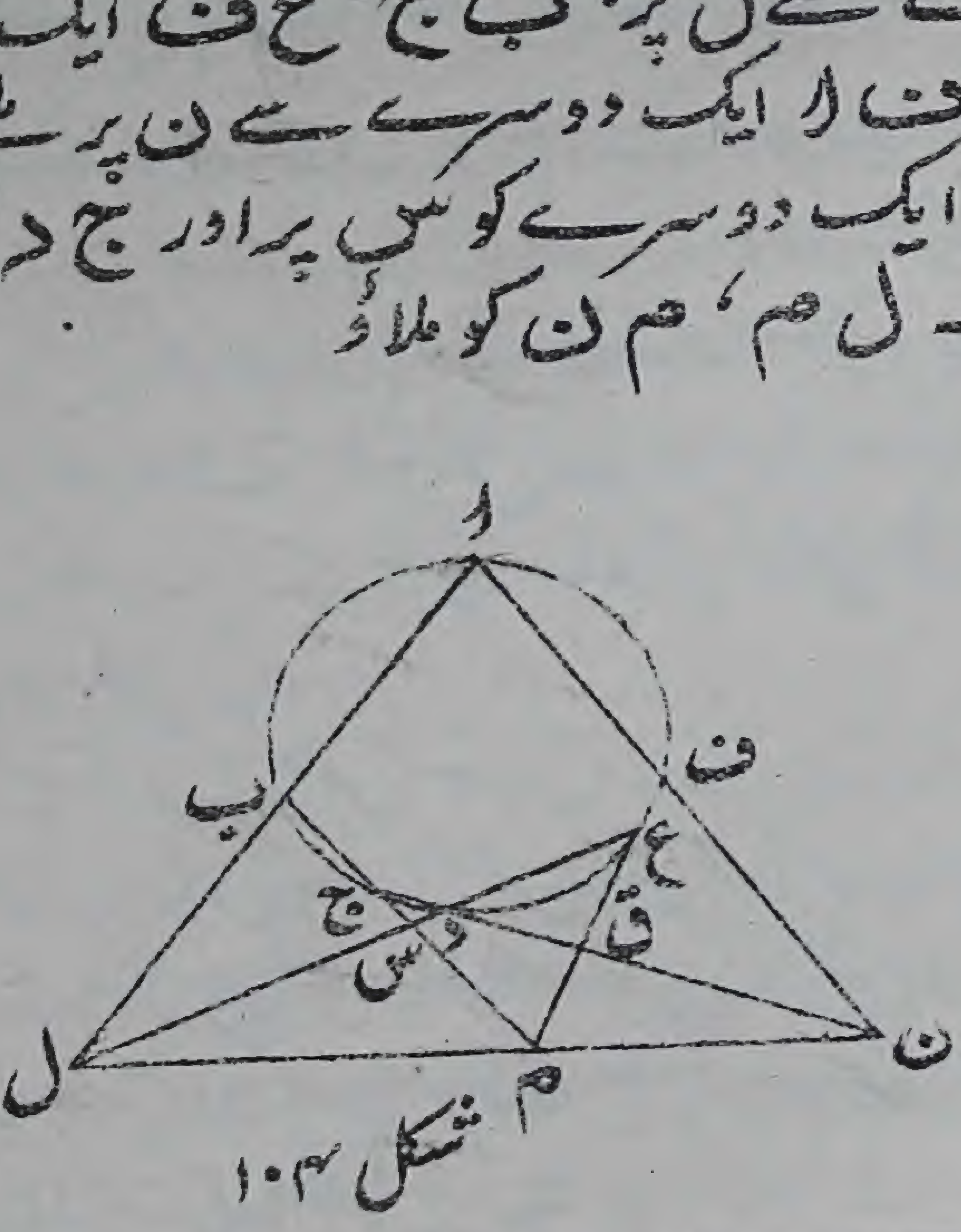
نیز متناظر شعاعوں کے نقاطِ تقاطع اَ ب، ج ہیں، اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اَ ج، نَ ب اور ن ب کو دو مختلف نقاط ب، بَ پر کاٹتا ہے نیز فرض کرو کہ ا ج، ن نَ سے د پر ملتا ہے، تب چونکہ پنسلوں کی چلیپی نسبتیں مساوی ہیں، اس لئے

(د ا ب ج) = (د ا بَ ج)

جو ناممکن ہے تاوقتیکہ ب اور بَ ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔

۲۸۶ — پاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ یا مخروطی کے اندر کسی شکل کا مسدس بنایا جائے تو مقابل کے اضلاع کے نقاطِ تقاطع ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ع ف مسدس ہے، اور ا ب، د ع ایک دوسرے سے ل پر، ب ج، ع ف ایک دوسرے سے م پر، ج د، ف ا ایک دوسرے سے ن پر ملتے ہیں، نیز فرض کرو کہ ب ج، د ع ایک دوسرے کو س پر اور ج د، ع ف، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ل م، م ن کو ملاؤ



شکل ۱۰۴

غیر موسیقی نسبت م (ل ج د ع) = (ل س د ع) = ب (ل س د ع)
= ب (ا ج د ع)

اسی طرح سے م (ن ج د ع) = (ن ج د ق) = ف (ن ج د ق)
= ف (ا ج د ع)

لیکن ب (ا ج د ع) = ف (ا ج د ع)

∴ م (ن ج د ع) = م (ل ج د ع)

لیکن چونکہ تین شعاعیں م ج، م د، م ع دونوں نسبتوں میں متطابق ہیں، اس لئے م ل اور م ن بھی متطابق ہوں گے لہذا ل، م، ن ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔

پاسکل کے مسئلہ سے ہمیں محض پٹری کے ذریعہ پانچ معلومہ نقطوں میں سے ایک مخروطی کھینچنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج، د، ع مفروضہ نقطے ہیں، تب شکل ۱۴۰ میں اگر ع میں سے گزرنے والا کوئی خط مخروطی سے دوبارہ ف پر ملے تو ا ب، د ع اور ب ج، ع ف اور ج د، ف ا کے نقاطِ تقاطع ایک ہی خط پر واقع ہوں گے۔

پس نقطہ ف معلوم کرنے کا عمل یہ ہے۔

ا ب اور د ع کو اتنا خارج کرو کہ وہ ایک دوسرے سے ل پر ملیں، اور فرض کرو کہ ب ج، ع میں سے گزرنے والے خط سے م پر ملتا ہے، ل م کو ملا کر خارج کرو اور فرض کرو کہ ل م ممدودہ ج د ممدودہ سے ن پر ملتا ہے، تب ن ا اور م ع ممدودہ کا نقطۂ تقاطع ف مخروطی پر کا نقطہ ہوگا۔

چونکہ ع میں سے کئی خط کھینچے جا سکتے ہیں اس لئے ہم منحنی پر کے کئی نقطے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ان میں سے مخروطی کھینچ سکتے ہیں۔

دریچا۔ اگر ایک خط و لا پر نقطوں کے تین زوج ا، اَ اور ب، بَ

اور ج، جَ ایسے ہوں کہ

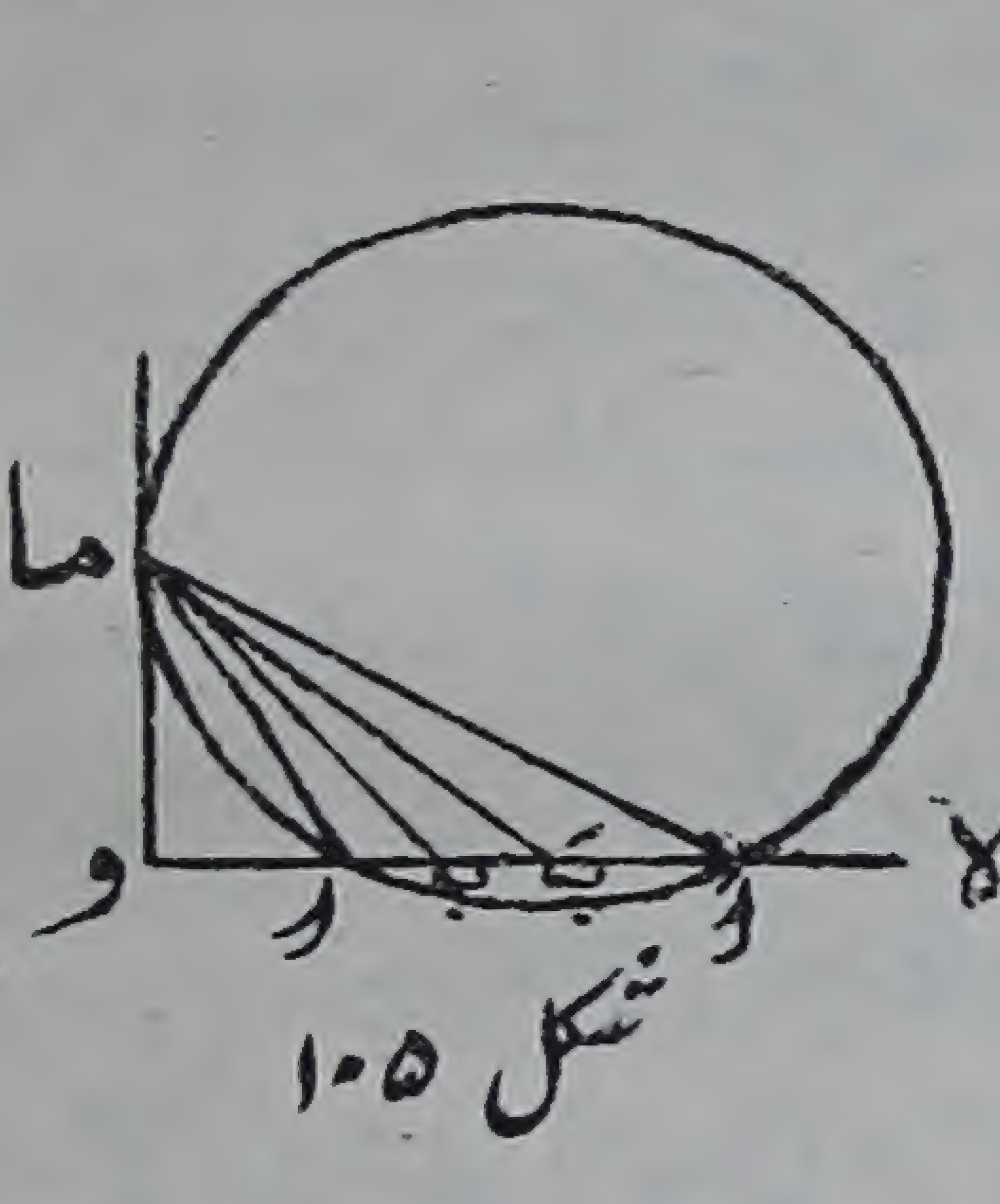
و ا × و اَ = و ب × و بَ = و ج × و جَ = ک²

تو اِن چھ نقطوں میں سے کسی چار کی چلیپی نسبت اِن نقطوں کے چار مزدوج نقطوں کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

و لا پر عمود و ما ایسا کھینچو کہ و ما² = ک² (دیکھو شکل ۱۰۵)

تب و ما² = و ا × و اَ اس لئے دائرہ ا ما اَ، و ما کو مس کرتا ہے، لہٰذا

∠ و ما ا = ∠ و اَ ما



شکل ۱۰۵

اسی طرح سے

∠ و ما ب = ∠ و بَ ما

لہٰذا تفریق کرنے سے

∠ ا ما ب = ∠ اَ ما بَ

اسی طرح سے ∠ ب ما ج = ∠ بَ ما جَ وغیرہ وغیرہ، پس پنسل ما (ا ب ج جَ) کے زاویے بالترتیب پنسل ما (اَ بَ جَ ج) کے زاویوں کے مساوی ہیں، پس اِن پنسلوں کی چلیپی نسبتیں اور اسلئے اُن کی صفوں کی چلیپی نسبتیں باہم مساوی ہیں۔

ظاہر ہے کہ نقاط ا، اَ اور ب، بَ اور ج، جَ ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز و ہے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔

نقاط ا، اَ، .... وغیرہ دریچا کا ایک نظام بناتے ہیں جس کا مرکز و ہے، اگر و لا پر و کے دونوں جانب دو نقاط ف، فَ ایسے

ئے جائیں کہ و ف^2 = و ق^2 = ک^2 تو ف، فَ دو پیچا کے ماسکے کہلاتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ اگر (ا ب ج د) = -۱ تو ثابت کرو کہ (ا ج ب د) = ۲ اور (ا ج د ب) = $\frac{1}{2}$

۲۔ اگر پنسل و (ا ج ب د) = ۱ تو ثابت کرو کہ پنسل کی دو شعاعیں ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں (دفعہ ۲۸۲ کو استعمال کرو)

۳۔ اگر ا ب، ج د کو قطر مان کر دائرے کھینچے جائیں جو ایک دوسرے کو زاویہ طہ پر قطع کریں، تو ثابت کرو کہ نقاط ا، ب، ج، د کی صفوں کی چھ چلیپی نسبتیں یہ ہیں

یس^2 طہ/۲، قط^2 طہ/۲، جب^2 طہ/۲، یم^2 طہ/۲، جم^2 طہ/۲، قم^2 طہ/۲

۴۔ اگر دو خط ایک دوسرے سے نقطہ و پر ملیں اور ان پر تین تین نقطے ا، ب، ج اور اَ، بَ، جَ ایسے ہوں کہ (و ا ب ج) = (و اَ بَ جَ) تو ثابت کرو کہ خطوط ا اَ، ب بَ، ج جَ متراکز ہیں۔

۵۔ ناقص لا^2 + ۴ ما^2 = ۱۰۰ پر چار نقاط ا، ب، ج، د ہیں جن کے محدد بالترتیب (۱۰، ۰)، (۰، -۵)، (-۸، -۳)، (-۱۰، ۰) ہیں، اگر ن ناقص پر کوئی اور نقطہ ہو تو پنسل ن (ا ب ج د) کی چلیپی نسبت دریافت کرو۔

۶۔ ایک خط مستقیم پر چار نقطے ا، ب، بَ، اَ دئے ہوئے ہیں، ایک اور نقطہ ن کا طریق دریافت کرو جبکہ زاویے ا ن ب اور بَ ن اَ مساوی ہوں۔

سوالات کے پرچے

پرچہ سوالات ۱

۱- اگر ایک نقطہ کو نقطہ (ن، ق) سے ملایا جائے تو اس ملانے والے خط کی تنصیف خط ل لا + م ما + ن = ۰ زاویہ قائمہ پر کرتا ہے، اول الذکر نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

۲- ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے دو معلومہ ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے اور $۲\,\text{ج}^2$ کے مساوی ہوتا ہے، ثابت کرو کہ طریق ایک ناقص ہے، اس کے ماسکوں کا مقام اور اس کا خروج المرکز معلوم کرو۔

۳- ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کے کسی نقطہ پر کا مماس ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=\text{ک}$ (ک > ۱) سے جن نقطوں پر ملتا ہے وہ نقطۂ تماس سے متساوی الفصل ہیں۔

۴- ایک نقطۂ معلومہ سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو محور اعظم سے زاویے طہ_1، طہ_2، طہ_3، طہ_4 بناتے ہیں، اگر اس نقطہ کو ناقص کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط محور کے ساتھ زاویہ طہ

بنائے تو ثابت کرو کہ

مس طہ + مس طہ + مس طہ + مس طہ = ۴ مس طہ

۵۔ جہاں مکافی کا مرتب محور سے ملتا ہے اُس نقطہ کو مرکز اور وترِ خاص کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ بلحاظ اس دائرہ کے مکافی کے مماس کے قطب کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنی لا² + ۲ لا ما − ما² − ۲ لا − ۲ ما = ۰ کے متقارب لا + ما − ۱ = ± ۲√۲ ما ہیں، منحنی کو مرتسم کرو۔

۷۔ ایک متغیر دائرہ ایک ثابت خط مستقیم اور ایک ثابت دائرہ دونوں کو مس کرتا ہے، اس کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۸۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں ج ن، ج ق کے طول اَ، بَ ہیں اور محور لا کے ساتھ ان کے میلان طہ، طہ ہیں، ثابت کرو کہ اَ² جب ۲ طہ + بَ² جب ۲ طہ = ۰

۹۔ ایک معلومہ خط مستقیم کے کسی نقطہ سے ایک مخروطی تراش کے مماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان کے نقاط تماس سے خط مذکور پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ عمودوں کے متکافیوں کا مجموعہ یا فرق مستقل ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{1}{\text{لا} + \text{ما} - \text{ا}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{ما} + \text{ا}} + \frac{1}{\text{ما} - \text{لا} + \text{ا}} = 0$$

ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

پرچۂ سوالات ۲

۱۔ ایک مثلث کے دو راسوں سے ایک نقطہ کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ہمیشہ مساوی ہوتا ہے تیسرے راس سے اسکے فاصلہ کے

مربع کے، اس نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۲- اگر خط مستقیم لہ لا + مہ ما + سہ = ۰ مکافی ما² - ۴ن لا + ۴ن ق = ۰ کو مس کرے تو ثابت کرو کہ لہ² ق + لہ سہ - ن مہ² = ۰۔

۳- ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے مماس اُن نقطوں سے کھینچے گئے ہیں جو ناقص $\frac{لا^2}{ا^4} + \frac{ما^2}{ب^4} = \frac{۱}{ا^2} + \frac{۱}{ب^2}$ پر واقع ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ مماسوں کے نقاط تماس کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۴- اگر ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر دو نقطے $(لا_1، ما_1)$ اور $(لا_2، ما_2)$ ہوں جن پر کے مماس (لا، ما) پر اور عماد (ضا، عا) پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$ا^2 ضا = ز^2 لا لا_1 لا_2 \quad اور \quad ب^2 عا = ز^2 ما ما_1 ما_2$$

جہاں ز خروج المرکز ہے۔

۵- جس ناقص کی مساوات لا² + ۳ لا ما + ۴ ما² - ۲۸ لا - ۵۶ ما + ۱۹۶ = ۰ ہے اس کے مرکز کے محدد اور رقبہ معلوم کرو۔

۶- ثابت کرو کہ محددوں کے محور زاویہ کے منحنی کے مماس ہیں اور مرکز کو مبدأ سے ملانے والا خط وتر تماس کی تنصیف کرتا ہے۔

۷- ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے ایک نقطہ پر جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے عماد کھینچا گیا ہے اور عماد کے کسی نقطہ سے ناقص کے دو اور عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ موخر الذکر عمادوں کے متناظر مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ذیل کا زائد ہے

ب لا جب عہ + ا ما جم عہ + لا ما = ۰۔

۸- مخروطیوں کے ایک نظام کا وہی ماسکہ ہے اور وہی مرتب۔ اُن نقطوں کا طریق معلوم کرو جن پر کے مماس ایک معلومہ خط کے متوازی ہوں۔

۹- ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ پر کے دو نقطوں کے معینوں کا مجموعہ ب ہے، ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے وتر کے قطب کا طریق

$\text{ب}^2\,\text{لا}^2+\text{ا}^2\,\text{ما}^2=2\,\text{ا}^2\,\text{ب}\,\text{ما}$ ہے۔

۱۰- ایک مخروطی پر جس کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لہ}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{لہ}}=1$ ہے ایک ایسا نقطہ ن لیا گیا ہے کہ ن پر کا عماد ایک ثابت نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ ن ذیل کے منحنی پر واقع ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ما}-\text{ک}}+\frac{\text{ما}}{\text{لا}-\text{ھ}}=\frac{\text{ا}^2-\text{ب}^2}{\text{ھ}\,\text{ما}-\text{ک}\,\text{لا}}$$

پرچہ سوالات ۳

۱- وہ شرائط معلوم کرو کہ مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما}+\text{ج}\,\text{ما}^2+\text{د}\,\text{لا}+\text{ع}\,\text{ما}+\text{ف}=0$$

ایک خط مستقیم کو تعبیر کرے۔

۲- دائرہ $\text{ر}^2-3\,\text{ر}\,(\text{جم طہ}+\sqrt{3}\,\text{جب طہ})+5=0$ کا نصف قطر اور نیز اس کے مرکز کے قطبی محدد معلوم کرو۔

۳- ایک ناقص کی مساوات بلحاظ قائم محوروں کے

$$(\text{ا}_1^2+1)\,\text{لا}^2+2\,(\text{ا}_1+\text{ج}_1)\,\text{لا}\,\text{ما}+(\text{ج}_1^2+1)\,\text{ما}^2=\text{ف}_1$$

ہے۔ ناقص کا رقبہ دریافت کرو۔

۴- ناقصوں $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}=1$ کا ایک مشترک مماس معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہہ مماس اُس متوازی الاضلاع

کے ایک قطر کے متوازی ہے جس کے اضلاع ناقصوں کے مرتب ہیں۔

۵۔ اگر ا^2 > ۸ ب^2 تو ثابت کرو کہ ایک ایسا نقطہ معلوم ہو سکتا ہے جس سے اگر ما^2 - ۴ ا لا = ۰ کے دو مماس کھینچے جائیں تو یہ مماس لا^2 - ۴ ب ما = ۰ کے عماد ہوں۔

۶۔ ذیل کے منحنیوں کو مرتسم کرو:-

(۱) ما^2 + ۲ لا ما + لا^2 + ما - ۳ لا + ۱ = ۰۔

(۲) ۵ لا^2 - ۶ لا ما + ما^2 - ۲ ما - ۲ لا + ۱ = ۰۔

۷۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ پر دو نقطے ہیں جن کے خارج المرکز زاوئے ھ اور یہ ہیں۔ ان نقطوں کو ناقص کے مرکز کے ساتھ ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۸۔ ایک ناقص کا مرکز ایک معلومہ نقطہ و ہے اور ناقص تین دئے ہوئے نقطوں ا، ب، ج میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ

$$\frac{۴\,\pi\ \text{ل م ن}}{۸\sqrt{(\text{ل}+\text{م}+\text{ن})(\text{م}+\text{ن}-\text{ل})(\text{ن}+\text{ل}-\text{م})(\text{ل}+\text{م}-\text{ن})}}$$

ہے جہاں ل، م، ن بالترتیب مثلثوں ب و ج، ج و ا، ا و ب کے رقبوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

۹۔ منحنی ۲ لا^2 + لا ما + ما^2 = ۴ ا لا کو مرتسم کرو اور اس پر بحث کرو، نیز بتاؤ کہ مخروطی ۲ لا ما = ا (لا + ما) بلحاظ مخروطی ۲ لا ما = ا^2 کے کیسے واقع ہے۔

۱۰۔ ایک قطع مکافی جس کا محور ایک دئے ہوئے ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور جس کا وترِ خاص اس کے محور اصغر کے $\frac{۳}{۵}$ کے مساوی ہے اس ناقص کو اس کے محور اصغر کے سرے پر مس کرتا ہے۔ قطع مکافی کی مساوات اور نیز ان منحنیوں کے وتر تقاطع کی مساوات

معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۴

۱۔ خطِ مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ اور دائرہ $۵\,(\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ب لا} + \text{ا ما}) = ۹\,\text{ا ب}$ کے نقاط تقاطع کو مبدأ کے ساتھ ملانے سے خطوطِ مستقیم کا جو زوج حاصل ہوتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔ نیز اسکے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ خطوط مستقیم علی القوائم ہوں۔

۲۔ دو دائروں کی مساواتیں

$$(\text{لا} - \text{ا})^۲ + (\text{ما} - \text{ب})^۲ = \text{ج}^۲$$

اور $(\text{لا} - \text{ب})^۲ + (\text{ما} - \text{ا})^۲ = \text{ج}^۲$

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے باہم مس کرنے کی شرط $۲\,\text{ج}^۲ = (\text{ا} - \text{ب})^۲$ ہے۔

۳۔ ایک ناقص کا محور اصغر ص صَ ہے۔ اس کا ایک ماسکی وتر ن ق ہے، ثابت کرو کہ ص ن اور صَ ق کے تقاطع کا طریق قطع زائد ہے۔

۴۔ ایک نقطہ م سے کسی ناقص کے دو مماس م ن اور م ق کھینچے گئے ہیں۔ اگر م کے محدد (ھ، ک) ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث م ن ق کا رقبہ

$$\text{ا ب}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ک}^۲}{\text{ب}^۲} - ۱\right)^{\frac{3}{2}} \Big/ \left(\frac{\text{ھ}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ک}^۲}{\text{ب}^۲}\right)$$ ہے۔

۵۔ اگر قطع مکافی کے دو عماد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ایک عماد کا جو حصہ منحنی سے قطع ہوتا ہے وہ دوسرے عماد سے نسبت ۳ : ۱ میں تقسیم ہو جاتا ہے۔

۶- منحنی ۸ لا² - ۲ لا ما - ۱۵ ما² + ۶ لا + ۴۶ ما - ۳۵ = ۰ کو مرتسم کرو

۷- ثابت کرو کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے اگر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے دو مماس کھینچے جائیں تو اِن کا درمیانی زاویہ نقاطِ تماس کے خارج المرکز زاویوں کے فرق کے مساوی ہو ذیل کے دو منحنیوں میں سے ایک ہو گا

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}} = \text{ا} + \text{ب} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}} = \text{ا} - \text{ب}$$

۸- ثابت کرو کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے مزدوج قطروں کے سروں کو ملانے والے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \frac{1}{2}$ ہے۔

۹- ایک ناقص پر دو نقطے ن اور ق ایسے لئے گئے ہیں کہ ن پر کے عماد کا قطب ق پر کے عماد پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن اور ق کا تعلق متکافی ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر ن اور ق پر کے عمادوں کا نقطۂ تقاطع ک ہو تو ک کو وتر ن ق کے قطب کے ملانے والا خط ک کے قطبی کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

۱۰- ایک مثلث کے ایک ضلع کا م گنا اور دوسرے ضلع کا ن گنا ملکر ج کے مساوی ہوتے ہیں۔ نیز اس کا راسی زاویہ عہ بلحاظ مقام کے معلوم ہے اس کے بیرونی دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۵

۱- اگر ا + ھ لا + ا لا² + ب لا ما + ج ما² = ۰ سے دو حقیقی خطوط مستقیم تعبیر ہوں تو ثابت کرو کہ ج لاز ما² منفی ہو گا، نیز ھ کی قیمت ا، ب، ج کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۔ وہ دائرہ معلوم کرو جو (۴، ۰)، (۵، ۰) میں سے گزرے اور طہ = عہ کو مس کرے۔

۳۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے دو علی القوائم ماسکی وتر کھینچے گئے ہیں اور ہر وتر کے وسطی نقطہ سے اس وتر پر ایک خط عمود وار کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِن خطوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق

ما^2 = ۲ ا (لا - ۵ ا) ہے۔

۴۔ ایک ناقص کے وتر کے محاذی مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ وتر ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۵۔ مزدوج قطروں کے سروں ن اور ق پر کے عماد محور اعظم سے گ، گَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

ن گ^2 + ق گَ^{2} = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ (ا^2 + ب^2)

۶۔ ناقص کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ان کے نقاطِ تماس کے خارج المرکز زاویوں کا حاصل جمع مستقل ہے، ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۷۔ ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سرے ن اور ق ہیں، اگر ن پر کا مماس س ن کے ساتھ زاویہ طہ بنائے اور ق پر کا مماس س ق کے ساتھ زاویہ فہ بنائے تو ثابت کرو کہ ہم^2 طہ + ہم^2 فہ مستقل ہے۔

۸۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۱، ۰)، (۲، ۳)، (۳، -۱) میں سے گزرے۔ نیز دکھاؤ کہ یہ دائرہ خطِ مستقیم لا - ما = ۰ سے جو حصہ قطع کرتا ہے اس کا طول تقریباً ۳٫۳۹ ہے۔

۹۔ اگر ایک دائرہ کے کسی وتر کے محاذی ایک نقطہ معلومہ پر زاویہ قائمہ بنے تو ثابت کرو کہ وتر مذکور ایک مخروطی تراش کو لمس کرتا ہے۔

۱۰۔ دو مکافیوں ما^2 = ۴ ا (لا - ل) اور لا^2 = ۴ ا (ما - ل) میں

ل، لَ دونوں متغیر ہیں، یہ مکافی اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ان کے نقطۂ تماس کا طریق دریافت کرو۔

پرچہ سوالات ۶

۱- ا ب ج ایک ایسا مستوی مثلث ہے جس میں مس ا مس $\frac{ب}{۲}$ = ۲ ج کا طریق معلوم کرو جبکہ ا ب ثابت ہو۔

۲- ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں حسب ذیل ہیں

رجم طہ − ج = ۰

رجم (طہ − $\frac{\pi}{۶}$) − $\frac{ج}{۲}$ = ۰

رجم طہ + رجب طہ + ۲ ج = ۰

اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۳- ما² = ۴ ا لا اور لا² = ۴ ب ما دو مکافی ہیں، ان کے مشترک مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۴- ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم سے گ پر ملتا ہے، ن پر کے مماس پر مرکز ج سے عمود ج ما کھینچا گیا ہے، ج گ کا وسطی نقطہ و ہے اور محور اصغر کا ایک سرا ص ہے، ثابت کرو کہ

و ن = و ما = و ص

۵- ذیل کی مخروطیوں ۳ لا² ± ۲ لا ما + ۳ ما² = ۸ کو مرتسم کرو اور یہ دکھاؤ کہ ان میں سے ہر ایک کے ما سکے دوسری پر واقع ہوتے ہیں، نیز دکھاؤ کہ چار نقطے ایسے ہیں جن میں سے یہ دونوں مخروطیاں گزرتی ہیں۔

۶- مکافی پر کے ایک نقطہ (عہ، بہ) سے منحنی کے دو عماد کھینچے گئے ہیں جو منحنی سے نقاط (عہَ، بہَ)، (عہً، بہً) پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

بَہ بہً (عہَ - عہً) + بہً بہ (عہً - عہ) + بہ بہَ (عہ - عہَ) = ۰

۷- ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے مزدوج قطروں کے سروں پہ مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع کا طریق

ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۲$ ہے۔

۸- ثابت کرو کہ مساوات $(\text{ا ما} - \text{ب لا})^2 + \text{ک} (\text{لا} - \text{ا}) (\text{ما} - \text{ب}) = ۰$ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، نیز یہ دونوں خط زائد $\text{لا ما} - \frac{1}{4}\text{ک} = ۰$ کو مس کرتے ہیں۔

۹- ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^4 + ۷ \text{لا}^3 \text{ما} + ۱۵ \text{لا}^2 \text{ما}^2 + ۷ \text{لا ما}^3 - ۶ \text{ما}^4 = ۰$ سے جو چار خط تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۰- ایک مثلث کا قاعدہ معلوم ہے اور اس کے باقی دو ضلعوں کی سطح کو ان کے مربعوں کے مجموعہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ بھی معلوم ہے مثلث کے رأس کا طریق معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۷

۱- نقطہ (ھ، ک) سے خط $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ پر جو عمود کھینچ سکتا ہے اُس کی مساوات دریافت کرو اور خطوط کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۲- ثابت کرو کہ سوال ۱ میں جو خطوط ہیں ان کے نقطۂ تقاطع کا فاصلہ (ھ، ک) سے

$\{(\text{ا ھ} + \text{ب ک} + \text{ج})^2 + (\text{ا} + \text{ب})^2 (\text{ھ} - \text{ک})^2\}^{\frac{1}{2}} / (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{1}{2}}$ ہے

۳- ایک دائرہ کا مرکز اُس خطِ مستقیم پہ واقع ہے جو محوروں کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے اور دائرہ خطوط $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ اور

و لا + ب ما + د = ۰ کو مس کرتا ہے، دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ ایک مکافی کا راس ا ہے اور ن، ق اس پر کے دو نقطے ہیں، ن اور ق میں سے گذرنے والے قطر اق اور ان سے بالترتیب ی اور و پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ی و مکافی کے محور پر عمود ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ دو مکافی ما^2 = ۸ ا لا اور لا^2 = ۲۷ ا ما ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں زاویہ قائمہ پر اور ایک ایسے زاویہ پر جس کا مماس $\frac{۹}{۱۳}$ ہے۔

۶۔ ن پر کا عماد ق پر کے مماس سے محور اصغر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2(\text{ا}^2-۲\text{ب}^2)}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^4}=\frac{۱}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}$ کو مس کرتا ہے۔

۷۔ مرتبے سے مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے مماس کھینچے گئے ہیں، ان کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

۸۔ زائد کے محیط پر ایک متغیر نقطہ ہے اور دو ثابت نقطے ہیں، متغیر نقطہ کو ثابت نقطوں کے ساتھ دو خطوط کے ذریعہ ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ ملانے والے خطوط کے درمیان ہر ایک متقارب پر مستقل طول کا ایک حصہ کٹتا ہے۔

۹۔ ایک نقطہ ط کا قطبی بلحاظ ما^2 = ۴ ا لا کے جن نقطوں پر مکافی کو قطع کرتا ہے اُن پر مکافی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو مکافی پر ہی قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ط کا طریق ما^2 (لا + ۲ا) + ۴ا = ۰ ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ایسے وتروں کا لفافہ جن کے سامنے مبدا پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ایک مخروطی تراش ہے جس کا ماسکہ مبدا ہے اور جس کا مرتب مبدا کا قطبی ہے۔

پرچہ سوالات ۸

۱۔ مساوات ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ سے متساوی الفصل ہیں، ثابت کرو کہ

ف^2 - گ^2 = ج (ب ف^2 - ا گ^2)

۲ - دو دائرے محور ما کو مس کرتے ہوئے نقاط (ا، ۵ ا) اور (۴ ا، ۲ ا) میں سے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو زاویہ

س$^{-1}$ $\frac{۴}{۳}$ پر قطع کرتے ہیں۔

۳ - ایک مکافی کے دو مماس ق ل۱ اور ق ل۲ ہیں اور ماسکہ سے ان پر عمود س ما۱، س ما۲ نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

س ما۱ × س ما۲ ایسے بدلتا ہے جیسے س ق۔

۴ - نقطہ (لا، ما) سے ناقص $\frac{لا^2}{ا^2}$ + $\frac{ما^2}{ب^2}$ = ۱ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ

س$^{-1}$ {۲ ا ب $\sqrt{\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱}$ / (لا^2 + ما^2 - ا^2 - ب^2)}

ہے۔

۵ - ایک مکافی کے تین ایسے عماد کھینچے گئے ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے نہیں گذرتے، ثابت کرو کہ ان عمادوں کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ

$\frac{۱}{۲}$ ا^2 (م + مَ + مً)^2 (م - مَ) (مَ - مً) (مً - م)

ہے جہاں ۴ ا مکافی کا وترِ خاص ہے اور م، مَ، مً اُن زاویوں کے مماس ہیں جو عماد منحنی کے محور کے ساتھ بناتے ہیں۔

۶ - ایک مخروطی کی مساوات لا^2 - ۴ لا ما + ما^2 + ۶ لا = ۶ ہے، ثابت کرو کہ یہ زائد ہے، اس کا مرکز، اس کے نیم محوروں کا طول اور سمت اور اس کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو۔

۷- مکافی ما۲ = ۴ ا لا کے اندر ایک نقطہ (لاَ، ماَ) ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے گذرنے والے وترجن کی تقسیم یہاں پر نسبت لہ : ۱ سے ہوتی ہے، مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

۴ {ماَ (ما - ماَ) - ۲ ا (لا - لاَ)}۲ لہ + (ما - ماَ)۲ (ماَ۲ - ۴ ا لاَ) (لہ - ۱)۲ = ۰

۸- اگر ناقص کے ایک وتر کے سامنے ماسکہ پر مستقل زاویہ ہے تو ثابت کرو کہ وتر ایک ایسی مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ اور مرتب دونوں وہی ہیں جو اصلی ناقص کے۔

۹- دو مکافیوں کا راس ایک ہی ہے اور ان کے محور علی القوائم ہیں، اس نقطہ کا طریق معلوم کرو جس سے اگر ایک مکافی کا مماس کھینچا جائے تو وہ دوسرے مکافی کے ایک مماس کے ساتھ جو اسی نقطہ سے کھینچا گیا ہو زاویہ قائمہ بنائے۔

۱۰- ا ب ج د، ا ع ف گ دو مربعے ہیں، ع ا د پر واقع ہے اور گ، ب ا ممدودہ پر جبکہ اسے ا میں سے خارج کیا جائے، اگر ف ع ممدودہ ب ج سے ھ پر ملے تو ثابت کرو کہ ا ھ، گ ج اور ف د ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

پرچہ سوالات ۹

۱- ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، ثابت کرو کہ (لا، ما) سے جو عمود ان خطوں پر کھینچ سکتے ہیں ان کا حاصل ضرب = ف (لا، ما) ÷ √((ا - ب)۲ + ۴ ھ۲) ہے

۲- ایک نقطہ سے دو معلومہ دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ باہم مستقل نسبت رکھتے ہیں، اس نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۳- دو نقاط (ر۱، طہ۱) اور (ر۲، طہ۲) کے ملانے والے خط پر نقطہ

(لـہ، طہ) سے عمود نکالا گیا ہے، اس کا طول معلوم کرو۔

۴۔ مخروطی $\text{لا}^2 - \text{لا ما} + \text{ما}^2 - ۷\,\text{لا} + ۸\,\text{ما} + ۱۸ = ۰$ کے مرکز کے محدد معلوم کرو، مرکز میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تبدیل کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

۵۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ پر کے کسی نقطہ ن سے محوروں پر عمود ن ل، ن م نکالے گئے ہیں، اگر مرکز سے خط ل م پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے پایہ کا طریق ہے

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{\text{قط}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{قم}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2}$$

۶۔ ثابت کرو کہ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا لا}$ کے تمام وتر جن کے سامنے راس پر مستقل زاویہ عہ بنتا ہے مخروطی

$$(\text{لا} - ۴\,\text{ا})^2 + ۴\,\text{ما}^2 + ۴\,\text{مم}^2\,\text{عہ}\,(\text{ما}^2 - ۴\,\text{ا لا}) = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ ان سب نقاط کا طریق جن پر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے محاذی ۶۰° کا زاویہ بنتا ہے $۳(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2)^2 = ۴(\text{لا}^2\text{ب}^2 + \text{ما}^2\text{ا}^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2)$ ہے۔

۸۔ ن ق مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا لا}$ کا عمادی وتر ہے اور س اس کا ماسکہ ہے ثابت کرو کہ مثلث س ن ق کے مرکز ہندسی کا طریق ہے

$$۳۶\,\text{ا ما}^2(۳\,\text{لا} - ۵\,\text{ا}) - ۸۱\,\text{ما}^4 = ۱۲۸\,\text{ا}^4$$

۹۔ ثابت کرو کہ ناقص اور امدادی دائرہ کے دو تناظر مماسوں کے درمیان بڑے سے بڑا زاویہ $\text{جب}^{-۱}\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$ ہو سکتا ہے۔

۱۰۔ حوالہ کے محوروں پر بالترتیب دو نقطے ن، ق لئے گئے ہیں جو

ایک ثابت نقطہ (ا، ب) سے متساوی الفصل ہیں، ن ق کے وسطی نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

پرچہ سوالات ۱۰

۱۔ حوالہ کے محوروں کے درمیان خط مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ پر جو حصہ کٹتا ہے اُس پر مربع بنایا گیا ہے، اس کے اضلاع کی مساواتیں اور اس کے قطروں کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۲۔ تین دائروں کے مرکز تین ثابت نقطے ہیں اور ان کے نصف قطر $\text{ا}_1 + \text{ک}$، $\text{ا}_2 + \text{ک}$، $\text{ا}_3 + \text{ک}$ ہیں، ان کے بنیادی مرکز کا طریق معلوم کرو جبکہ ک بدلے۔

۳۔ دو مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا لا}$ اور $\text{لا}^2 = ۴\,\text{ب ما}$ ایک دوسرے کو مبدأ و پر اور نقطہ ن پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ و ن اور ن پر کے مماسات کے جو میلان کسی ایک محور کے ساتھ ہیں اُن کے مماس سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، نیز جو دو مثلث ن پر کے مماسات اور کسی ایک محور کے درمیان بنتے ہیں ان کے رقبے مساوی ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ (لاَ، ماَ) سے مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا لا}$ کے تین عماد (حقیقی یا خیالی) کھینچ سکتے ہیں، نیز اگر یہ عماد حقیقی ہوں تو ان کے پایوں میں سے گذرنے والا دائرہ مکافی کے رأس میں سے گزرتا ہے اور اس دائرہ کی مساوات حسب ذیل ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \frac{\text{ما ماَ}}{۲} - (۲\,\text{ا} + \text{لاَ})\,\text{لا} = ۰$$

۵۔ اگر مخروطی $\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$ کے مزدوج قطر محور لا کے ساتھ زاوئے عہ، بہ بنائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ب مس عہ مس بہ} + \text{ھ}\,(\text{مس عہ} + \text{مس بہ}) + \text{ا} = ۰$$

۶۔ ایک ناقص کے ماسکے س، سَ ہیں اور محور اعظم کے ایک ہی

جانب اس کے محیط پر نقطے ق، قَ اس طور پر لئے گئے ہیں کہ س ق، سَ قَ باہم متوازی ہیں اور س سَ کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں، اگر اس نقطہ پر جس کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے مماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ مماس اور ق قَ ایک دوسرے سے محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۷۔ دو ثابت معلومہ سمتوں میں مکافی کے مساوی وتروں کے جوڑے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۸۔ ایک ایسے قائم زائد کے مرکز کا طریق دریافت کرو جو تین معلومہ نقطوں میں سے گذرے۔

۹۔ ناقص کی سطح میں ایک نقطہ ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے دو ہم ماسکے کھینچ سکتے ہیں، ایک ناقص اور دوسرا زائد۔ اگر ان ہم ماسکون کے اعظم نیم محوروں کے طول ا، اَ ہوں تو ثابت کرو کہ نقطۂ مذکورہ اور مرکز کے خط وصل کا جو مزدوج نیم قطر بلحاظ ناقص کے ہے اس کا طول $(ا^۲ - اَ^۲)^{\frac{1}{2}}$ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ زائد اور ہم ماسکہ ناقص کے نقاط تقاطع پر زائد کے چار مماس کھینچنے سے جو متوازی الاضلاع بنتا ہے اس کا رقبہ $\frac{۲ اَ بَ}{ا ب}(اَ^۲ - بَ^۲)^{\frac{1}{2}}$ ہے۔

۱۰۔ ایک دائرہ ایک ناقص کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے، اگر ناقص کے کسی نقطہ سے دائرہ کا مماس کھینچا جائے اور اسی نقطہ سے ناقص اور دائرہ کے مشترک وتر پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس مماس اور عمود کی باہمی نسبت مستقل ہے۔

پرچۂ سوالات ۱۱

۱۔ مثلث کے اضلاع ج ب، ج ا پر دو متغیر نقطے ن، ق اس طور پر لئے گئے ہیں کہ ج ن : ن ا = ب ق : ق ج، ن ق کے درمیانی نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

۲۔ دو دائرے $ما^۲ = ۴ لا - لا^۲$، $لا^۲ = ۸ ما - ما^۲$ کے وتر تقاطع کا طول دریافت کرو، نیز ہر نقطۂ تقاطع پر دائروں کے درمیان جو زاویے بنتے ہیں ان کے

مماس معلوم کرو۔

۳- ثابت کرو کہ قائم زائد میں مستقل طول کے جتنے وتر ہیں ان کے وسطی نقاط کے طریق کی مساوات حسب ذیل شکل کی ہوگی۔

$$(\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲)(\text{ا}^۲ + \text{لا ما}) + \text{ب لا ما} = ۰$$

۴- مکافی پر دو نقطے ن اور ق ہیں جن پر کے مماس ط پر اور عماد ع پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ط ع کا ظل محور پر مرتب سے ن اور ق کے فاصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۵- مکافی کی مساوات ۹ لا^۲ - ۲۴ لا ما + ۱۶ ما^۲ + ۴۴ لا + ۸ ما + ۵ = ۰ ہے، اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۶- منحنی ۲ لا^۲ - ۳ لا ما - ۲ ما^۲ + ۵ ما + ۲ = ۰ کو مرتسم کرو اور اس کے متقارب کھینچو۔

۷- اگر (لا، ما)، (لا′، ما′) ناقص $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱$ پر دو نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}^۲} \times \frac{۱}{\text{ما} + \text{ما}'} + \frac{\text{ما}'}{\text{ب}^۲} \times \frac{۱}{\text{لا} + \text{لا}'} = \frac{۱}{\text{لا ما}' + \text{لا}'\text{ ما}}$$

اس بناء پر ثابت کرو کہ متوازی وتروں کے وسطی نقاط کا طریق خط مستقیم ہے۔

۸- ن ق ناقص کا ایک ایسا وتر ہے جو ن پر عماد ہے، ن، ق کے متناظر نقطے امدادی دائرہ پر ن$_۱$، ق$_۱$ ہیں، ثابت کرو کہ زاویہ ن$_۱$ ج ق$_۱$ لازماً بڑا ہے مس$^{-۱}$ $\frac{۲\sqrt{۱ - \text{ز}^۲}}{\text{ز}^۲}$ سے جہاں ز ناقص کا خروج المرکز ہے۔

۹- اگر ناقص ایک مربع کے اندر بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے محور سمت میں مربع کے قطروں پر منطبق ہوں گے۔

۱۰- ایک مکافی دو خطوط مستقیم و ا، و ب کو ا اور ب پر مس

کرتا ہے، اگر کسی وتر کا درمیانی نقطہ ا، ب پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس وتر کے جو حصے و ا، و ب اور مکافی کے درمیان کٹتے ہیں وہ مساوی ہیں۔

پرچہ سوالات ۱۲

۱۔ ثابت کرو کہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کا ایک منصِف دو خطوط مستقیم ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کے تقاطع میں سے گزریگا اگر ھ (گ^2 − ف^2) = گ ف (ا − ب)۔

۲۔ جس زاویے پر دائرے لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ اور لا^2 + ما^2 + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ = ۰ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اس کی جیب التمام معلوم کرو۔

۳۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے دو نقطوں پر جن کے فصلوں کی باہمی نسبت مہ : ۱ ہے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق مکافی

$$ما^2 = \left(مہ^{\frac{1}{4}} + مہ^{-\frac{1}{4}}\right)^2 \text{ ا لا}$$ ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے اس وتر کا طول جو خط $\frac{ل\ لا}{ا} + \frac{م\ ما}{ب} - ۱ = ۰$ پر واقع ہوتا ہے

$$\frac{۲}{ل^2 + م^2} \sqrt{ل^2 + م^2 - ۱} \times \sqrt{ا^2 ل^2 + ب^2 م^2}$$ ہے۔

۵۔ ایک ناقص کے نیم محور ا اور ب ہیں، اس کے کسی نقطہ پر مماس اور عماد کھینچے گئے ہیں، اگر مرکز سے مماس اور عماد پر عمود نکالے جائیں اور ان کے طول بالترتیب ع$_1$ اور ع$_2$ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کا باہمی تعلق ربط ذیل سے ظاہر ہوتا ہے

$$ع_1^2\, ع_2^2 = (ا^2 - ع_1^2)(ع_1^2 - ب^2)$$

اگر ایک ہی ربع پر دو عماد ایسے لئے جائیں کہ ان میں سے ہر ایک کا فاصلہ مرکز سے ع ہو تو ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ $\text{جم}^{-1}\,\text{ع}^{2}/(\text{ا}-\text{ب})^{\frac{1}{2}}$ ہے۔

۶۔ مکافی $\text{ما}^{2} = ۴\,\text{ا لا}$ کے وتر ایک ایسے دائرہ کو مس کرتے ہیں جس کا مرکز ماسکہ ہے اور نصف قطر ب، ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات حسب ذیل ہے

$$\left\{\text{ما}^{2} + ۲\,\text{ا}\,(\text{ا} - \text{لا})\right\}^{2} = \text{ب}^{2}\left(\text{ما}^{2} + ۴\,\text{ا}^{2}\right)$$

۷۔ مکافی $۴۹\,\text{لا}^{2} + ۱۲۶\,\text{لا ما} + ۸۱\,\text{ما}^{2} + ۲۳\,\text{لا} + ۱۱\,\text{ما} + ۱۲ = ۰$ کے محور کی مساوات معلوم کرو۔

۸۔ منحنی $\text{ما}^{2} + ۲\,\text{لا ما} + ۲\,\text{ما} = \text{ا}$ کو مرتسم کرو اور مبدأ سے اس کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۹۔ دو خط ایک دوسرے کو و پر قطع کرتے ہیں، پہلے خط پر تین نقطے ا_{1}، ا_{2}، ا_{3} لئے گئے ہیں اور دوسرے پر ب_{1}، ب_{2}، ب_{3}۔ اگر دوسرے خط کو و کے گرد گھمایا جائے اور نقاط ب_{1}، ب_{2}، ب_{3} اس کے ساتھ حرکت کریں تو ثابت کرو کہ $\text{ا}_{1}\text{ب}_{1}$، $\text{ا}_{2}\text{ب}_{2}$، $\text{ا}_{3}\text{ب}_{3}$ کو ملانے والے خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ ایسے بڑھتا ہے جیسے و پر کے زاویہ کی جیب۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص $\text{ب}^{2}\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}\text{ما}^{2} = \text{ا}^{2}\text{ب}^{2}$ کے کسی نقطہ پر کا مماس اور معین اُن وتروں کے موسیقی مزدوج ہیں جو محور اعظم کے سروں کو نقطہ مذکورہ کے ساتھ ملانے سے پیدا ہوں۔

پرچۂ سوالات ۱۳

۱۔ $\text{ا لا}^{2} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{2} + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$ دو خطوط مستقیم ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع سے مبدأ کے فاصلے کا مربع

$$\frac{\text{ج}\,(\text{ا} + \text{ب}) - \text{ف}^{2} - \text{گ}^{2}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^{2}}$$ ہے۔

۲۔ محاور اب، اج کا زاویہ میلان 60° ہے، ایک دائرہ اب کو ن پر مس کرتا ہے اور اج پر ایک وتر کاٹتا ہے جس کا طول ان کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق خط مستقیم ہے، اگر ان = ل تو دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ زائدوں لا^2 - ما^2 = ۳ ا^2 اور لا ما = ۲ ا^2 کے جو مشترک مماس ہیں اُن کے نقاط تماس کے محدد معلوم کرو۔

۴۔ مکافی کے کسی نقطہ پر کا مماس اصلی محور کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ مہ بناتا ہے اور منحنی نقطہ مذکورہ کے عماد پر جو حصہ کاٹتا ہے اس کا طول ل ہے، ثابت کرو کہ وتر خاص کا طول = مہ ل / (۱ + مہ^2)$^{3/2}$

۵۔ ثابت کرو کہ ناقص لا^2/ا^2 + ما^2/ب^2 = ۱ کے عمادی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ایک ایسا منحنی ہے جس کی مساوات حسب ذیل ہے

(ب^2 لا^2 + ا^2 ما^2)^2 (ب^6 لا^2 + ا^6 ما^2) = ا^4 ب^4 لا^2 ما^2 (ا^2 - ب^2)^2

۶۔ ناقص ۲ ا ب لا^2 + (ا^2 + ب^2) ما^2 = (ا + ب)^2 میں معلوم کرو خروج المرکز، محوروں کے طول، رقبہ، وتر خاص کا طول۔ وتر خاص کے سروں پر جو مماس کھینچ سکتے ہیں اُن کی مساواتیں معلوم کرو۔

۷۔ منحنی ۸ لا^2 + ۱۲ لا ما + ۱۷ ما^2 + ۱۲ لا + ۳۴ ما + ۱۷ = ۰ کو مرتسم کرو۔

۸۔ بلحاظ ایک مخروطی کے ایک نقطہ کا جو قطبی ہے اُس پر نقطہ مذکورہ سے عمود نکالا گیا ہے اور یہ محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق خط مستقیم ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ زائد لا ما = ا^2 کے ایسے وتروں کا لفاف جن کے سامنے منحنی کے نقطہ (لا'، ما') پر زاویہ عہ بنتا ہے زائد لا لا' + ما ما'

= ۲ ا^{2} لا ما (ا + ۲ مم^{2} عہ) - ۴ ا^{4} قم^{2} عہ ہے۔

۱۰- ثابت کرو کہ مساوات لا + ما = ک + ک $\sqrt{\text{لا ما}}$ ایک مخروطی تراش کو تعبیر کرتی ہے جو محوروں کو مس کرتی ہے، ک کی کس قیمت کے لئے یہ مخروطی دائرہ ہوگی اور دائرہ کا نصف قطر کیا ہوگا۔ محور علی القوائم ہیں۔

پرچۂ سوالات ۱۴

۱- مبدا میں سے دو خط و ا، و ب کھینچے گئے ہیں، اِن کے طول ا، ب ہیں اور یہ محور لا کے ساتھ بالترتیب زاوئے ۳۰° اور ۶۰° بناتے ہیں، ا ب کی مساوات معلوم کرو۔

۲- ی ≡ ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

خطوطِ مستقیم کا ایک جوڑا ہے، ثابت کرو کہ جہاں یہ خط محوروں سے ملتے ہیں اُن چار نقطوں میں سے گذرنے والا تیسرا جوڑا

ج ی + ۴ (ف گ - ج ھ) لا ما = ۰ ہے۔

۳- ایک مکافی کا وترِ خاص ۴ ا ہے، اس پر کے ایک نقطہ ن کا معین ماَ ہے اور اُس دائرہ کی مساوات جو س ن کے قطر پر کھینچا جائے

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - \left(\text{ا} + \frac{\text{ماَ}^{2}}{4\,\text{ا}}\right)\text{لا} - \text{ماَ ما} + \frac{\text{ماَ}^{2}}{4} = 0$$

ہے، ثابت کرو کہ یہ دائرہ ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۴- نقطہ ت (ف، گ) سے ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} - 1 = 0$ کے مماسات ت ن، ت ق ہیں، ناقص کا مرکز ج ہے، ثابت کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع ت ن ج ق کا رقبہ

$\sqrt{\text{ب}^{2}\,\text{ف}^{2} + \text{ا}^{2}\,\text{گ}^{2} - \text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}}$ ہے۔

۵ - ثابت کرو کہ ماسکہ سے مخروطی کے مماسات کی مساوات دائرہ کی شرط کو پورا کرتی ہے۔

۶ - جن نقطوں پر خط مستقیم $\frac{لا}{ا\ جم\ عہ} + \frac{ما}{ب\ جیب\ عہ} = ۱$ مخروطی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ سے ملتا ہے اُن پر مخروطی کے عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطۂ تقاطع $\frac{ج^۲\ جم^۳\ عہ}{ا}$ ، $\frac{ج^۲\ جیب^۳\ عہ}{ب}$ ہے۔

۷ - منحنی $۱۵\ لا^۲ - ۲۳\ لا\ ما - ۲۸\ ما^۲ + لا + ۲۹\ ما - ۶ = ۰$ کو مرتسم کرو۔

۸ - منحنی $ل + \frac{۱}{ل} = ۲\ جم\ طہ + ۳\ جیب\ طہ$ کے متعلق بحث کرو
اور $(ما - لا)^۲ = ما + لا + ۱$ کے ماسکہ کے محدد معلوم کرو۔

۹ - ایک نقطہ معلومہ سے زائد $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ جن نقطوں پر یہ منحنی سے ملتے ہیں اُن کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے طاق ضعف کے مساوی ہے۔

۱۰ - ایک قائم زائد کے متقارب محددوں کے محور ہیں، اس کا ایک مماس کھینچا گیا ہے، $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کی ہم ماسکہ مخروطیوں کے لحاظ سے اس مماس کے قطب لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام قطبوں کے قطبی بلحاظ مخروطی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں، نیز ایسے نقطوں کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کے متقارب محددوں کے محور ہیں اور جو اصلی زائد کا مزدوج ہے اگر

$$۴\ ا^۲\ ب^۲ = (ا^۲ - ب^۲)^۲$$

پرچہ سوالات ۱۵

۱۔ اگر ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ دو متوازی خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ ھ^۲ = ا ب اور ب گ^۲ = ا ف^۲ اور خطوط کے درمیان فاصلہ ہے ۲ { (گ^۲ − ا ج) / (ا (ا + ب)) }^{۱/۲} ۔

۲۔ ناقص کے اُس ماسکی نیم قطر کا مقام معلوم کرو جو منحنی کو نہایت ہی ترچھا قطع کرے۔

۳۔ مکافی کی مساوات ما^۲ − ۴ ا لا = ۰ ہے، نقطہ (۴ ا، ۱۶ ا) سے اس کے مماس کھینچے گئے ہیں اور ان کے نقاط تماس کو ملایا گیا ہے، اسطرح جو مثلث بنتا ہے اُس کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ مکافی کے مماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ ۱۳۵° پر قطع کرتے ہیں، مماسات اور ان کے نقاط تماس کو ماسکہ کے ساتھ ملانے سے جو ذو اربعۃ الاضلاع بنتا ہے اُس کے قطروں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۵۔ مستقل نصف قطر کا دائرہ مکافی کے راس میں سے گذرتا ہے، اگر دائرہ اور مکافی کے باقی تین نقاطِ تقاطع پر مکافی کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور دائرہ کے مختلف مقامات کے لئے اس نقطہ کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج المرکز ۱/۲ √۳ ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کے عمادی وتروں کے نقاطِ تنصیف کا طریق ۲ ا لا ما^۲ = ما^۴ + ۴ ا^۲ ما^۲ + ۸ ا^۴ ہے۔

۷۔ منحنیات ذیل کو مرتسم کرو

(۱) ۱۴۴ لا^۲ + ۱۲۰ لا ما + ۲۵ ما^۲ + ۷ لا + ۱۷ ما = ۰

(۲) (۳ لا − ۴ ما + ا) (۴ لا + ۳ ما + ا) = ا^۲

۸۔ اگر زائد کے اُن چار نقطوں کے فصلے جن پر کے عماد ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$، $لا_۴$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + لا_۴)\left(\frac{1}{لا_۱} + \frac{1}{لا_۲} + \frac{1}{لا_۳} + \frac{1}{لا_۴}\right) = ۴$$

۹۔ ناقص کے مرکز کو مبدأ مانا گیا ہے اور اس کے ایک وتر کا نقطۂ تنصیف $(لا_۱، ما_۱)$ ہے، ثابت کرو کہ $\frac{لا_۱}{\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲}}$ ، $\frac{ما_۱}{\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲}}$ وتر کے قطب کے محدد ہیں جہاں ا، ب ناقص کے نیم محور ہیں۔

۱۰۔ نقطہ ن سے مخروطی $ا لا^۲ + ب ما^۲ = ۱$ کا مماس ن ق کھینچا گیا ہے اور اس کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق

$$\frac{ا}{لا^۲} + \frac{ب}{ما^۲} = (ا - ب)^۲$$

ہے، اگر نقطۂ تماس ق کے محدد (ھ، ک) ہوں تو ن کا وتر تماس بلحاظ مخروطی کے $\frac{ا لا}{ھ} - \frac{ب ما}{ک} = ا - ب$ ہے۔

جوابات حصہ اول

صفحات (۱-۷۴)

۳- ۱۳ میل، ۱۰ میل ۴- ۲۵ ۵- ۱۳√
۶- لا۲ + ما۲ = ا۲
۷- (لا - و)۲ + (ما - ع)۲ = ا۲

۹- (- ۷۷/۱۲ ، - ۵/۴) ۱۰- (۹ ۱/۴ ، ۳ ۱/۴) ۱۱- ۴:۷

۱۲- {(ن - ل) لا۱ + ل لا۲}/ن ، {(ن - ل) ما۱ + ل ما۲}/ن
۱۴- (ا) ۷ (ب) ۱/۲ (ا۲ + ب۲) (ج) ۱/۲ ف (م - ن) - ۱/۲ ق (ل - م)
۱۵- ۲

۱۸- (ا) - ۱، - ۱ (ب) - ۱، - ۱ (ج) ۳/۲ ، - ۱/۲ ۳√

۱۹- (ا) ۲، π ۵/۴ (ب) ۳√ ، π ۵/۳ (ج) ۵، π

۲۰- (ا) ۷√ (ب) ۲ ۲۱- (ا) ۱/۲ (ب) ۵/۴ ۳√
۲۷- لا۲ + ما۲ = ۲ ۲۸- لا۲ + ما۲ - ۲ ما = ۰
۲۹- ما = لا + ا جہاں ا معلومہ فاصلہ ہے۔

۳۴- (ا) مبدأ اور نقطہ (۱، ۲) میں سے گذرنے والا خط مستقیم (ب) دائرہ جس کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر ۴ (ج) دو خطوط مستقیم جو مبدأ کو نقاط (۱، ۲) اور (۱، - ۲) کے ساتھ ملاتے ہیں (د) دو خطوط مستقیم جو و لا کے متوازی ہیں اور اس کے اوپر اور نیچے فاصلہ ۲ پر واقع ہیں

(ع) منحنی جو حصہ دوم، دفعہ ۴۴ مثال ۲ کے منحنی کے متشابہ ہے۔ (ف) دونوں محور (گ) خط مستقیم جو محوروں کو نقاط (۲، ۰)، (۰، ۳) پر کاٹتا ہے (ھ) محور ما اور ایک خط مستقیم جو مبدأ اور نقطہ (۱، ۱) میں سے گذرتا ہے۔

۳۳۔ ما = ± لا √۳ + ۲، ما = ± لا √۳ − ۲، (− ۲/۳ √۳، ۰)، (۲/۳ √۳، ۰)

۳۴۔ ۳۰°، ۶۰°   ۳۷۔ لا + ما = ± √۲   ۳۸۔ لا − ما = ۱

۳۹۔ ما = ۴، ۲لا + ۳ما = ۰، ۲لا − ما = ۰

۴۰۔ ۲لا + ما = ۶ یا لا + ۲ما = ۶   ۴۱۔ لا − ما + ۱ = ۰، ۲√۳ ۳

۴۲۔ ۲۸ : ۱۱   ۴۴۔ ۴۵°   ۴۵۔ ایک ہی جانب

۴۷۔ (ا) ۳/۵ لا + ۴/۵ ما = ۲ (ب) − √۳/۲ لا − √۳/۲ = ۲√۳

۵۰۔ (ا − ب)² / √(ا² + ب²)   ۵۲۔ (−۴، −۱)، (۳، −۲)، (۲، ۱)، ۲√۱۰، √۱۰، ۲√۲

۵۳۔ ۳۰°   ۵۴۔ ۳۰°   ۵۵۔ ۴۵°

۵۶۔ لا + ۷ما + ۲۲ = ۰، ما − ۷لا − ۴ = ۰   ۵۷۔ لا + ۱۱ما = ۰

۵۸۔ لا = ۰، √۳ما − لا = ۰، (۰، −۳)، (− ۳/۲ √۳، − ۳/۲)

۵۹۔ (۱۰ ۲/۳، ۰)   ۶۰۔ لا = (ھ + صک − صب)/(۱ + ص²)، ما = (صھ + ص²ک + ب)/(۱ + ص²)

۶۱۔ ک = − ۴ ۱/۲   ۶۲۔ ۹/۴   ۶۳۔ ۳۰°

۶۴۔ ۹۰°   ۶۵۔ ۱، ۲   ۶۶۔ ما = ۱

۶۸۔ ۲۱لا + ۱۳ما = ۷۶

۶۹۔ ۷لا − ۲۱ما + ۵۰ = ۰، ۲۲لا − ۱۱ما + ۲۷ = ۰، ۱۵لا + ۱۰ما − ۲۳ = ۰

(− ۱۷/۳۸۵، ۲۱۱/۳۸۵)

۷۰ — ۱۰ لا − ۱۵ ما + ۱۴ = ۰، ۲۱ لا + ۷ ما = ۲۰، ۱۱ لا + ۲۳ ما = ۹۴

۷۱ — ۴ لا − ۳ ما + ۲ = ۰، ۷ لا + ما = ۹

۷۴ — ۲۱ لا + ۷۷ ما = ۱۳۶، ۹۹ لا − ۲۷ ما + ۴۶۴ = ۰

۷۵ — (۱) ما − ۳ لا + ۶ = ± √۲ (ما − ۲ لا + ۴)، ما = ۰

(۲) ۶ لا + ما = ۵، لا − ۳ ما + ۱۰ = ۰، ما + ۱۳ لا = ۰

۷۶ — ۹ لا − ۷ ما = ۳، ۱۶ لا + ۲۸ ما + ۵۱ = ۰، ۷ لا + ۷ ما + ۱۵ = ۰

۷۹ — لا = ۲ ما، لا = ۳ ما

۸۰ — (ا) دونوں محور (ب) دو خطوط مستقیم جو محور ما پر منطبق ہوتے ہیں

(ج) دو خیالی خطوط مستقیم لا + ما √−۱ = ۰ اور لا − ما √−۱ = ۰

جو مبدأ میں سے گذرتے ہیں اور مبدأ ہی ایک حقیقی نقطہ ہے ان کے طریق پر۔

(د) لا کا محور اور خط لا + ما = ۰ (ع) دو منطبق خطوط مستقیم لا − ما = ۰

(ف) دو خیالی خطوط مستقیم ما = ± √−۱ محور لا کے متوازی

(گ) دو خیالی خطوط مستقیم لا − ا = ± (ما − ب) √−۱ جو نقطہ (ا، ب) میں سے گذرتے ہیں (س) لا = ۲ اور ما = ۳

۸۱ — س، ½ ۸۲ — ما = ۳ لا، ما + ۲ لا = ۰، ۴۵° ۸۳ — ۹۰°

۸۷ — (ا) لا^2 + لا ما = ۰ (ب) لا ما − ما^2 = ۰ (ج) لا ما = ۰ (د) لا^2 − ما^2 = ۰

۸۸ — ب لا + ا ما = ۰ ۸۹ — لا جم عہ + ما جب عہ = ۰

۹۰ — لا^2 + ما^2 = ف^2 + گ^2 − ج ۹۳ — لا − ما + ۱ = ۰، لا + ما = ۲

۹۴ — ۳ لا + ما = ۱، لا − ما + ۱ = ۰، (۰، ۱)

۹۵ — (۲، ۱)، لا − ما = ۱، لا − ۴ ما + ۲ = ۰

۹۷ — $\left(\frac{۲۳}{۷}، \frac{۳}{۷}\right)$، لا^2 + لا ما + ۲ ما^2 = $\frac{۴}{۷}$

۹۸ — (۱) لا − ۱ = ۰ (۲) ما + ۱ = ۰ (۳) ل لا + م ما − ل + م + ۱ = ۰

(۴) لا^2 − ما^2 − ۲ لا − ۲ ما = ۰ (۵) ۳ لا^2 − ۴ لا ما + ما^2 − ۱۰ لا + ۶ ما + ۸ = ۰

(۶) ۲ لا^2 + ۳ لا ما + ۴ ما^2 − ۲ لا + ۶ ما + ۶ = ۰

۹۹۔ (۱) لا = ½ (لاَ √۳ − ماَ)، ما = ½ (لاَ + ماَ √۳)

(۲) لا = − (۱/√۲) (لاَ − ماَ)، ما = − (۱/√۲) (لاَ + ماَ)

۱۰۰۔ لا = (۱/√۵) (۲لاَ − ماَ)، ما = (۱/√۵) (لاَ + ۲ماَ)

لاَ = (۱/√۵) (۲لا + ما)، ماَ = (۱/√۵) (− لا + ۲ما)

۱۰۱۔ ۳لاَ² = ماَ²   ۱۰۲۔ لا = − ماَ، ما = لاَ   ۱۰۳۔ ماَ² = ۴لاَ

۱۰۴۔ لاَ² − ۸لاَماَ − ۴ماَ² = ۰   ۱۰۵۔ ۳۹لاَ² − ۹۶لاَماَ + ۱۱ماَ² = ۰

۱۰۶۔ ۳لا = ۲ما، ما = ۳ منحنی (دائرہ) سے دو منطبقہ نقاط پر ملتا ہے

۱۰۷۔ (− ۵/۳، ۳)، (۳، − ½)   ۱۰۹۔ (۵، π)

۱۱۰۔ لا² + ما² = ۴   ۱۱۱۔ ۸لا + ۶ما − ۲۵ = ۰

۱۱۲۔ مبدأ میں سے گذرنے والے خطوط ۲لا + ۳ما = ۰ اور ۲لا − ۳ما = ۰

۱۱۳۔ دائرہ جس کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر ۶

۱۱۴۔ لا / (لا۱ + ما۱ جم س) + ما / (لا۱ جم س + ما۱) = ۱

۱۱۵۔ ف۱ / (لا + ما جم س) + ق۱ / (لا جم س + ما) = ۱

۱۱۸۔ (۱) ∞ (۲) ½ √۴۱ (۳) √۳ (۴) ½ √−۳ خطوط خیالی ہیں

۱۱۹۔ ۱۲لا² + ۳۷لاما + ما² = ۰

۱۲۱۔ (− ۳/۲، ½)، (− ½، − ½)، (− ۶، ۵)، (− ۷/۶، ۵/۶)، (۰، ۲)، (− ۷/۳، ۱۹/۶)، ۳۲لا + ۱۰ما + ۴۳ = ۰، ۵لا − ما + ۲ = ۰، ۲۵لا + ۲۹ما + ۵ = ۰

۱۲۳ — ۸۵/۳۶ یا ۵/۴ — ۱۲۴ — ۲لا − ۳ما + ۲ = ۰، ۳لا + ۴ما = ۷

۱۲۵ — (۱/ج ، ۱/ج) میں سے گزرتا ہے جہاں ج مستقل ہے

۱۲۶ — (−۷ ، ۳) ۱۲۹ — لا = ۱/۵ (۴لاَ − ۳ماَ)، ما = ۱/۵ (۳لاَ + ۴ماَ)

۱۳۱ — ۳لا − ۴ما = − ماَ/۲۷ ، لا − ما + ۱ = − لاَ/۵

ما = ماَ/۲۷ − ۳لاَ/۵ − ۲ ، لا = ماَ/۲۷ − ۴لاَ/۵ − ۴

۱۳۳ — اگر اب، ب ج کے طول ن اور قَ ہوں اور زاویہ ب ا د، عہ ہو تو اج کی مساوات ہے طہ = مس$^{-1}$ (قَ جب عہ)/(قَ جم عہ + ن)
اور ب د ہے ر{ن جب طہ − قَ جب (طہ − عہ)} = ن قَ جب عہ

۱۳۴ — ۱/۲۲۴ ۱۳۵ — ۲√(ھ^{2} − اب) / (ا قَ^{2} − ۲ھ ن قَ + ب ن^{2})

۱۳۷ — (ا ن$_{1}^{2}$ + ۲ھ ن$_{1}$ قَ$_{1}$ + ب قَ$_{1}^{2}$) / √(۴ھ^{2} + (ا − ب)^{2})

۱۳۹ — ایک ایسا خط مستقیم جو ثابت خطوط مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۱۴۰ — اگر ا قاعدہ ہو اور عہ قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق، اور قاعدہ کو محور لا مانا جائے تو راس کا طریق ہے لا^{2} + ما^{2} − ا لا − ا ما جم عہ = ۰

آزمائشی پرچہ صفحہ ۴۷

۱ — لا^{2} + ما^{2} − ا ما جم ا = ۱/۴ ا^{2} جہاں قاعدہ کو محور لا مانا گیا ہے اور اس کا وسطی نقطہ مبدا ہے۔

۲۔ (۱) خط مستقیم جو ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ۱۵۰° بناتا ہے اور قطب سے فاصلہ $\frac{۱}{۲}$ ا $\sqrt{۳}$ پر ہے۔
(۲) خط مستقیم جو ابتدائی خط کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ا پر واقع ہے۔

۳۔ $\frac{ج}{ج'}$ ۴۔ ۱۰ لا + ۷ ما = ۰، ۱۳ لا + ۸ ما − ۱۱ = ۰

۵۔ $\frac{۸}{۱۵}$ ۷۔ لا^{۲} − ۲ $\sqrt{۳}$ لا ما − ما^{۲} = ۰، لا ما = ۰

۹۔ ا جب^{۲} سہ × لا^{۲} + ۲ جب سہ (ھ − ا جم سہ) لا ما + (ا جم^{۲} سہ − ۲ ھ جم سہ + ب) ما^{۲} = ۰

جوابات حصہ دوم

باب اول (صفحات ۱ تا ۱۷)

۲۔ (ا) لا^{۲} + ما^{۲} − لا − ما = ۰ (ب) لا^{۲} + ما^{۲} − ۶ لا + ۴ ما + ۴ = ۰
(ج) لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ ما = ۰

۳۔ (ا) (−۲، ۲)، ۳ (ب) (۸، ۸)، ۱۰ (ج) (−ا، ا)، ا
(د) (ا، ب)، (ج، د) کے ملانے والے خط کا نقطۂ تنصیف،
نصف قطر = نقطوں کے درمیانی فاصلہ کا نصف
(ع) (۰، ا)، ا

۴۔ ۶۰°، (۱، ۲)، ۳

۵۔ $\frac{-گ + ف\ جب\ سہ}{جب\ سہ}$ ، $\frac{-ف + گ\ جب\ سہ}{جب\ سہ}$ ، $\frac{\sqrt{گ^{۲} - ۲\ ف\ گ\ جم\ سہ + ف^{۲}}}{جب\ سہ}$

۶۔ (ا) ۷ لا^{۲} + ۷ ما^{۲} − ۳۹ لا − ۱۵ ما + ۳۲ = ۰، لا^{۲} + ما^{۲} = $\frac{۴۲۵}{۹۸}$
(ب) لا^{۲} + ما^{۲} − ھ لا − ک ما = ۰، لا^{۲} + ما^{۲} = $\frac{۱}{۴}$ (ھ^{۲} + ک^{۲})
(ج) لا^{۲} + ما^{۲} − ۱۲ (لا + ما) + ۴۷ = ۰، لا^{۲} + ما^{۲} = ۲۵
(د) لا^{۲} + ما^{۲} − (ا + ب) (لا + ما) + ۲ ا ب = ۰، لا^{۲} + ما^{۲} = $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب)^{۲}

۷ — (ا) لا² + ما² − ا لا − ب ما = ۰

(ب) لا² + ما² − ۲ ھ لا − ۲ ک ما = ف² + ق² − ۲ ھ ف − ۲ ک ق

۸ — لا² + ما² − ا ما = ۰ ، (۰ ، ا/۲) ، ا/۲

۹ — (لا − ا)² + ما² = ۰ ، (ا ، ۰)

۱۱ — لا² + ما² − ۴ لا − ۲ ما − ۲۰ = ۰ ، (۲ ، ۱) ، ۵

۱۲ — (ا) (۳ ، π ۱/۵) ، ۵ (ب) (۲ ، π/۶) ، ۳

۱۴ — ما = ۴ ۱۵ — ۲ لا + ۳ ما = ۱۳ ، ۲ لا − ۳ ما = ۱۳

۱۶ — ۳ ما − ۴ لا = ۲۴ ، ۳ لا − ۴ ما = ۲۴

۲۳ — ۱۲ لا − ۵ ما = ۰ ۲۴ — ما = ۲

۲۵ — (− ا ، ۰) ، (۰ ، − ا) ۲۶ — لا² + ما² = ۱۰

۲۷ — لا² + ما² = ۴ ۲۸ — (ا) (−۱ ، −۱) ، (ب) − ۳/۲ √۳ ، ۹/۲

۳۰ — ما = لا + ۱ ± √۲ ۳۱ — ۳ لا + ۴ ما ± ۲۵ = ۰

۳۲ — (ا) ما + √۳ لا = ± ۲ √۳ (ب) لا + √۳ ما = ± ۲ √۲

(ج) ۵ لا − ۱۲ ما = ± ۱۳ √۲

۳۳ — ا² ب² (لا² + ما²) − ج² (ب لا + ا ما)² = ۰

۳۵ — (۶۰/۱۳ ، ۲۵/۱۳) ، (− ۶۰/۱۳ ، ۲۵/۱۳)

۳۶ — لا² + ما² = ب² − ا²

۳۷ — (۹/۵ ، ± ۱۲/۵) ، ۳ لا ± ۴ ما = ۱۵ ، ۴ لا ∓ ۳ ما = ۰

۳۹ — ۴ لا + ۳ ما + ۴ ا + ۳ ب ± ۵ √(ا² + ب² − ج²) = ۰

۴۰ — √۳ ما = لا ± ۱۰ ۴۲ — (۲ √۳ ، °۳۰) ، (۲ √۳ ، − °۳۰)

۴۵ — لا² + ۲ لا ما جم ع + ما² − ف لا − ق ما = ۰

۴۶ — ب² ک² + ۴ ا ک = ۴

۴۷ — $\sqrt{}$ (ا^{2} + ب^{2} − ۲ اب جم (عہ − بہ)) / جب (عہ − بہ)

باب دوم

صفحات (۱۸ تا ۴۲)

۱ — (ا) ۳ لا − ۵ ما = ۲ (ب) ما − ۳ لا = ۱۴ (ج) ما = ۱۴
۲ — (ا) (۲۱، −۷) (ب) (۱، −۱) (ج) (۶، ۰)
۳ — (ل ا^{2}، م ا^{2}) ۴ — ۶ لا + ۵ ما = ۳۸
۶ — (ا) ۵ (ب) ۱ (ج) ½ $\sqrt{}$۲۷
۸ — ۴ لا − ۳ ما = ۰ ۹ — ۱۰ لا − ۷ ما = ۰
۱۰ — لا − ۳ ما = ۲ ۱۱ — ۳۲ لا + ۸ ما = ۹
۱۲ — ۴ لا + ما = ۱ ۱۳ — (۱، ۲)
۱۴ — (۲، ۰)، (۸، ۰) ۱۶ — (لا − ۵) (ما − ۵) = ۰
۲۲ — ر^{2} (لا^{2} + ما^{2}) = (لا لا$_{1}$ + ما ما$_{1}$)^{2}
۲۴ — لا + ما = ۳، ۳ لا − ۲ ما + ۱ = ۰، لا = ۱، (۱، ۲)
۲۶ — لا^{2} + ما^{2} − ہ لا − ک ما = ۰ ۲۸ — (۱، ۱)
۳۰ — وہ دائرہ جو نقطہ مذکورہ میں سے گذرنے والے نصف قطر پہ بنایا جائے
۳۱ — لا^{2} + ما^{2} + ۵/۲ لا + ۲ ما = ۰
۳۲ — ر^{2} (لا^{2} + ما^{2}) = (ق لا − ن ما)^{2}
۳۴ — ج مثبت اور ن، ق کی ایک ہی علامت
۳۹ — $\sqrt{}$ {۴ ر^{2} − ۲ (ج − د)^{2}} ۴۰ — (لا − ر)^{2} + (ما − ر)^{2} = ر^{2}
۴۱ — لا^{2} + ما^{2} − ب لا = (ب لا − ا ما − ا ب)^{2} / ۸ ا ب

۴۲۔ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\dfrac{\text{گ}_2\text{ج}_1 - \text{ج}_2\text{گ}_1}{\text{ج}_1 - \text{ج}_2}\,\text{لا} + 2\,\dfrac{\text{ف}_2\text{ج}_1 - \text{ج}_2\text{ف}_1}{\text{ج}_1 - \text{ج}_2}\,\text{ما} = 0$

۴۴۔ بنیادی محور کو محور لا مانو اور اس کے وسطی نقطہ کو مبدا، اگر دائروں کے نقاط تقاطع کے درمیان بنیادی محور کا طول ۲ ج ہو اور معلومہ سمت کا مماس محور لا کے ساتھ م ہو تو طریق مطلوب ہے $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 - \text{ج}^2 = 2\,\text{م}\,\text{لا}\,\text{ما}$

آزمائشی پرچہ ۱ (صفحہ ۴۲)

۱۔ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ ۳۔ (۱، ۰)

۵۔ $\dfrac{۴}{۱۳}$، $\dfrac{۲۵}{۱۳}$ ۶۔ ر (۱ + جم عہ) یا ۔ ر (۱ ۔ جم عہ)

۸۔ دائرہ ر = ل جم (طہ ۔ عہ) جہاں ل اور عہ دائرہ معلومہ کے مرکز کے قطبی محدد ہیں۔

باب سوم

(صفحات ۴۴ - ۶۲)

۲۔ (۱) ۲ ل (۲) ۷ (۳) $\frac{1}{7}$

۳۔ $\text{ما}^2 = ۱۲\,\text{لا}$ ۴۔ (۱) ۱۰، ۱۰ (۲) ۳۰، $۱۰\sqrt{۳}$

۱۰۔ $\frac{1}{۴}$ ۱۱۔ ۸

۱۲۔ (۔ $\frac{۳}{۲}$، ۰)، ماسکہ (۔۱، ۰) اور مرتب لا + ۲ = ۰

۱۳۔ (۰، ۔۲)، لا = ۰ ۱۵۔ پہلے مکافی کے باہر اور دوسرے کے اندر

۱۷۔ (۱) (۱، ۴)، ($\frac{۳}{۲}$، ۴)، لا = $\frac{1}{۲}$

(۲) (۔۲، ۔۳)، (۔ $\frac{۳}{۲}$، ۔۳)، ۲ لا + ۵ = ۰

۱۸۔ $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ل}\,\text{لا}$ ۱۹۔ $\text{لا}^2 - ۲\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2 - ۴\,\text{ما} + ۶ = ۰$

۲۰ـ ۴ا، ۲√۲   ۲۱ـ -١/۴، ١/۲

۲۲ـ -۵/۲، ۲، محور ما = ۲، راس پر کا مماس ۲لا + ۵ = ۰

۲۳ـ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے (لا - ا/۲)^۲ = ب(ما + ا^۲/۴ب)

۲۵ـ (۱، -۱)، (۱، -۳/۴)، ۴ما + ۵ = ۰

۲۶ـ لا^۲ - ۲لاما + ما^۲ - ۸ما = ۰

۲۸ـ ۲√۲   ۲۹ـ ١/۲(۱۱ ∓ √۸۵)، ١/۲(-۵ ± √۸۵)

۳۰ـ ج = م ب + ا/م

۳۲ـ فصلے ہیں ١/۹(-۵ ± √-۲)، پس نقطے خیالی ہیں۔

۳۳ـ ۱۱/۲، -۵/۲   ۳۴ـ ۸√۳ ا   ۳۵ـ ۴ا(۲ ± √۳)

۴۰ـ لا^۲ + ۲لاما + ما^۲ - ۶لا - ۲ما + ۴ = ۰

۴۱ـ لا^۲ + ۲لاما + ما^۲ - ۲لا - ۶ما + ۴ = ۰

آزمائشی پرچہ ۱ (صفحہ ۶۲)

۱ـ دفعہ ۱۷، گ^۲ = اج(ب ج + ۲ف)

۲ـ لا/عہ = ما/بہ یا لا/عہ + ما/بہ = ۱ جہاں اب = عہ، اج = بہ

۳ـ ١/۲ سں^-۱ {۲ھ/(ا-ب)}، اَ + بَ = ا + ب

۴ـ دفعہ ۳۶

۶ـ (۱) ۴ما - ۳ا = ۰   (۲) (۵/۲ ا، -۳/۴ ا)، (-ا/۲، -۳/۴ ا)، -۱ ١/۳ ا

۷ـ لا^۲ - ۲لاما + ما^۲ - ۴اما - ۲ا^۲ = ۰، ا√۲

۸ـ ان^۲، -۲ان

۹ـ دفعہ ۵۲

باب چہارم

(صفحات ۶۴-۸۵)

۱- $۷\text{لا}^{۲} - ۲\text{لاما} + ۷\text{ما}^{۲} - ۱۶\text{ما} + ۸ = ۰$

۲- $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$

۴- (۱) $\pm\sqrt{۳}$ (۲) $\pm\frac{۱}{۴}\sqrt{۳}$ (۳) $\pm\frac{۱}{۲}$

۶- (۱) پر (۲) کے اندر

۱۳- (۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ (۲) (۰، ۱)، (۴، ۱) (۳) (۲، ۰)، (۲، ۲)

۱۴- (۱) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$ (۲) (۷، ۲)، (۵، ۲) (۳) (۱، ۰)، (۱، ۴)

۱۵- (۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ (۲) (۲، ۱)، (−۲، ۱) (۳) (۰، ۰)، (۰، ۲)

۱۶- (۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ (۲) (۰، −۱)، (۰، ۳) (۳) (۱، ۱)، (−۱، ۱)

۱۷- (۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ (۲) (۱، ۱)، (−۳، ۱) (۳) $(۱، \sqrt{۲}+۱)$، $(۱، ۱-\sqrt{۲})$

۱۸- (۱) $\frac{۱}{۱۵}\sqrt{۱۶۵}$ (۲) $(۳، ۲\sqrt{۱۵}-۴)$، $(۳، -[۲\sqrt{۱۵}+۴])$
(۳) (−۱، −۴)، (۷، −۴)

۱۹- (۱) $\frac{۷}{۱۳}\sqrt{۲۶}$، $\frac{۱۲}{۳۱}\sqrt{۳۱}$ (۲) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۱۰}$، $\frac{۲}{۱۳}\sqrt{۱۳}$
(۳) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۱۰}$، $\frac{۲}{۷}\sqrt{۷}$

۲۰- $\frac{۱}{۱۸}\sqrt{۱۵}$، $\frac{۱}{۸}\sqrt{۲۲۶}$ ۲۲- $\frac{۱۲}{۴۳}\sqrt{۴۳}$، $\frac{۱۲}{۵}\sqrt{۲}$، $\frac{۸}{۱۹}\sqrt{۵۷}$

۲۳- $\frac{۱}{۴}\sqrt{۷}$، $۲\text{ل} = \frac{۹}{۲}$

۲۴- $۷\text{لا}^{۲} - ۲\text{لاما} + ۷\text{ما}^{۲} - ۱۸\text{لا} - ۳۴\text{ما} + ۳۹ = ۰$، $۲\sqrt{۲}$

۲۵- $\frac{۸}{۳}\sqrt{۲}$، $\frac{۴}{۳}\sqrt{۶}$ ۲۶- $(\frac{۱}{۳}، \frac{۴}{۳})$، (۳، ۴)

۲۷- $(\frac{۷}{۳}، \frac{۱۰}{۳})$، $۳(\text{لا} + \text{ما}) = ۲۹$

۲۸- $۲۱۶\text{لا}^{۲} - ۴۲\text{لاما} + ۲۰۹\text{ما}^{۲} - ۱۸۳\text{لا} - ۱۹۴\text{ما} - ۱۲۴ = ۰$

۳۰— $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲۵} + \frac{\text{ما}^{۲}}{۶} = ۱$ ۳۱— $\frac{۴}{۵}$ ، ۲ل = $\frac{۱۸}{۵}$

۳۲— ج = $\pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۷}$ ، ($\mp \frac{۶}{۳۷}\sqrt{۳۷}$ ، $\pm \frac{۱}{۷۴}\sqrt{۳۷}$)

۳۳— ما = لا $\pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$

۳۴— $\pm \frac{\text{ا}^{۲}\,\text{مس عہ}}{\sqrt{\text{ب}^{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ}}}$ ، $\mp \frac{\text{ب}^{۲}}{\sqrt{\text{ب}^{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ}}}$

۳۵— $(\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\,\text{لا} - \frac{۱}{۲}\,\text{ما} + ۱)^{۲} / ۹ + (\frac{۱}{۲}\,\text{لا} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\,\text{ما} + ۱)^{۲} = ۱$

۳۸— $(\frac{۳}{۵} ، \frac{۶}{۵})$ ۴۱— $\frac{۱}{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، (۱ ، $\pm \frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$)

۴۳— دوسرا، دونوں

۴۷— (۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ، (۳ $\pm \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$ ، ۰)، لا = ۳ $\pm$ ۲$\sqrt{۳}$

(۲) دائرہ، خروج المرکز = ۰، ماسکے مرکز ($\frac{۵}{۸}$ ، ۰) پر، مرتب لاتناہی پر۔

۴۸— ثابت خطوں کو محور مانو، سلاخ کا میلان محور لا کے ساتھ طہ فرض کرو۔ اگر ا، ب سلاخ کے حصوں کے طول ہوں تو لا = ا جم طہ، ما = ب جب طہ، طہ کو ساقط کرو۔

۴۹— (۰، ۰)، لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰، لا جم عہ + ما جب عہ + $(۱ + \text{ز}^{۲}) / (۱ - \text{ز}^{۲})$ ع = ۰

۵۰— ۳ $\text{لا}^{۲}$ − ۲ لا ما + ۳ $\text{ما}^{۲}$ − ۲ ($\sqrt{۳}$ − ۱) ا ما = ۰

۵۱— $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{۲\,\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۰$

باب پنجم (صفحات ۸۶ - ۱۱۳)

۱— ۲ لا ما − ۲ لا + ۲ ما − ۳ = ۰ ۳— ۳ $\text{لا}^{۲}$ − $\text{ما}^{۲}$ + ۲۶ لا + ۱۱ = ۰

۴— (۱) ۱، $\sqrt{۲}$ (۲) ۲$\sqrt{۶}$، (۳) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۵}$، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ (۴) $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$، $\sqrt{\frac{ج}{ب}}$

۵— $\sqrt{۳}$، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۷}$، $\sqrt{\frac{ا+ب}{ب}}$

۷— (۱) $\sqrt{-۶}$، $\frac{۳}{۲}\sqrt{-۱۰}$ (۲) $\frac{۲}{۱۱}\sqrt{۱۱}$، $\frac{۱}{۳}\sqrt{۶}$ (۳) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$، $\frac{۱}{۵}\sqrt{-۱۰}$

۸— $\frac{۲}{۳۵}\sqrt{۷۰}$، $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۲۹}$　　۱۳— $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$، $(۴، -\frac{۱}{۲})$، $(-۲، -\frac{۱}{۲})$

۱۴— $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$، $(۲\sqrt{۲}-۱، ۳)$، $(-۲\sqrt{۲}-۱، ۳)$

۱۵— $\sqrt{۵}$، $(\sqrt{۷}-۲، ۱)$، $(-\sqrt{۷}-۲، ۱)$

۱۶— $\sqrt{۱۰}$، $(\sqrt{۳}، ۳)$، $(\sqrt{۳}، -۳)$

۱۷— ۲ل = $\frac{۱}{۲}$ ۲۴، ز = $\frac{۱}{۴}\sqrt{۶۵}$، ج س = $\sqrt{۶۵}$، ج لا = $\frac{۱۶}{۶۵}\sqrt{۶۵}$

۱۸— ۲ل = ۸　　۱۹— $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۴}{۳}\sqrt{۳}$

۲۰— ۲$\sqrt{۲}$، ۲$\sqrt{-۳}$

۲۱— ۳لا^۲ + ۱۰لاما + ۳ما^۲ − ۴۲لا − ۱۶ما + ۱۶ = ۰، ۲ل = ۲$\sqrt{۱۰}$

۲۵— $\frac{۴لا^۲}{۹} - \frac{۴ما^۲}{۵۵} = ۱$، ۲ل = $\frac{۵۵}{۳}$　　۲۶— $\frac{۸}{۳}$

۲۷— ف = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$، $(-\frac{۳}{۲}\sqrt{۵}، -\frac{۳}{۴})$

۲۸— ما = لا $\pm \frac{۳}{۲۰}\sqrt{۳۹۰}$　　۲۹— حقیقی

۳۰— $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$، $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۵}$　　۳۲— ۱۲ یا $\frac{۴}{۵}$

۳۴— $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$　　۳۹— لاما = $\frac{ا^۲}{۲}$　　۴۰— لاما = $\frac{۲۵}{۲۴}$

۴۱— لاما = $\frac{ج(ا+ب)}{۴اب}$　　۴۲— لاما = ۲$\sqrt{۲}$

۴۳— ک = ± ۲ج$\sqrt{-م}$　　۴۴— م = $\frac{جب\ ط}{جب(اسہ-ط)}$ منفی ہے،

اس لئے طرح سے

۴۶ — لا^۲ + ۶ لا ما + ما^۲ − ۱۶ لا − ۸ ما + ۸ = ۰

۴۷ — ۲ ل = ۲ $\sqrt{۶}$ ۵۱ — (لا + ما − ۱) (لا − ما − ۲) = $\frac{۵}{۲}$

۵۵ — لا = ۰، لا + ما = ۰، لا = ۰، لا − ما = ۰، ما = ۰، لا + ما = ۰

آزمائشی پرچہ ۲ (صفحہ ۱۱۳)

۱ — دفعات ۵۶، ۶۲، ۱۷، ۴۷، ۷۶، ۸۳

۲ — ز = $\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$، ع، ع ہیں ($\frac{۱}{۳}$ ،۱)، ($\frac{۱}{۳}$ ،۰) اور ص، ص ہیں

($\frac{۲}{۳}$ ،$\frac{۱}{۲}$)، (۰ ،$\frac{۱}{۲}$)، ۲ ل = $\frac{۴}{۹}$، اوتار خاص کی مساواتیں ہیں

ما = $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۶}\sqrt{۵}$ اور ما = $\frac{۱}{۲}$ − $\frac{۱}{۶}\sqrt{۵}$

۳ — دفعہ ۶۴ ۴ — دفعہ ۵۹

۵ — ج مقطوعہ ہے محور لا پر ۶ — دفعہ ۶۹ ۷ — ($-\frac{۱}{۲}$، ۲ ± ۲$\sqrt{۵}$)

۸ — دفعہ ۸۶ ۹ — دفعہ ۸۳

۱۰ — (لا + ما + ۱) (۲ لا − ما + ۲) = $\frac{۸۱}{۴}$

باب ششم

(صفحات ۱۱۵ − ۱۳۸)

۱ — (−۸، ۴) ۲ — (۱، ۱) ۳ — ($\frac{۱}{۲}$، ۲)

۴ — مرکز خط ۲ لا + ۱ = ۰ کی سمت میں لا انتہا فاصلے پر ہے۔

۵ — ($-\frac{۳}{۴}$، $\frac{۵}{۴}$)، ۳ لا^۲ + ۲ لا ما − ما^۲ + $\frac{۳}{۴}$ = ۰

۶ — ($-\frac{۱}{۸}$، $-\frac{۱}{۲}$)، ۴ لا^۲ + ما^۲ + $\frac{۱۱}{۱۶}$ = ۰

۷- (۱۳، -۴)، لاما + ۲ ما² + ۳۷ = ۰

۹- -۴ لا² - ۸/۳ لاما + ۴/۳ ما² = ۱، - ۶۴/۱۱ لا² - ۱۶/۱۱ ما² = ۱،
- ۱/۳۷ لاما - ۲/۳۷ ما² = ۱

۱۱- ۱/۲ √۲ ، ۱/۲ اور لا + ما = ۰، لا - ما = ۰ اور ۲ لا² + ۴ ما² = ۱

۱۲- ۱/۳ √۳ ، ۱/۴ √۲ اور ۲ لا + ما = ۰، لا - ۲ ما = ۰ اور ۳ لا² + ۸ ما² = ۱

۱۳- √۶ ، √۲ اور لا + ما = ۰، لا - ما = ۰ اور لا²/۶ + ما²/۲ = ۱

۱۴- ۱/۹ √۳ ، ۱/۷۰ √-۷۰ اور ۴ لا - ۹ ما = ۰، ۹ لا + ۴ ما = ۰ اور
لا²/۲۷ - ما²/۷۰ = ۱

۱۵- (۱)، (۲)، (۳) ناقص اور (۴)، (۵) زائد۔

۱۸- لا² + ۲ لاما - ۲ ما² + لا + ما + ۱/۴ = ۰

۱۹- ۴ لا² + ۴ لاما + ۷ ما² + ۱۱ لا + ۹ ما + ۲ ۴۷/۸۴ = ۰

۲۰- ۳ لا² + لاما - ما² + ۲ ما - ۱۲/۱۳ = ۰

۲۱- لا = ۰، لا + ما = ۰ ۲۲- ما = ۰، لا - ما = ۰

۲۳- لا + ۳ = ۰، ما + ۲ = ۰ ۲۴- لا + ۱ = ۰، لا + ما = ۰

۲۵- لا - ۱ = ۰، ما + ۲ = ۰ ۲۶- لا = ۰، ۲ لا + ما - ۱ = ۰

۲۷- لا - ما - ۲ = ۰، ۳ لا + ۲ ما = ۰

۲۸- (۰، ۰)، (۰، ۰)، (-۳، -۲)، (-۱، ۱)، (۱، -۲)، (۱، ۰)، (۴/۵، -۶/۵)

۲۹- (۱۳/۱۷، ۳۹/۱۷) ۳۰- ۲۵ لا² - ۳۶ لاما + ۴۰ ما² = ۵۲

۳۱- لا²/۳ - ما²/۲ = ۱ ۳۴- دفعہ ۴۰۱ کا نتیجہ استعمال کرو

۳۵ — (۳ لا – ما + ۱) (لا + ما) = ۶ ۳۶ — لا (ما – ۳) + ۱ = ۰

۳۷ — (لا + ۲ ما + ۷) (۳ لا – ما – ۴) + ۳۹ = ۰

۳۸ — محور متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں، لا² + ۲ لا ما – ما² = ۰

۳۹ — (لا² – ما²) / (ا² – ب²) = لا ما / ھ² ۴۰ — ۲ لا² + لا ما – ما² – ۳ لا + ۳ ما = ۰

باب ہفتم

(صفحات ۱۳۹ – ۱۴۶)

۱ — مرکز (۱، ۱)۔ محور اعظم کی مساوات بلحاظ نئے مرکز کے لا – ما = ۰ ہے۔ نصف محوروں کے طول √۵ اور ۱/۳ √۱۵ یا ۲٫۲۴ اور ۱٫۲۹ ہیں۔ و لا پر مقطوعے = ۱٫۸۲ اور –٫۸۲ اور و ما پر = ۱٫۸۲ اور –٫۸۲

۲ — مرکز (۱۳/۵، ۹/۵)۔ محور اعظم لا = ۲ ما۔ نصف محوروں کے طول ۱/۵ √۴۰ اور ۱/۵ √۲۰ یا ۱٫۲۷ اور ٫۸۹، و لا اور و ما پر مقطوعے خیالی، لا = ۲ پر مقطوعے ۲٫۴۸ یا ٫۸۵

۳ — مرکز (–۱، ۳)۔ محور اعظم لا = ۰ ہے۔ نصف محوروں کے طول √۵ اور √۲ یا ۲٫۲۴ اور ۱٫۴۱ ہیں۔ و لا پر مقطوعے خیالی ہیں، و ما پر مقطوعے = ۵٫۸۴ اور ۰٫۱۶ —

۴ — مرکز (۴/۵، ۶/۵)۔ محور اعظم ۲ لا + ۳ ما = ۰ ہے۔ نصف محوروں کے طول ۱٫۴۷ اور ۱٫۰۳ ہیں۔ و لا پر مقطوعے خیالی ہیں، و ما پر مقطوعے = ۲٫۲۲ اور ٫۴۹ —

۵ — مرکز (۱، ۱)۔ محور اعظم لا + ۳ ما = ۰، نصف محوروں کے طول ۲٫۴۹ اور ۱٫۷۶ ہیں۔ و لا پر مقطوعے ۳٫۲۷، –۳٫۷۲ ہیں اور و ما پر = ۲٫۸۰، –٫۹۴

۶۔ مرکز (√۲، ۱)۔ محور اعظم ہے √۲ لا + ما = ۰، نصف محوروں کے طول ہیں ۲، ۱۔ و لا پر مقطوعے = ۲٫۸۳، ٫۹۴۔ منحنی و ما کو مس کرتا ہے ما = ۲ پر۔

۷۔ مرکز (۰، ۰)، محور اعظم ہے لا + ما = ۰، نصف محوروں کے طول ۳٫۴۶ اور ۲ ہیں۔ و لا پر مقطوعے = ± ۲٫۴۵ اور و ما پر = ± ۲٫۴۵۔

۸۔ (ا) لا − ما = ۰، لا + ما − ۲ = ۰ (ب) لا + ۱ = ۰، ما − ۳ = ۰
(ج) لا + ۳ما − ۴ = ۰، ۳لا − ما − ۲ = ۰

۹۔ مرکز (۰، ۰)، محور اعظم لا + ما = ۰، نصف محوروں کے طول ۱٫۴۱ اور ٫۸۲ ہیں، و لا پر مقطوعے ہیں ± ۱ اور و ما پر = ± ۱

باب ہشتم

(صفحات ۱۴۷-۱۵۳)

مفصلہ ذیل میں (ا) مرکز کے محدد ہیں (ب) قاطع اور مزدوج محوروں کی مساواتیں ہیں جبکہ مرکز مبدا ہو (ج) نصف محوروں کے طول ہیں (د) متقاربوں کی مساواتیں ہیں جبکہ مرکز مبدا ہو (ع) و لا پر کے مقطوعے (ف) و ما پر کے مقطوعے ہیں

۱۔ (ا) ۰-۱، -۲ (ب) ۳لا + ۲ما = ۰، ۲لا − ۳ما = ۰ (ج) ۱، ۲
(د) لا − ۸ما = ۰، ۷لا − ۴ما = ۰ (ع) ۹٫۴، ۱٫۵، -۳٫۴،
(ف) ۴٫۵، -۵٫۷، ۲

۲۔ (ا) $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۱}{۹}$ (ب) لا − ما = ۰، لا + ما = ۰
(ج) ٫۹۴، ۱٫۶۳ (د) ۳٫۷۳ لا + ما = ۰، ٫۲۷ لا + ما = ۰
(ع) ۲٫۱۶، −۱٫۱۶ (ف) ۲٫۱۶، −۱٫۱۶

۳۔ (ا) ۱، ۱ (ب) ۳لا − ۲ما = ۰، ۲لا + ۳ما = ۰

(ج) ٫۵۸، ٫۷۱ (د) ۳٫۲۵ لا + ما = ۰، ٫۰۹ لا - ما = ۰
(ع) ۱٫۱، -۹٫۱ (ف) ۴٫۴۵، ٫۷۱
۴- (ا) ۲، ۱ (ب) لا + ۲ما = ۰، ۲لا - ما = ۰
(ج) ۱، ۱ (د) ۴لا + ما = ۰، لا - ۴ما = ۰
(ع) ۲٫۷۸، -۱٫۴۴ (ف) ۹٫۷۴، ٫۰۶۶
۵- (ا) -۱، -۱ (ب) ما = ۰، لا = ۰
(ج) √۲، √۳ یا ۱٫۴۱، ۱٫۷۳ (د) ما = ± ۱٫۲۲ لا
(ع) ٫۶۳، -۲٫۶۳ (ف) خیالی
۶- (ا) -۲/۳، -۱/۲ (ب) ما = ۰، لا = ۰
(ج) √۳، √۳ یا ۱٫۷۳، ۱٫۷۳ (د) لا - ما = ۰، لا + ما = ۰
(ع) ۱٫۱۳، -۲٫۴۵ (ف) خیالی
۷- (ا) ۰، ۰ (ب) لا - ۳ما = ۰، ۳لا + ما = ۰
(ج) ۱٫۷، ۱٫۴۱ (د) ۷لا - ما = ۰، لا + ما = ۰
(ع) ± ٫۷۶ (ف) خیالی
۸- (ا) ۰، ۰ (ب) ۳لا - ما = ۰، لا + ۳ما = ۰
(ج) ٫۵۸، ۱٫۷۳ (د) ما = ۰، ۳لا + ۴ما = ۰
(ع) لامتناہی (ف) ± ۱٫۶۱

۹- (ا) -√۳ - ۱/۲، √۳/۲ - ۱ یعنی -۲٫۲۳، -٫۱۳
(ب) لا = √۳ ما، √۳ لا + ما = ۰
(ج) √۲ + ۱/۲ √۶ یعنی ۲٫۶۴
(د) ما = (۳ ± √۳) لا یعنی ما = ۴٫۷۳ لا اور ما = -۱٫۲۷ لا
(ع) -۲√۳ + ۱ ± √۱۳ یعنی ۱٫۲۸ یا -۶٫۲
(ف) √۳ + ۲ ± √۶ یعنی ۶٫۱۸ یا ۱٫۲۸

بابِ نہم

(صفحات ۱۵۴-۱۶۳)

۱- ما = ۰، ۳لا + ۲ = ۰
۲- ۲ما - ۱ = ۰، ۴لا + ۵ = ۰
۳- ۲لا - ۱ = ۰، ۴ما + ۵ = ۰
۴- لا + ما = ۰، لا - ما + ۱ = ۰
۵- لا + ما + ۱ = ۰، لا - ما - ۱ = ۰
۶- ۳لا + ۴ما - ۵ = ۰، ۴لا - ۳ما + ۷ = ۰
۷- ۳، ۱، ۱، ۳/۲ √۲، ۳/۲ √۲، ۱۷/۵
۸- دو متوازی خطوط مستقیم لا + ما = ± ۲
۹- لا - ما + ۱ = ۰، لا - ما + ۲ = ۰
۱۰- دو خطوط مستقیم ف لا + ق ما = ۰ کے متوازی
۱۱- دو منطبق خطوط مستقیم

بابِ دہم

(صفحات ۱۶۴-۱۶۸)

۲- ۲لا - ما + ۳ = ۰، لا + ۲ما = ۰، ۲√۵
۳- لا + ۳ما = ۰، ۳لا - ۵ما + ۲۵ = ۰، ۱/۲ √۱۰
۴- ۲لا + ۳ما + ۱ = ۰، ۳لا - ۲ما - ۱۰ = ۰، ۲/۱۳ √۱۳
۵- ۵لا - ۴ما + ۴ = ۰، ۴لا + ۵ما = ۰، ۳/۴۱ √۴۱
۶- ۷لا + ۹ما + ۱ = ۰، ۹لا - ۷ما + ۱۱ = ۰، ۱/۱۳۰ √۱۳۰

بابِ یازدہم (صفحات ۱۶۹-۱۸۵)

۱- خطوط مستقیم کا جوڑا ۲لا + ۴ما - ۷ = ۰، ۲لا - ۳ما + ۲ = ۰ جو

نقطہ ($\frac{۱۳}{۱۷}$ ، $\frac{۲۰}{۱۷}$) میں سے گذرتا ہے۔

۲۔ ناقص جس کا مرکز مبدأ ہے۔ نصف محور ۹ء۴ اور ۴۔ محوروں کی مساواتیں لا ۔ ۲ ما = ۰ ، ۲ لا ± ما = ۰ ، و لا پر مقطوعے = ± ۶۷ء۴ ، و ما پر مقطوعے = ± ۱۳ء۴

۳۔ مکافی ، محور ۳ لا ۔ ۴ ما + ۲ = ۰ ، راس پر کا مماس ۴ لا + ۳ ما + $\frac{۱}{۸}$ = ۰ ، وتر خاص = ۶ء۱۔ منحنی مماس کے اس جانب واقع ہے جس جانب کہ مبدأ نہیں ہے۔ و لا پر مقطوعے = ۔ ۷ ، ۴ ، ۔ ۱ ، و ما پر مقطوعے خیالی ہیں۔ منحنی (۲ ، ۷ء۱) ، (۲ ، ۔ ۲ء۴) میں سے گذرتا ہے۔

۴۔ ناقص جس کا محور اعظم ۲ لا + ما ۔ ۱ = ۰ ہے اور محور اصغر لا ۔ ۲ ما + ۳ = ۰ ، نصف محوروں کے طول ۲ ، $۱\frac{۱}{۳}$ ہیں ، و لا پر مقطوعے ۱ء۱ ، ۔ ۸ء ہیں اور و ما پر ۰۹ء۳ ، ۔ ۴۵ء ۔

۵۔ قائم زائد ، مرکز ($\frac{۱۴}{۱۷}$ ، $\frac{۳۹}{۱۷}$) ، اصلی محور ۶ء۳ لا + ما = ۰ کے متوازی ہے۔ نیم محوروں کے طول = ۸۹ء ، متقارب ان خطوط کے متوازی ۔ ما = ۷۷ء۱ لا ، ما = ۔ ۵۷ء۰ لا ، و لا پر مقطوعے ۷ء۴ ، ۳ء ، اور و ما پر ۱۶ء۳ ، ۴۴ء۰ ۔

۶۔ زائد جس کے متقارب لا ۔ ۲ ما + ۱ = ۰ ، لا + ۲ ما ۔ ۳ = ۰ ہیں۔ مرکز (۱ ، ۱)۔ منحنی کی ایک شاخ دونوں متقاربوں کے اس طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدأ ہے۔ نیم قاطع محور = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ ، نیم مزدوج محور = $\sqrt{۵}$ ۔ و لا پر کا مقطوعہ خیالی ہے اور و ما پر = ۲۲ء۲ ، ۔ ۲۲ء ، منحنی نقاط (۲ ، ۲۲ء۲) ، (۲ ، ۔ ۲۲ء) ، (۳ ، ۵ء۲) ، (۳ ، ۔ ۵ء) ، (۔۱ ، ۵ء۲) (۔۱ ، ۔ ۵ء) میں سے گذرتا ہے۔

۷۔ زائد جس کا مرکز مبدأ ہے اور ۳ لا + ۵ ما = ۰ قاطع محور ہے۔ نیم قاطع محور = $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ = ۵۸ء ، نیم مزدوج محور = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ = ۷۱ء ۔ متقارب ہیں

ما = ۔ ۸۸٫۶ لا، ما = ۳۶٫۰ لا۔ و لا پر مقطوعے = ± ۷۷٫ اور و ما
پر خیالی۔ منحنی نقاط (۱، ۱۵٫)، (۱، ۔۶٫۶۷)، (۲، ۶۵٫)، (۲، ۔۱۳٫۷)،
(۳۳٫، ۔۱)، (۔۲٫۹۶، ۔۱)، (۔۱٫۳۳، ۱)، (۲٫۹۶، ۱) میں سے گذرتا ہے

۸۔ قائم زائد، مرکز (۵، ۲) اور محور ما = ۲، لا = ۵۔
نصف محوروں کے طول = √۲۸ = ۵٫۲۹۔ متقارب ہیں لا ۔ ما = ۳،
لا + ما = ۷، و لا پر مقطوعے = ۱۰٫۶۶، ۔۶۶٫، و ما پر مقطوعے خیالی۔ منحنی
نقاط (۱۱، ۳٫۸۳)، (۱۱، ۔۸۳٫)، (۱۲، ۶٫۵۷)، (۱۲، ۔۲٫۵۷)
(۔۱، ۔۳٫۸۳)، (۔۱، ۸۳٫)، (۔۲، ۔۶٫۵۷)، (۔۲، ۲٫۵۷) میں سے
گذرتا ہے۔

۹۔ ناقص، مرکز (۲، ۔۳) اور محور لا ۔ ما = ۵، لا + ما = ۔۱، نصف محوروں
کے طول = √۲ یا ۱٫۴۱، ⅓√۶ یا ۸۲٫۔ و لا، و ما پر مقطوعے خیالی
ہیں۔ منحنی نقاط (۲، ۔۴)، (۲، ۔۲)، (۱، ۔۳)، (۳، ۔۳) میں سے
گذرتا ہے۔

۱۰۔ زائد، محور ۲ لا ۔ ما + ۱ = ۰، لا + ۲ ما ۔ ۲ = ۰، نصف محوروں کے
طول = ۳ اور ۳/۲، مرکز (۰، ۱)۔ متقارب ہیں لا = ۰،
۳ لا ۔ ۴ ما + ۴ = ۰، و لا پر مقطوعے خیالی ہیں اور و ما پر ∞۔
منحنی نقاط (۱، ۴)، (۲، ۳٫۶۲)، (۳، ۴)، (۵، ۵٫۸۷)، (۔۱، ۲)،
(۔۲، ۱٫۶۲)، (۔۳، ۲)، (۔۵، ۳٫۸۷) میں سے گذرتا ہے۔

۱۱۔ زائد، متقارب ۴ لا ۔ ما + ۱۲ = ۰، لا ۔ ۳ ما + ۹ = ۰، مرکز (۔ ۲۷/۱۱، ۲۴/۱۱)،
منحنی کی ایک شاخ دونوں متقاربوں کے اسی طرف واقع ہے جس طرف
کہ مبدأ ہے۔ و لا پر مقطوعے = ۔ ۱۰٫۳۶، ۔ ۱٫۶۴ اور و ما پر
۳٫۱۳، ۱٫۷۔ منحنی نقاط (۔۲، ۶٫۹۱)، (۔۲، ۔۵۸٫)، (۔۳، ۴٫۸)،
(۔۳، ۔۲٫۸)، (۔۴، ۳٫۵۴)، (۔۴، ۔۴٫۹۵)، (۔۵، ۔۹٫۲۷)،
(۔۵، ۲٫۶۶)، (۱، ۱٫۷)، (۱، ۲٫۳۳) میں سے گذرتا ہے۔

۱۲— دو خطوط مستقیم ۴ لا + ۵ ما − ۷ = ۰، ۲ لا − ۳ ما + ۵ = ۰ جو ایک
ایک دوسرے کو نقطہ $(-\frac{۲}{۱۱}، \frac{۱۷}{۱۱})$ پر قطع کرتے ہیں۔ و لا پر مقطوعے
$= -\frac{۵}{۲}، \frac{۷}{۴}$ اور و ما پر $= \frac{۵}{۳}، \frac{۷}{۵}$ ۔

۱۳— مکافی، محور لا + ۱ = ۰، راس پر کا مماس ۳ ما + ۲ = ۰، وتر خاص
= ۴، منحنی اور مبدا راس پر کے مماس کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔
و لا پر مقطوعے خیالی ہیں اور و ما پر = −۱، منحنی نقاط (−۳، −۲)،
(۱، −۲) میں سے گذرتا ہے۔

۱۴— مکافی، محور ۲ لا − ۳ ما + $\frac{۱۷}{۱۱}$ = ۰، راس پر کا مماس ۳ لا + ۲ ما − $\frac{۲۸}{۱۴۳}$ = ۰،
وتر خاص = ٫۴۵، منحنی اور مبدا راس پر کے مماس کے ایک ہی جانب
واقع ہیں، و لا پر مقطوعے = −۱٫۸۷، −۱٫۱۳، و ما پر = ٫۳۳، منحنی
نقاط (−۱، −۱)، (−۱، ۱٫۳۳)، (−۲، −۱٫۹۴)، (−۲، −٫۰۶) میں سے
گذرتا ہے۔

۱۵— زائد، مرکز (−۱، ۰) اور محور ۱٫۶۲ لا − ما + ۱٫۶۲ = ۰، لا + ۱٫۶۲ ما + ۱ = ۰،
نیم قاطع محور = ٫۷۹، نیم مزدوج محور = ۱٫۲۷، متقارب ہیں ما = ۰،
ما + ۲ لا + ۲ = ۰، و لا پر مقطوعے = ∞، و ما پر = −۲٫۴۱، ٫۴۱،
منحنی نقاط (۱، −۴٫۲۴)، (۱، ٫۲۴)، (۲، −۶٫۱۶)، (۲، ٫۱۶)،
(−۱، ±۱)، (−۲، ۲٫۴۱)، (−۲، −٫۴۱) میں سے گذرتا ہے۔

۱۶— زائد، مرکز (−٫۲، ۱٫۴)، محور ۲ لا + ما − ۱ = ۰، لا − ۲ ما + ۳ = ۰،
نیم قاطع محور کا طول = ۲، نیم مزدوج محور کا طول = $\frac{۱}{۳}$، متقارب ہیں
۸ لا − ما + ۳ = ۰، ۴ لا + ۷ ما − ۹ = ۰، و لا پر مقطوعے خیالی ہیں
اور و ما پر = ۵٫۱۶، −٫۳۴، منحنی نقاط (۱، ۱۰٫۲۱)، (۱، −٫۳)،
(۲، ۸٫۵۹)، (۲، −٫۴۴)، (−۱، −۶٫۳۹)، (−۱، ۲٫۴۳)،
(−۲، ۲٫۴۳)، (−۲، −۱٫۵۶) میں سے گذرتا ہے۔

۱۷۔ مکافی جس کا محور ما + ۲ = ۰ ہے اور راس پر کا مماس لا − ۱/۹ = ۰، وتر خاص = ۶، منحنی راس پر کے مماس کے اس جانب واقع ہے جس جانب کہ مبدأ ہے۔ و لا پر مقطوعے = −۱/۲، و ما پر = −۱، −۳

۱۸۔ زائد، متقارب ۴لا − ما + ۱۲ = ۰، لا − ۳ما + ۹ = ۰، مرکز (−۲۷/۱۱، ۲۴/۱۱) مبدأ اور منحنی متقاربوں کے ایک ہی زاویہ میں واقع ہیں۔ و لا پر مقطوعے ہیں ۰، −۱۲ اور و ما پر ۰، ۱۵، منحنی نقاط (۲، ۲۱٫۹۷)، (۲، ۱٫۷)، (۵، ۳۴٫۲۵)، (۵، ۴٫۳)، (−۲، ۲٫۹)، (−۲، −۹٫۲)، (−۵، −۱۰٫۹)، (−۵، ۳٫۴) میں سے گذرتا ہے۔

۱۹۔ دو خطوط مستقیم لا − ما + ۱ = ۰، لا + ما − ۳ = ۰ جو ایک دوسرے کو نقطہ (۱، ۲) پر قطع کرتے ہیں۔

۲۰۔ مکافی، محور ۲لا − ۳ما + ۴ = ۰، راس پر کا مماس ۳لا + ۲ما + ۱۶ = ۰، وتر خاص = ۱/√۱۳ = ٫۲۸، منحنی راس پر کے مماس کے مبدأ والی جانب واقع ہے۔ و لا پر مقطوعے ہیں ۰، −۳٫۲۵ اور و ما پر ۰، ۲٫۸۹، منحنی نقاط (−۲، ۱٫۱۷)، (−۲، −٫۹۵) میں سے گذرتا ہے۔

۲۱۔ دائرہ، مرکز (۵، −۳) اور نصف قطر = ۶، و لا پر مقطوعے = ۱۰٫۲۰، −٫۲۰ اور و ما پر = −۶٫۳۲، ٫۳۲

۲۲۔ قائم زائد، مرکز (٫۶، ٫۸)، محور ۳لا − ما − ۱ = ۰، لا + ۳ما = ۳، نیم محور = ۱٫۲۶، متقارب ہیں ۲لا + ما − ۲ = ۰، لا − ۲ما + ۱ = ۰، و لا پر مقطوعے خیالی ہیں اور و ما پر = ۲٫۸۵، −٫۳۵۔ منحنی نقاط (۱، ۲)، (۱، −۱)، (۲، ۲)، (۲، −۲٫۵)، (−۱، ۴٫۵۴)، (−۱، −٫۵۴) میں سے گذرتا ہے۔

۲۳ — دو متوازی خطوط مستقیم ۲لا − ۳ما − ۵۴ء۳ = ۰، ۲لا − ۳ما + ۵۴ء۱ = ۰، ولا پر مقطوعے = ۲۷ء۱، − ۲۷ء۰ اور وما پر = − ۱۸ء۱، ۸۴ء۰

۲۴ — مکافی، محور ۳لا + ۴ما − ۳ = ۰، راس پر کا مماس ۸لا − ۶ما − ۷ء۴ = ۰، وتر خاص = ۴ء۳، منحنی راس پر کے مماس کے مبدأ والی جانب واقع ہے۔ ولا پر مقطوعے ہیں ۶۹ء۲، − ۵۸ء۱، وما پر = ۷۴ء۳، − ۸۷ء۱، منحنی نقاط (۱، ۷۶ء۱)، (۱، − ۳۸ء۱)، (۲، ۴۷ء۱)، (۲، − ۸۶ء۱)، (۳، − ۳۶ء۱)، (۳، − ۲۷ء۲) میں سے گذرتا ہے۔

۲۵ — دو خطوطِ مستقیم ۵لا + ۴ما − ۳ = ۰، ۳لا − ۷ما + ۲ = ۰ جو ایک دوسرے کو نقطہ ($\frac{۱۳}{۴۷}$، $\frac{۱۹}{۴۷}$) پر قطع کرتے ہیں۔ ولا پر مقطوعے ہیں $\frac{۳}{۵}$، − $\frac{۲}{۳}$ اور وما پر = $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۲}{۷}$۔

۲۶ — دو خیالی متوازی خطوط مستقیم ۲لا + ۶ما + ۵ = ± $\sqrt{-۲۳}$

۲۷ — ناقص، مرکز ($\frac{۱}{۱۳}$، $\frac{۵}{۱۳}$)، محور ۲لا − ۳ما + ۱ = ۰، ۳لا + ۲ما − ۱ = ۰، نیم محوروں کے طول = ۲، ۱، ولا پر مقطوعے = − ۵۸ء۱، ۱۸ء۱ اور وما پر = ۳۹ء۱، − ۷۹ء۰ ۔

۲۸ — قائم زائد، متقارب لا + ما − ۲ = ۰، لا − ما + ۴ = ۰، مرکز (−۱، ۳)، محور لا + ۱ = ۰، ما − ۳ = ۰، نیم محوروں کے طول = $\sqrt{۲۰}$ = ۴۷ء۴، ولا پر مقطوعے خیالی، وما پر = ۵۷ء۷، − ۵۷ء۱، منحنی نقاط (−۲، ۵۷ء۷)، (−۲، − ۵۷ء۱)، (۱ یا −۳، ۹۰ء۷)، (۱ یا −۳، − ۹۰ء۱)، (۳ یا −۵، ۹)، (۳ یا −۵، −۳) میں سے گذرتا ہے۔

۲۹ — مکافی، محور ۷لا + ۹ما + ۱ = ۰، راس پر کا مماس ۹لا − ۷ما + ۱۱ = ۰، وتر خاص = $\frac{۱}{\sqrt{۱۳۰}}$ = ۰۸۸ء۰، منحنی اور مبدأ راس پر کے مماس کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔ ولا اور وما پر مقطوعے خیالی ہیں، منحنی نقاط

(-۱، ۹٫۶)، (-۱، ۵٫۲)، (-۲، ۱٫۹۵)، (-۲، ۱٫۳۰) میں سے گذرتا ہے۔

۳۰ — دو متوازی خطوط مستقیم لا + ۲ ما + ۱ = ۰، لا + ۲ ما + ۲ = ۰، ولا پر مقطوعے = -۱، -۲ اور و ما پر مقطوعے = -۱/۲، -۱

۳۱ — قائم زائد، مرکز مبدأ، محور ۱۵ لا + ۸ ما = ۰، ۸ لا - ۱۵ ما = ۰،
نصف محوروں کا طول = ۱، متقارب ہیں ما = ۲۳/۷ لا، ما = -۷/۲۳ لا
ولا پر مقطوعے خیالی ہیں، و ما پر = ± ۱٫۳۴، منحنی نقاط (۱، ۳٫۷۳)،
(-۱، -۳٫۷۳)، (۱، -۷٫۵)، (-۱، ۷٫۵) میں سے گذرتا ہے۔

۳۲ — زائد، مرکز (-۱، -۲)، محور ۳ لا + ۲ ما + ۷ = ۰، ۲ لا - ۳ ما - ۴ = ۰،
نیم قاطع محور = ۱، نیم مزدوج محور = ۲، متقارب ہیں ۷ لا - ۴ ما - ۱ = ۰،
لا - ۸ ما - ۱۵ = ۰، ولا پر مقطوعے = ۱۵٫۹۴، -۴٫۳۴،
و ما پر = ۴٫۵، -۲٫۵۷، منحنی نقاط (۱، -۲٫۱۹)، (۱، ۱٫۹۴)،
(-۱، -۳٫۲۷)، (-۱، -۲٫۷)، (-۲، -۴٫۴۵)، (-۲، -۱٫۴۲)،
(-۳، -۵٫۹۴)، (-۳، -۱٫۸۱) میں سے گذرتا ہے۔

۳۳ — ناقص، مرکز (۲√۳ - ۳/۲، -۲ - ۳/۲ √۳) یعنی (۱٫۹۶، -۴٫۶۰)
محور لا + √۳ ما + ۶ = ۰، √۳ لا - ما - ۸ = ۰، نصف محور = ۵ اور ۳،
ولا پر مقطوعے خیالی، و ما پر = -۱٫۹۱، -۶٫۹۹، منحنی نقاط
(-۲، -۴٫۹۳)، (-۲، -۱٫۶۵)، (-۱، -۶٫۱۱)، (-۱، -۱٫۱۲)،
(۲، -۷٫۹)، (۲، -۱٫۳۷)، (۴، -۸٫۲۱)، (۴، -۲٫۳۴)،
(۶، -۷٫۵)، (۶، -۴٫۳۷) میں سے گذرتا ہے۔

۳۴ — ناقص، مرکز (۱، ۱)، محور لا - √۳ ما + (√۳ - ۱) = ۰، √۳ لا + ما
- (√۳ + ۱) = ۰، نصف محوروں کے طول = √۳، √۲، ولا پر مقطوعے = ۲٫۰۴،
- ۱٫۴ اور و ما پر مقطوعے = ۲٫۰۲، -۱٫۳۱۔

۳۵ — ناقص، مرکز (۸، ۴)، محور ۲٫۴۱۴ لا - ما - ۱۵٫۳۱۲ = ۰ اور

۳۴ — ۱۴ء۰ لا + ما − ۲۳۱۲ء۷ = ۰، نیم محوروں کے طول = ۶ء۸، ۴۶ء۲
لا کا محور لا = ۱۴ پر مماس ہے اور ما کا محور ما = ۷ پر مماس ہے۔
۳۶ — ناقص، مرکز (−۱، ۸)، محور ہیں (۱ + √۲) لا + ما − (۷ − √۲) = ۰
اور لا − (√۲ + ۱) ما + ۹ + ۸√۲ = ۰، نیم محوروں کے طول = ۹ء۳۹، ۷
۰۶ء۳، و لا پر مقطوعے خیالی ہیں، و ما پر = ۲ء۵۲، ۱۴ء۸، ۱۲، منحنی
نقاط (−۲، ۱۷ء۳)، (−۲، ۲۹ء۱۴) میں سے گذرتا ہے۔
۳۷ — ناقص، محور ۳ لا − ما + ۳ = ۰، لا + ۳ ما = ۰، مرکز (−۹ء۰، ۳ء۰)،
نصف محوروں کے طول = ۲، ۱، و لا پر مقطوعے = −۲، ۵۴ء۰ اور
و ما پر مقطوعے = ۲، −۴۵ء۱

آزمائشی پرچہ ۳ (صفحہ ۱۸۵)

۱ — دفعات ۹۴ − ۹۶
۲ — ۸۵ لا^2 + ۳۰ لا ما + ۴۵ ما^2 − ۳۸ لا − ۶۶ ما − ۳۳۵ = ۰
اور ۴۵ لا^2 − ۳۰ لا ما + ۸۵ ما^2 + ۱۲ لا − ۱۱۶ ما − ۳۲۰ = ۰
۱۰ — ھ^2 = ا ب اور ا ف^2 + ب گ^2 = ۲ ف گ ھ

باب دوازدہم

(صفحات ۱۸۷ — ۲۲۷)

۳ — ۳ لا + ما − ۴ = ۰ ۴ — لا + ما − ۳ = ۰، ۲ لا + ما + ۴ = ۰
۵ — لا = ± √۳، ما = ∓ √۳ ۹ — (−$\frac{۱۷}{۵}$، −$\frac{۵}{۴}$)
۱۳ — ۴۵° اور مس$^{-1}$ $\frac{۱}{۳}$ محور کے ساتھ — (−۲، ۰)، (−۱۰، −۲)
۱۴ — خط ہے لا + ۵ = ۰، منحنی مکافی ہے، (−$\frac{۳۱}{۲}$، $\frac{۴۳}{۲}$)

۱۵— $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۰$

$۳(۴\text{لا} - \text{ما} + \frac{۳}{۲})^2 + ۲(۴\text{لا} - \text{ما} + \frac{۳}{۲})(-\text{لا} - ۳\text{ما} + ۱) + ۴(-\text{لا} - ۳\text{ما} + ۱)^2 = ۰$

یا $۲۰۸\text{لا}^2 - ۴۰۱\text{لاما} - ۱۵۶\text{ما}^2 + ۱۵۶\text{لا} + ۴۰۱\text{ما} - ۱ = ۰$

۱۸— (۱) خط مستقیم (۲) مخروطی تراش

۱۹— داخلاً، ۱۳ : ۳　　۲۰— $۲\text{لا} + \text{ما} = ۷$

۲۱— ۳ : ۲، ۳ : ۴، دونوں خارجاً، (۲، ۲)، $(۳، \frac{۳}{۲})$

۲۴— $\text{لا} - ۲\text{ما} - ۱ = ۰$، $۶\text{لا} - ۸\text{ما} - ۹ = ۰$، $\text{لا} - \text{ما} - ۲ = ۰$

۲۵— $\pm ۲\sqrt{۲}\,\text{لا} + ۳\text{ما} + ۶ = ۰$، $\pm\sqrt{۵}\,\text{لا} + ۳\text{ما} + ۳ = ۰$، $\pm\sqrt{۱۳}\,\text{لا} + ۳\text{ما} + ۹ = ۰$

۲۶— $\pm\sqrt{۳}\,\text{لا} \pm ۲\text{ما} = ۴$، $\text{لا} \pm \text{ما} + ۲\text{ف} = ۰$، $\pm ۳\text{لا} \pm \sqrt{۱۰}\,\text{ما} = ۹$

۲۷— $\text{لا} + \text{ما} + ۲ = ۰$، $\text{لا} + \text{ما} - ۲\sqrt{۲} = ۰$

۲۹— $\text{لا}(\text{لاَ} + \text{ماَ}\ \text{جم}\ \text{سہ} + \text{گ}) + \text{ما}(\text{لاَ}\ \text{جم}\ \text{سہ} + \text{ماَ} + \text{ف}) + \text{گ}\ \text{لاَ} + \text{ف}\ \text{ماَ} + \text{ج} = ۰$

۳۰— $۲۹۹\text{لا}^2 + ۲۳۱۰\text{لاما} + ۲۲۴۷\text{ما}^2 + ۲۷۷۲\text{لا} - ۲۹۴۰\text{ما} - ۲۲۵۹۶ = ۰$

۳۱— $\text{لا}(\text{لا} - \text{ما} + \text{ف}) = ۰$　　۳۲— $\text{ب}^2\text{لا}^2 - ۸\text{ا}^2\text{ما}^2 = ۰$

۳۳— (ا) $۲۸\text{لا}^2 + ۳۸۴\text{لاما} + ۱۳۱\text{ما}^2 + ۵۱۲\text{لا} + ۸۶۴\text{ما} + ۹۶ = ۰$

(ب) $۳\text{لا}^2 + ۲\text{لاما} + ۸\text{ما}^2 - ۸\text{لا} - ۱۸\text{ما} + ۱۳ = ۰$، دو خیالی خطوط مستقیم

۳۴— $۱۲۱\text{لا}^2 - ۱۵۶\text{لاما} + ۲۴\text{ما}^2 + ۷۰\text{لا} + ۶۰\text{ما} - ۹۵ = ۰$، $\text{مس}^{-۱}(۱۷۸)$

۳۶— $\frac{\text{لا}\,\text{لا}_۱}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_۱}{\text{ب}^2} = ۱$　　۳۷— $\text{ما}\,\text{ما}_۱ = ۲\text{ا}(\text{لا} + \text{لا}_۱)$

۳۸— $\text{ما}_۱\text{لا} + \text{لا}_۱\text{ما} = ۲\text{ج}^2$　یا　$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_۱} + \frac{\text{ما}}{\text{ما}_۱} = ۲$

۳۹— $\text{لا}(\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ھ}\,\text{ما}_۱) + \text{ما}(\text{ھ}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱) = ۱$

۴۰— $\text{لا}(\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ھ}\,\text{ما}_۱ + \text{گ}) + \text{ما}(\text{ھ}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱) + \text{گ}\,\text{لا}_۱ = ۰$

۴۱— $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۰}$　　۴۳— $\text{ن}^2\text{ا}^2 + \text{م}^2\text{ب}^2 = \text{ص}^2\text{ن}^2$

۴۴ – $\sqrt{۳}$ لا – ما = ± $\sqrt{۱۳}$ ۴۵ – $\frac{۱}{۲}\sqrt{ا^۲ + ۳ ب^۲}$

۴۹ – $ا^۲ م^۲$ + ۲ ا ل ع + ب $ع^۲$ = ۰

۵۰ – (۱) – ۲۶، – ۱۲۱؛ (۲) – ۵۲، ۳؛ ۲۶؛ (۳) ۴۱۲، – ۱۶۹۸

۵۳ – لا جم طہ + ما جب طہ = ا (۱ + جم طہ)

۵۴ – $\frac{ما_۱ ما_۲}{ف}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ($ما_۱ + ما_۲$)

۵۶ – (۱، ۲)، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ ۵۷ – $ما^۲$ – ۴ ا لا = $ا^۲ ن^۲$

۵۸ – $س ت^۱$، $\frac{۱}{۲}$، ۲ $\sqrt{۵}$

۶۱ – جب ا < ب تو دو عمودی مماس نہیں کھینچ سکتے۔

۶۲ – $ما^۲$ = ($\frac{ف^۲}{ق^۲}$ + $\frac{ق^۲}{ف^۲}$ + ۲) ا لا

۶۵ – $\frac{۲ لا_۱ لا_۲}{لا_۱ + لا_۲}$ ، $\frac{۲ ما_۱ ما_۲}{ما_۱ + ما_۲}$

۶۸ – ۲ لا – ۳ ما + ۹ = ۰، (– $\frac{۱۵}{۲}$، – ۲)

۷۵ – $لا^۲$ $مس^۲$ عہ – $ما^۲$ + ۲ ا لا ($مس^۲$ عہ + ۲) + $ا^۲$ $مس^۲$ عہ = ۰

باب سیزدہم

(صفحات ۲۲۸ – ۲۵۸)

۱ – (۱) ۳ لا + ما + ۲ = ۰ (۲) ۲ لا + ما + ۱ = ۰

۹ – ۲ (۱ + م $م_۱$) + م + $م_۱$ = ۰ ۱۲ – $ا^۲ ا_۱$ + $ب^۲ ب_۱$ = ۰

۱۶ — ما = ± ب لا / ا

۱۹ — ج ن = √۵ ، عمود = ۶/۱۰ √۱۰ ، جب سہ = ۷/۱۰ √۲

۲۰ — ± √۳ ، ∓ √۳ 　　 ۲۲ — ۲،۱۸ ، ۴،۵ ؛

۲۳ — ۳،۹۲ ، ۱،۶۲

۲۵ — ۱/۲ لا² − ما² + ۱ = ۰ ، ۳ لا² − ما² + ۲ = ۰ ، ا لا² + ۲ حہ لا ما + ب ما² + ج = ۰ ؛

لا ما + ۲ لا + ۳ ما + ۱۱ = ۰

۲۶ — لا² + ۲ لا ما − ما² + ۲ لا + ۴ ما + ۱/۲ = ۰ ، لا² + ۲ لا ما − ما² + ۲ لا + ۴ ما + ۱ = ۰

۲۸ — ۳ لا + ۴ ما = ۰ 　　 ۳۱ — ۱،۵۲ ، ۵،۶ ؛

۳۲ — ج ن = √۲ ، ج ق = ۱/۶ √۷۸ ، جب⁻¹ (۱/۲۶ √۲۶)

۳۳ — ما = ۳/۲ ، (۳/۴ ، ۳/۲) 　 ۳۴ — ما = ۱ ، (−۱ ، ۱/۲)

۳۶ — ۳ لا + ۳ ما + ۲ = ۰

۳۸ — لا ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ۸ ف گ − ج = ۰

۴۰ — ا² جب طہ (لا جب طہ − ما جم طہ) / (ا² جم² طہ + ب² جب² طہ)

− ب² جم طہ (لا جب طہ − ما جم طہ) / (ا² جم² طہ + ب² جب² طہ)

۴۱ — ۹ ا ا' + ۴ ب ب' = ۰ 　 ۴۴ — ا² لا² + ب² ما² = ا² (ا² − ب²)

۴۵ — لا + ما = ۰ 　　 ۴۶ — ما² = ۲ ا (لا − ا)

۴۷ — ا + حہ (م + م₁) + ب م م₁ = ۰

۴۸ — ا لا + ب ما = ۰ ، ب لا + ج ما = ۰ ، شرط ہے ب² = ا ج ۔
اُن تمام خطوط کی جو دو معلومہ متوازی خطوط مستقیم کو ملائیں ایک ایسا خط تنصیف کرتا ہے جو ان معلومہ خطوط کے متوازی ہو اور اِن کے عین درمیان ہیں

واقع ہو۔

۴۹۔ ۲√۲ ا جب (س/۲) ، ۲√۲ ا جم (س/۲)

۵۲۔ لا²/ا² + ما²/ب² = ۱   ۵۳۔ ۲ل

۵۷۔ الا² + ۲ھ لا ما + ب ما² + گ لا + ف ما = ۰

۶۳۔ ۳ (لا/ا² + م ما/ب²)² + (۱/ا² + م²/ب²) (لا²/ا² + ما²/ب² − ۱) = ۰

باب چہاردہم

(صفحات ۲۵۹-۲۷۴)

۱۔ ۵لا − ۳ما = ۲   ۲۔ ۶لا − ۳ما = ۲

۴۔ ھ (لاَ² − ماَ²) = (ا − ب) لاَ ماَ ، مبدا منحنی کا مرکز ہے اور عماد اسی صورت میں مرکز میں سے گذرتا ہے جبکہ (لاَ ، ماَ) ایک محور پر واقع ہو

۱۱۔ ۴ √(ا (ا + لاَ)³) / لاَ   ۱۳۔ ۳/√۱۰ ، −۱/√۱۰

۱۴۔ ۲/√۵ ، ۱/√۵   ۱۶۔ (۱، ۲)، (۱/۴، ۱)، (۹/۴، −۳)

۱۷۔ ا²/√(ا² + ب²) ، ب²/√(ا² + ب²)

۲۰۔ (۱) ۳لا − ۳√۳ ما = ۷ا (۲) لا − ما = ۳ا
(۳) √۳ لا + ما = ۵√۳ ا

۲۱۔ لا − ما = ۴ا

۲۳۔ ع² (ا² جب² عہ + ب² جم² عہ) = (ا² − ب²)² جم² عہ جب² عہ

۲۴- اگ/(ا^۲ - ب^۲)، ± ب √(ا(ا^۲ - ب^۲)^۲ - ا^۲گ^۲) /(ا^۲ - ب^۲)

۲۵- لا(۱ - ص^۲/ا^۲)، ما(۱ - ص^۲/ب^۲)   ۲۶- ۴√۲ ا

۲۷- ما^۲ = ۴ا(لا - ۴ا)

۲۹- (۱) محدود مقدار = صفر، ایسا خط دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ کا عماد نہیں ہوسکتا۔

۳۰- ا^۲/ب^۲ - ب^۲/م^۲ = (ا^۲ + ب^۲)   ۳۱- ما^۲ = ا(لا - ا)

۳۳- ما^۲ = ا(لا - ا)

پرچۂ امتحان ۴ (صفحہ ۲۷۴)

۱- لا(½م ق - گ) + ما(½م ف + ب ق + ف) - گ ف + ف ق - ج = ۰

۳- لا^۲ - ما^۲ + ۲ا لا + ا^۲ = ۰   ۴- ۱۰لا + ۲ما + ۲۵ = ۰

۵- ۳لا^۲ - ۴لا ما + ۲لا - ۳ما + ۳/۸ = ۰

باب پانزدہم

(صفحات ۲۷۶ - ۲۹۸)

۱- لا + ما - ۲ = ۰   ۲- ۱۴لا + ۱۰ما + ۱۷ = ۰   ۳- گ لا + ف ما + ج = ۰

۵- عماد   ۱۱- ۹/۱۰، - ۱۲/۵   ۱۲- ۱، ½

۱۳- - ½، ½   ۱۷- ب۱ل^۲ - ۲ص۱ل ص + ا۱م^۲ = ا۱ب۱ - ص۱^۲

۱۸- لا - ما = ۱

۱۹- ۳لا + ۳ما + ۵ = ۰، ۴لا + ۵ما - ۲ = ۰، لا - ۲ما = ا^۲

لا (ا + ۲ھ + گ) + ما (ھ + ۲ب) + گ = ۰

۲۰- (ا^{۲}ل، - ب^{۲}م)، (- $\frac{۱}{ل}$، - $\frac{۲ام}{ل}$)، (۲ج^{۲}م، ۲ج^{۲}ل)

۲۱- ا^{۲}ل لَ - ب^{۲}م مَ = ۱، ل + لَ + ۲ام مَ = ۰، ۲ج^۲(ل مَ + لَ م) = ۱

۳۰- - ع قطعہ، - ۲ اس عہ ۳۱ - سمت معلومہ کا مزدوج قطر

۳۳- ما^۲ = ۲ا لا - ا^۲ ۳۴- لا^۲ - ما^۲ = ۴ا^۲

۳۶- $\frac{ف}{ف^۲ - گ^۲}$، - $\frac{گ}{ف^۲ - گ^۲}$، لا^۲ - ما^۲ = ل لا - م ما

۳۹- بنیادی محور [اس خط کو محور ما مانو، تب دائروں کی مساواتیں ہونگی
لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ج = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ + ۲گَ لا + ج = ۰]

باب شانزدہم

(صفحات ۲۹۹ - ۳۳۳)

۱- (ما - ۱) = (لا - ۱)^۲ ۲- $\frac{(لا - ج)^۲}{ا^۲}$ + $\frac{(ما - د)^۲}{ب^۲}$ = ۱

۴- (۱) ۴۵°، وغیرہ (۲) جب $\frac{ب}{ا}$ = جم$^{-۱}$ز، وغیرہ

۷- (۱، ۲)، (۴، ۴)، ($\frac{۱}{۴}$، - ۱)، ($\frac{۹}{۴}$، - ۳) ۸- ۱

۹- $\frac{۱}{۱۲}$، $\frac{۱}{۶}$، $\sqrt{۳}$ ۱۰- (مہ$_۱$ + مہ$_۲$) ما - ۲لا = ۲ا مہ$_۱$ مہ$_۲$

۱۳- اگ = ۲ا + ا مہ^۲ ۱۴- $\frac{ا(مہ^۲ + ۲)^۲}{مہ^۲}$، $\frac{-۲ا(مہ^۲ + ۲)}{مہ}$

۱۵- مہ = ۱، ۲، - ۳

۲۳ـ لا(ا√۳ - ۱)/ا + ما(ا√۳ + ۱)/ب = ۲ ، لا/ا + ما/ب = ۱/۲ (√۳ + ۱)

۳۴ـ محوروں کے سرے ۳۸ـ {-ا ± √(ا² - ص ج)}/ا ص ، ج = ا/ص

۴۲ـ ما² - ۴ ا لا = (ا + لا)² مس² عہ ۴۹ـ ۲(لا + ما - ۱) = (لا - ما)²

۵۲ـ لا²/ا² + ما²/۲ب² = ۱

۵۹ـ لا + ا مم (عہ - بہ) = ۰ ، ما - ب مم (عہ - بہ) = ۰

۶۳ـ (اَ لا - ا ما)² (بَ لا - ب ما) + (اَ ب - ا بَ)³ = ۰

باب ہفدہم

(صفحات ۳۳۴ - ۳۵۰)

۵ـ ۳/۴ ، ۳ یا ۱/۲ ۱۱ـ دائرہ ۱۴ـ ا = ل/(ز² - ۱) ، ب = ل/√(ز² - ۱)

۱۷ـ وتر خاص اور کوئی دو ماسکی وتر جو اس سے مساوی زاوے بنائیں۔

۲۰ـ (ل ا - ز)² + ل² ب² = ۱ ۲۳ـ ر جم طہ = ۲ ا ، خط مستقیم جو محور پر عمود ہے۔

آزمائشی پرچہ ۵ (صفحہ ۳۵۰)

۳ـ (۳/۴ ، ۵/۹)

باب ہژدہم

(صفحات ۳۵۲ - ۳۷۹)

۴ـ ۲۱ لا² + ۳ لا ما + ۷ ما² = ۴۳ ۵ـ جَ س - ج سَ = ۰

۶۔ ۳لا^{۲} + ۲لا ما + ۳لا = ۳

۸۔ ۱۷لا^{۲} + ۲۶لا ما + ۱۷ما^{۲} ۔ ۶۰لا ۔ ۶۰ما + ۶۰ = ۰

۱۴۔ ۳لا^{۲} ۔ لا ما ۔ ۵ما^{۲} + لا + ما + ۱ = ۰

۱۵۔ ۵لا^{۲} ۔ ۲لا ما ۔ ۲ما^{۲} + ۹لا ۔ ۳ما = ۰

۲۰۔ √لا + √ما = √۸ا یا لا^{۲} + ما^{۲} ۔ ۲لا ما ۔ ۴√۲ ا(لا + ما) + ۸ا^{۲} = ۰

۲۴۔ ۲لا^{۲} ۔ ۳لا ما + ۲ما^{۲} ۔ ۲لا ۔ ۴ما = ۰ ۲۵۔ لا (لا ۔ ما ۔ ۱) = ۰

۲۶۔ (عہ ۔ بہ)(جہ ۔ لہ) / عہ بہ جہ لہ

۳۱۔ لا^{۲} / جتم^{۲} عہ ۔ ما^{۲} / جب^{۲} عہ = ا^{۲} ۔ ب^{۲} ۳۲۔ ۵(لا ۔ ما) = ۱

۴۵۔ ا / (لا ۔ ۲) + ب / (ما + ۱) + ج / (لا + ما) = ۰

۴۶۔ لا^{۲} + ما^{۲} ۔ ۳لا + ۳ما + ۴ = ۰

۴۷۔ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲} + ب^{۲} جہاں ا، ب ناقص کے نیم محور ہیں

۴۸۔ م / (۲ ۔ ک م ن) ، ن / (۲ ۔ ک م ن)

۵۱۔ لا = ± $\frac{۱}{۲}$ √۲ ا ، ما = ± $\frac{۱}{۲}$ √۲ ب

۵۶۔ دفعہ ۲۳۷ استعمال کرو۔

۵۷۔ لا^{۲} + ف لا ما ۔ ما^{۲} = ا^{۲} ۔ ب^{۲} جہاں ف کوئی مستقل ہے۔

۵۹۔ ± عہ / ا ± بہ / ب = ۱

۶۲۔ (استعمال کرو ع^{۲} = ا^{۲} جتم^{۲} عہ + ب^{۲} جب^{۲} عہ) ، لا^{۲} / (ر^{۲} ۔ ب^{۲}) + ما^{۲} / (ر^{۲} ۔ ا^{۲}) = ۱

جہاں ر دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۶۳- $\frac{\text{لا}}{\text{ا جم}^{۲}\,\text{طہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب جب}^{۲}\,\text{طہ}} = ۱$

باب نوزدہم

صفحات (۳۸۰-۳۹۶)

۲- $\frac{۱}{۲\sqrt{\text{اب}}}$ محددوں کے محوروں پر ۳- $\text{ما}^{۲} + ۱۶\,\text{ا لا} = ۰$

۷- $\text{ما}^{۲} + ۴\,\text{ا لا} = ۴\,\text{ا}$ ۸- $(\text{لہ لا} - \text{مہ ما})^{۲} = \text{مہ ج}\,(\text{ما} - \text{ج})$

۹- $۴\,\text{ما}^{۳} = ۹\,\text{ج لا}^{۲}$ ۱۲- $(\text{لا} + \text{ما} - \text{ج})^{۲} + \text{ج ما} = ۰$

۱۳- $\text{ما}(\text{ما} - ۲\,\text{ب}) = ۰$ جہاں ب دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۴- $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = \frac{۱}{۸}$ ۱۵- $(\text{لا} - \text{ب})^{۲} + (\text{ما} - \text{ج})^{۲} = \text{ا}^{۲}$

۲۲- $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\left(۱ + \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\right)} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}\left(۱ + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right)} = ۱$

باب بستم

صفحات (۳۹۷-۴۲۲)

۲- پہلا اور دوسرا نقطہ موسیقی ہیں تیسرے اور چوتھے کے ساتھ

۴- $-\frac{۳}{۲}$، ۰، ∞، ۶، ۴، $\frac{۹}{۲}$، $\frac{۹}{۴}$، $\frac{۱۲}{۵}$، $\frac{۵}{۲}$، $\frac{۱۸}{۷}$، $\frac{۲۱}{۸}$، $\frac{۸}{۳}$

۸- $\frac{۱}{۳}$ ۹- ۵

۱۰- $\text{لا}^{۲} + ۷\,\text{لا} + ۱۱ = ۰$ یا $\text{لا} = \frac{۱}{۲}(-۷ \pm \sqrt{۵})$

۱۹- ۴ ۲۳- $۳\,\text{ک}^{۲} - ۲\,\text{ل}^{۲} = ۰$

۲۹- ا = ب   ۳۸- مشق ۳۶ کی خاص صورت

۳۹- اگر ن، ق قطر کے سرے ہوں تو ا ن، ا ق، ا پر کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

۴۰- قطبی محددوں میں بدلو اور و ر کو و ن × و ق، و س کی رقوم میں معلوم کرو۔

آزمائشی پرچہ ۶ (صفحہ ۴۲۲)

۲- ا لا^2 + ب ما^2 + ۲ھ لا ما + ۲ف ما + ج = ۰ اور گ لا = ن ما کے نقاط تقاطع

۳- لا^2 + ما^2 - ۳ لا - ۳ ما + ۴ = ۰   ۶- لا ما = ± ج^2

۷- ۴ (لا - ۲ ا)^3 = ۲۷ ما^3

باب بست و یکم

(صفحات ۴۲۵-۴۳۳)

۵- - $\frac{1}{2}$

۶- طریق مطلوب ایک دائرہ ہے جو ف فَ کے قطر پر بنایا جائے جہاں ف، فَ مطابق دفعہ ۲۸۷ متعین کئے گئے ہیں۔ نقطہ و ایسے کسی دو دائروں کے بنیادی محور پر واقع ہے جو ا اَ، ب بَ میں سے کھینچے جائیں۔

پرچہ سوالات ۱ (صفحہ ۴۳۴)

۱- $\frac{\text{(ل}^2\text{ - م}^2\text{) ق - ۲ل م ف - ۲م ن}}{\text{ل}^2\text{ + م}^2}$ ، $\frac{\text{(م}^2\text{ - ل}^2\text{) ف - ۲ل م ق - ۲ل ن}}{\text{ل}^2\text{ + م}^2}$

۲۔ اگر قاعدہ کو محور لا مانا جائے اور قاعدہ کے نقطہ تنصیف کو مبدأ تو
ز = ۱/۳ ا √۶ اور ما سکے ہیں (۰، ا √۳ ، ± ۲/۳ ا √۶ ج)۔

۷۔ دئے ہوئے خط کو محور لا مانو اور معلومہ دائرے کے مرکز میں سے جو عمود اس معلومہ خط پر کھینچا جائے اُس کو محور ما، اس طرح دائرہ کی مساوات اس شکل کی ہوگی

لا۲ + (ما - ب)۲ = ج۲ ، مطلوبہ طریق دو مکانی ہیں
لا۲ - ۲ (ب ± ج) ما + ب۲ - ج۲ = ۰

۱۰۔ (۱/۲ ا، ۱/۲ ا)، لا + ما = ۰

پرچۂ سوالات ۲ (صفحہ ۴۳۵)

۱۔ دائرہ لا۲ + ما۲ - ۲ لا (لا۱ + لا۲ - ۲ لا۳) - ۲ ما (ما۱ + ما۲ - ۲ ما۳) + لا۱۲ + ما۱۲ + لا۲۲ + ما۲۲ - لا۳۲ - ما۳۲ = ۰
جہاں (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) مثلث کے رأس ہیں۔

۸۔ مرتب کو محور ما مانو اور ماسکہ محور لا پر لو جس کا فاصلہ مرتب سے ا ہو، طریق مطلوب ما۲ - م لا ما - ا لا + ا۲ = ۰ ہے جہاں م اُس زاویہ کا مماس ہے جو معلومہ خط محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

پرچۂ سوالات ۳ (صفحہ ۴۳۷)

۱۔ ب۲ = ۴ ا ج ، ب د = ۲ ا ع ، د۲ = ۴ ا ف

۲۔ ۴، (۳، ۶۰°)   ۳۔ ± ۲۱ ف / (ا ج - ۱)

۴۔ ا لا ± ب ما = √(ا۴ + ا۲ ب۲ + ب۴)

۷۔ ۱/۲ ا ب جب (عہ - بہ)

۱۰۔ ۵لا² ± ۶ب ما − ۶ب² = ۰، ما = ± ب (۱ − ۶ب² / ۵د²)

پرچۂ سوالات ۴ (صفحہ ۴۳۹)

۱۔ (۵ − ۴ب/د) لا² − ۸ لا ما + (۵ − ۴د/ب) ما² = ۰، د = ۲ب یا ½ ب

۱۰۔ ایک ضلع کو محور لا مانو، مثلث کے راس کو مبدا، تب طریق ہوگا
لا (م + ن جم عہ) + ما ن جب عہ = ½ ج

پرچۂ سوالات ۵ (صفحہ ۴۴۰)

۱۔ (۴اج − ب²) / ج ۲۔ لا² + ما² − ۵د لا + (۵د جم عہ ± ۴د) ما / جب عہ + ۴د² = ۰

۴۔ لا² + ما² = ا²ب² / (ا² + ب²) ۶۔ ب لا جب جہ/۲ = ا ما جم جہ/۲ جہاں جہ مستقل ہے

۸۔ ۷لا² + ۷ما² − ۳۹ لا − ۱۵ ما + ۳۲ = ۰

۹۔ دئے ہوئے نقطہ کو مبدا مانو، دائرہ اگر لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰
ہے تو لفافہ ہوگا لا² (۲ج − ف²) + ۲ف گ لا ما + ما² (۲ج − گ²) + ۲ج گ لا + ۲ج ف ما
+ ج² = ۰

۱۰۔ ما³ − ۴د لا ما + ۲۴ د³ = ۰

پرچۂ سوالات ۶ (صفحہ ۴۴۲)

۱۔ اب کو محور لا اور اس کے نقطۂ تنصیف کو مبدا مانو، اس طرح ج کا
طریق ہوگا ۸لا² + ۴ج لا − ما² = ۰

۲۔ ½ (۱۱√۳ − ۵) ج ۳۔ ا^(۲/۳) لا + ب^(۲/۳) ما + ا^(۲/۳) ب^(۲/۳) = ۰

۱۰ — $لا^۲ + ما^۲ \pm \frac{۲\, ج\, لا}{\sqrt{۱ - ۴\, ک^۲}} + ج^۲ = ۰$. جہاں ک نسبت معلومہ ہے۔ اس سوال میں قاعدہ کو محور اور اس کے نقطہ تنصیف کو مبدأ مانا گیا ہے۔

پرچۂ سوالات ۷ (صفحہ ۴۴۳)

۱ — $ب\, لا - ا\, ما + ا\, ک - ب\, ہ = ۰$.

$\frac{(ب^۲ ہ - ا\, ب\, ک - ا\, ج)}{(ا^۲ + ب^۲)}$ ، $\frac{ا^۲ ک - ا\, ب\, ہ - ب\, ج}{ا^۲ + ب^۲}$

۳ — $لا^۲ + ما^۲ + \frac{(لا + ما)(ج + د)}{ا + ب} + \frac{۱}{۲} \frac{(ج + د)^۲}{(ا + ب)^۲} = \frac{۱}{۴} \frac{(ج - د)^۲}{(ا^۲ + ب^۲)}$

۴ — $\frac{۲\, لا}{ا} + ۱ = \frac{(۳\, لا + ا)^۲}{ما^۲}$

پرچۂ سوالات ۸ (صفحہ ۴۴۴)

۶ — مرکز (۱، ۲)، محوروں کے طول ۱، $\sqrt{۳}$ ، محوروں کی مساواتیں بلحاظ مرکز کے $لا - ما = ۰$، $لا + ما = ۰$، متقارب بلحاظ ابتدائی محوروں کے
$لا^۲ - ۴\, لا\, ما + ما^۲ + ۲\, لا - ۳ = ۰$.

۹ — $(لا^۲ + ما^۲)(ب\, لا + ا\, ما) + (ا\, لا - ب\, ما)^۲ = ۰$. جہاں $لا^۲ = ۴\, ا\, ما$ اور $ما^۲ = ۴\, ب\, لا$ مکافی ہیں۔

پرچۂ سوالات ۹ (صفحہ ۴۴۶)

۲ — دائرہ

۴ — $\frac{ل_۳ ل_۲ جب(ط_۳ - ط_۲) + ل_۳ ل_۱ جب(ط_۳ - ط_۱) + ل_۱ ل_۲ جب(ط_۱ - ط_۲)}{\sqrt{ل_۱^۲ + ل_۲^۲ - ۲\, ل_۱ ل_۲ جم(ط_۱ - ط_۲)}}$

۴ـ (۲، ـ۳)، لا² ـ لا ما + ما² = ۱

۱۰ـ لا² ـ ما² ـ ا لا + ب ما = ۰

پرچۂ سوالات ۱۰ (صفحہ ۴۴۸)

۱ـ ا لا ـ ب ما ـ ا² = ۰، ا لا ـ ب ما + ب² = ۰، ب لا + ا ما = ا ب ± (ا² + ب²)

نقطہ تقاطع ہے {½ (ا ± ب)، ½ (ب ± ا)}

۲ـ ۲ لا {ا (ل۲ ـ ل۳) + ج (ل۳ ـ ل۱) + ع (ل۱ ـ ل۲)} + ۲ ما {ب (ل۲ ـ ل۳)
+ د (ل۳ ـ ل۱) + ف (ل۱ ـ ل۲)}
= (ا² + ب²) (ل۲ ـ ل۳) + (ج² + د²) (ل۳ ـ ل۱) + (ع² + ف²) (ل۱ ـ ل۲)
+ (ل۲ ـ ل۳) (ل۳ ـ ل۱) (ل۱ ـ ل۲)

جہاں (ا، ب)، (ج، د)، (ع، ف) مرکز ہیں ـ

۸ـ ۲ (لا² + ما²) ـ (ا + ب) لا + (ج ـ ا ب/ج) ما = ۰ جہاں تین نقطے (ا، ۰)، (ب، ۰)، (۰، ج) ہیں ـ

پرچۂ سوالات ۱۱ (صفحہ ۴۴۹)

۱ـ ج ا اور ج ب کو محور مانو اور فرض کرو کہ ج ا = ا′، ج ب = ب′

طریق ہے ۲لا/ا۱ + ۲ما/ب۱ = ۱

۲ـ ۸/۵ ـ √۵، ∞　　　۵ـ ۸/۵

پرچۂ سوالات ۱۲ (صفحہ ۴۵۱)

۲— (۲ ف فَ + ۲ گ گَ − ج − جَ) / ۲√((ف² + گ² − ج)(فَ² + گَ² − جَ))

۷— ۷ لا + ۹ ما + ۱ = ۰ ۸— لا + ما = ۰

پرچۂ سوالات ۱۳ (صفحہ ۴۵۲)

۳— (± ۳/۴ √۶ ا، ∓ ۱/۴ √۶ ا)، (± ۱/۴ √۶ ا، ± √۶ ا)

۴— ر = (ا − ب)/√(ا² + ب²)، محور ہیں (ا + ب)/√(۲ اب)، (ا + ب)/√(ا² + ب²)، وتر خاص = ۲√(۲ اب) (ا + ب)/(ا² + ب²)

مماس کی مساوات ہے ± (ا − ب) لا/√(ا² + ب²) ± ما = (ا + ب)/√(۲ اب)

۱۰— ک = ۲، ر = ۲

پرچۂ سوالات ۱۴ (صفحہ ۴۵۴)

۱— لا (ا۱ − ب۱ √۳) − ما (ا۱ √۳ − ب۱) + ا۱ ب۱ = ۰

۸— ۳/۸ ، ۳/۸

پرچۂ سوالات ۱۵ (صفحہ ۴۵۶)

۲— محور اصغر کے سروں پر ۳— ۲√۵۹۰ ا

۴— لا + ا = ۰

تمّت

فہرست اصطلاحات

Abridged notation	مختصر ترقیم
Abscissa	فصلہ
Anharmonic ratio	غیر موسیقی نسبت
Asymptotes	متقارب
Auxiliary circle	امدادی یا معاون دائرہ
Axis	محور
Cartesian (Coordinates)	کارٹیزی (محدد)
Complete quadrilateral	تکمل ذوار بعۃ الاضلاع
Concurrency	تراکز
Confocal conics	ہم ماسکہ مخروطی تراشیں
Conjugate diameters	مزدوج قطر
Coordinates	محدد
Corresponding Points	متناظر نقطے
Cross ratio	چلیپی نسبت
Director Circle	مرتب دائرہ
Directrix	مرتب
Eccentricity	خروج المرکز
Ellipse	قطع ناقص
Envelope	لفاف
Equilateral hyperbola	قائم زائد
Focus	ماسکہ
Harmonic Conjugates	موسیقی مزدوج

Hyperbola	قطع زائد
Infinity	لاتناہی
Invariants	غیر متغیر
Inversion	تقلیب
Involution	بہ پیچ
Latus rectum	وتر خاص
Limiting Points	انتہائی نقطے
Major axis	محور اعظم
Minor axis	محور اصغر
Normal	عماد
Notation	ترقیم، طریق کتابت
Oblique axes	مائل محور
Ordinate	معیّن
Parabola	قطع مکافی
Parameter	مبدل
Pencil	پنسل
Perpendicular	عمود
Polar Coordinates	قطبی محدد
Projection	تظلیل
Quadrilateral	ذو اربعۃ الاضلاع
Radical axis	بنیادی محور
Radius Vector.	سمتی نیم قطر
Tangent	مماس
Ultimate intersections	انتہائی تقاطع
Vectorial angle	سمتی زاویہ